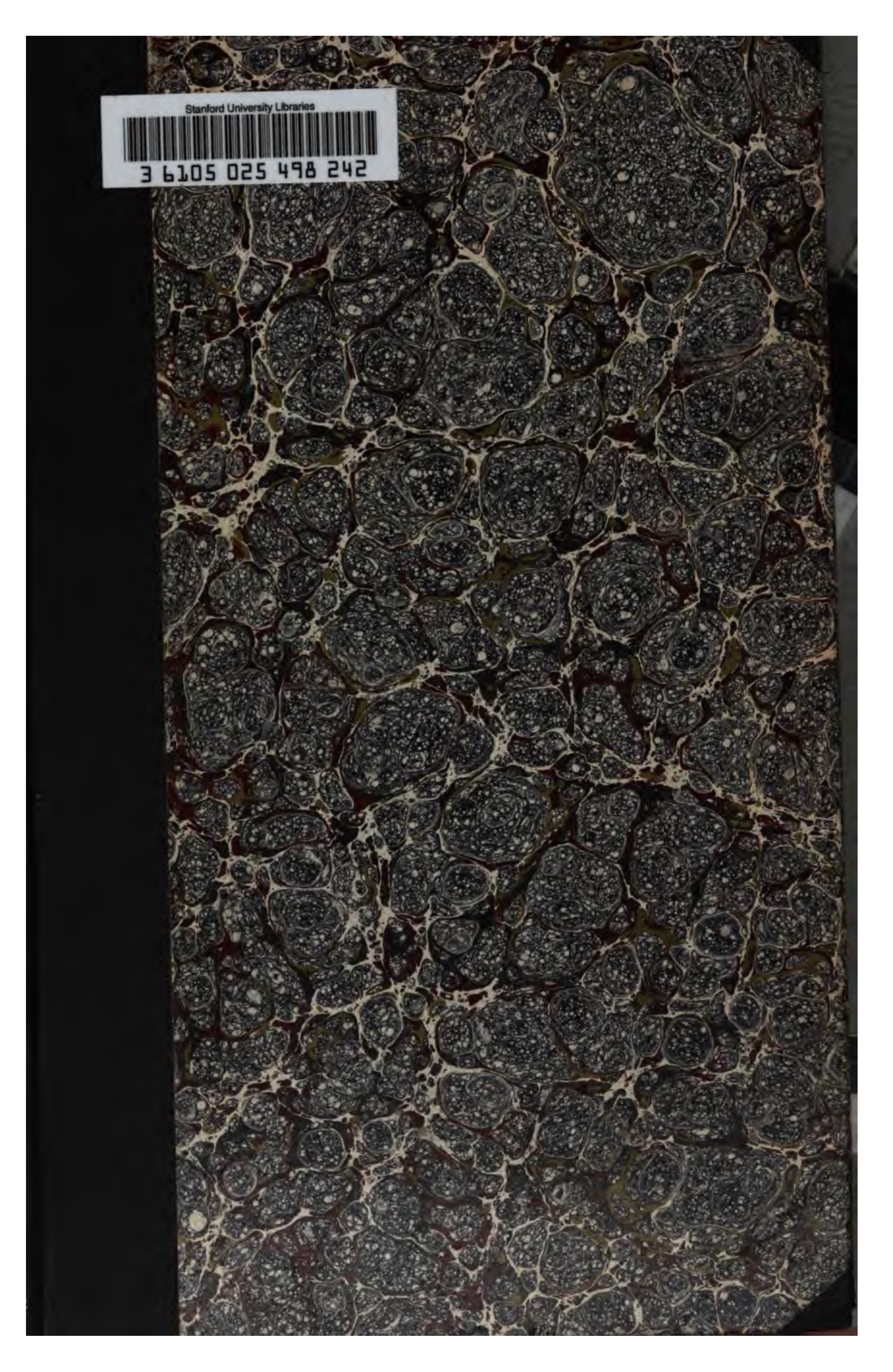
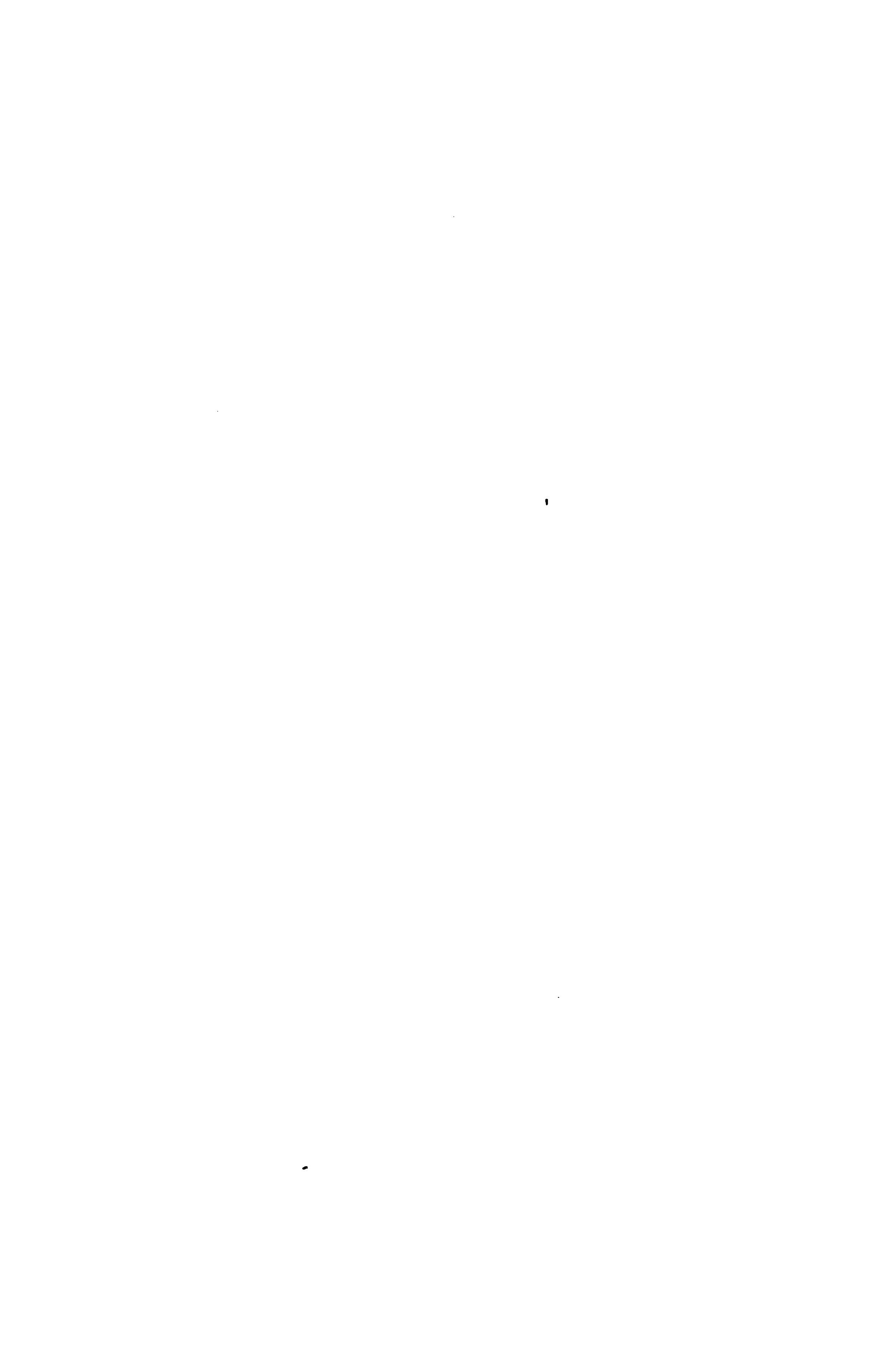

Stanford University Libraries
3 6105 025 498 242







ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Fünfzehnter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

(H. Ehlers & Co.)

1897.

Inhalts-Verzeichniss
des fünfzehnten Teils.

Geometrie der Ebene.

Geometrie des Raumes.

Mechanik.

Litterarische Berichte.

Maclintoek (enlarym.) Puchberger (Int.) Niewenglowski (anal. Geom.) Frankenbach (3 eck). Kluyver (Min. Flch.) Overeem (merkw. Pkt. d. Viel.) Schaute (4 dehn. Prism.) Suhle (Curv. auf Flch.) Schegel (S. 4 Dim.) Tarry (géom. im. — géom. gén.)

LIX. Zeuthen (Gesch. d. M.) Hensel (Kronecker W.) Hammer (Euler sph. Tr.) Stäckel (Gesch. Parall.) Schönflies (Plücker). Gino Loria (geom. Th.) Wellisch (Gesch. Wkltris.) Diekmann (Ar. Alg.) Schurig (Alg.) Stegmann (Plan.) Meigen (Geom. — Trig.) Lengauer (Ster.) Bork (Hpts.) Roeder (Coord.). Weber (Alg.) Fuhrmann (Int.) Wölffing (sing. P.) Indra (Ball.) Loessl (Luftwdst.) Appell (Mech.) Wien. astr. Kal. — Bur. Long. Annuaire.

LX. Seeger (Ar.) Koppe (Diekmann) (Ar. Alg.) Sporer (nied. Anal.) Winter (Alg.) Loewenberg (Math.) Jentzen (Trig) Kröger (Plan.) Küpper (proj. G.) Günther (m. Geogr.) Girndt (Rauml.) Schubert (Aufg. — Ar. Alg.) Gundelfinger (Wurz. trin. Glch.). O. Müller (Taf. Messk.) Sickenberger (4 st. Log.) Schubert (5 st. Log.) E. Schultz (4 st. Taf.) Treutlein (4 st. Log.) Schülke (4 st. Log.) Bendt (Diff. Int.) J. A. Serret (Diff. Int.). Schlesinger (lin. Diffglch.)

Berichtigungen

im 15. Teile.

Seite	37	Zeile	6 v. u.	statt	U	setzo	C
„			1 „	„	F_1	„	F''
„	39	„	15 v. o.	„	$= 0$	„	T
„	41	„	21 „	„	Ord.	„	O oder
„	45	„	4 v. u.	„	Haukels	„	Hankels
„	47	„	2 v. o.	„	q_7	„	q_1
„	48	„	12 „	„	$\frac{\varepsilon'^{\,q_4}}{\alpha} = 1$	„	$\frac{\varepsilon'^{\,q_1}}{\alpha_1'} - 1$
„	54	„	15u.16 „	„	E_1'	„	E_3'
„	63	„	9 v u.	„	$-f_1$	„	$+f_1$
„	65	„	18 v. o.	„	$l_2+m_2t+n_2t^2$	„	$l_3+m_3t+n_3t^2$
„	66	„	10 v. u.	„	$\mp$	„	$=$
„	70	,	15 v. o.	„	w	„	ω
			20 „	„	w'	„	ω'
			21 „	„	$w'1 = \omega\alpha'$	„	$\omega' = w\alpha'$
			5 v. u.	„	t mit	„	t_1
„	71	„	6 „	„	$w_1\gamma'$	„	$v_1\gamma'$
					u_2-u_3	„	u_2-u_1
					$(w_2-w_1)\gamma'$	„	$(v_2-v_1)\gamma'$
„	73	„	15 v. o.	„	die Ebenen	„	drei Ebenen
„	80	„	10 v. u.	„	$n+\delta$	„	$n+p$
„	81	„	8 v. o.	„	$rB+$	„	$rB=$
„	86	„	3 v, u	„	Bulbin	„	Balbin
„	87	„	5 v. v.	„	p_x	„	p^n
„	88	„	17 v. u	„	AC	„	AB
„	90	„	8 „	„	γ_c'	„	γ_1'
„	91	„	8 „	„	γ'	„	γ_1'
„	93	„	7 „	„	γ_1'	„	$m\gamma_1'$
„	94	„	14 v. o.	„	$(A;\ B)^5$	„	$(X;\ B)^0$
„	96	„	1 „	„	A_1M_1	„	AM_1
			2 „	„	P	„	P_1

Seite		Zeile					
Seite	96	Zeile	4 v. o.	statt	$\bar{B})^{\alpha}$	setze	$P)^{i}$
„	98	„	4 „	„	i_2	„	i_3 (2 mal)
			5 „	„	B_1	„	C_1
„	100	„	8 „	„	$\gamma\varkappa'$	„	$\varkappa'$
			2 v. u.	„	k'	„	$\varkappa'$
„	102	„	4 „	„	$\frac{p'}{\alpha'} =$	„	$\frac{\eta'}{\alpha'} =$
„	104	„	5 v. o.	„	$(b+d)r$	„	r (2 mal)
„	105	„	10 „	„	br	„	bc
					cc	„	cx
			10 v. u.	„	$j \sin\varphi$	„	$i \sin\varphi$
			9 „	„	$(d+y)$	„	$d(x+y)$
					j	„	ij
„	106	„	16 „	„	CC	„	CD
			11 „	„	U_1	„	U
					U_2	„	U
„	107	„	11 v. o.	hier fehlen die 2 Worte: der Quotientvector			
„	108	„	12 „	statt	$(C; S)$	setze	$(C; D)$
				„	w_1	„	w_4
				„	y_1	„	y_2
				„	z_1	„	z_3
„	109	„	1	„	$x_1' x_2$	„	$x_1' x_1$
			2	„	x_1'	„	$x_1' w_1$
			11	„	$i_3 s$	„	$i_3 z$
„	110	„	7	„	$\frac{m - m_1}{n - n_1}$	„	$\frac{n - n_1}{m - m_1}$
			15	„	φ	„	ψ
„	112	„	20	„	$e_2 = i_1$	„	$e_1 = i_1$
		„	6 v. u.	„	v_2	„	e_2
		„	3 „	„	1, 2, 3	„	$n = 1, 2, 3$
„	113	„	1 v. o.	„	$7)e_1$	„	$7)i_1$
			2 „			streiche	$e_4 = e_4 e_3$

Seite 86 Zeile 18 v. ob. nach Ergänzung lautet:

nicht übereinstimmt. Die Grösse i ist durch die Ebene BAC bestimmt, umgekehrt . . . etc.

I.

Ueber orthoaxiale Kegelschnitte.

Von

Dr. Alfred Salomon.

Wird eine Parabel von einem Kreise geschnitten, so ist die algebraische Summe der Abstände der Durchschnittspunkte von der Achse der Parabel gleich 0.

B e w e i s.

Die Gleichung der Parabel in Orthogonalcoordinaten sei

$$1) \quad y^2 = 2px$$

die des Kreises

$$2) \quad (y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2$$

Die Durchschnittspunkte seien

$$A \equiv x_1,\ y_1$$
$$B \equiv x_2,\ y_2 \qquad \text{(Fig. 1.)}$$
$$C \equiv x_3,\ y_3$$
$$D \equiv x_4,\ y_4$$

Setzt man den aus 1) sich ergebenden Wert von x in 2) ein, so erhält man eine Gleichung vierten Grades für y von folgender Form

$$y^4 + 0 \cdot y^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

Da nun y_1, y_2, y_3, y_4 die Wurzeln dieser Gleichung sind, so folgt:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

was zu beweisen war.

Es ist leicht ersichtlich, dass auch die Umkehrung dieses Satzes Gültigkeit hat, nämlich dass 4 Parabelpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen, wenn die algebraische Summe ihrer Achsenabstände = 0 ist.

Folgerungen.

1) Wenn zwei der Durchschnittspunkte C und D in C_1 (Fig. 2.) zusammenfallen, so wird einerseits

$$y_3 = y_4 \quad \text{also} \quad y_3 = -\frac{y_1 + y_2}{2}$$

andererseits findet in C_1 eine Berührung zwischen Kreis und Parabel statt.

Fallen die Punkte A und D in A_1 (Fig. 3.) zusammen, so findet ebenfalls Berührung beider Curven statt. Es ist ohne Weiteres zu übersehen, dass in diesem Falle, wo die beiden Durchschnittspunkte kleinster Ordinaten zusammengeflossen sind, der Kreis die Parabel von aussen berührt, während im vorigen Falle die Berührung von innen statt fand.

2) Wenn $y_1 = -y_4$ ist, so ist

$$y_2 = -y_3$$

Die Schnittpunkte liegen symmetrisch zur Parabelachse und der Kreismittelpunkt in derselben. (Fig. 4.)

3) Wenn $y_1 = y_2$ und $y_3 = y_4$ ist, so ist

$$y_1 = -y_3$$

Der Kreis berührt die Parabel in zwei symmetrisch zur Achse liegenden Punkten von innen. (Fig. 5.)

4) Wenn $y_4 = 0$ ist, so erhalten wir für den Kreis durch den Scheitel der Parabel folgende Bedingungsgleichung:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

5) Wenn $y_1 = 0$, $y_4 = 0$, so ist

$$y_2 = -y_3$$

Der Kreis berührt die Parabel im Scheitel und sein Mittelpunkt liegt auf der Achse.

6) Wenn $y_2 = y_3 = y_4$ ist, so ist

$$y_1 = -3y_2$$

Es findet zwischen Kreis und Parabel eine Berührung zweiter Ordnung statt, der Kreis ist daher der Krümmungskreis der Parabel in B_1 (Fig. 6.)

7) Wenn $y_1 = y_2 = y_3 = y_5$, also $= 0$ ist, so findet zwischen Kreis und Parabel eine Berührung dritter Ordnung statt. Der Kreis ist der Krümmungskreis im Scheitel A_1 der Parabel (Fig. 7.) Also nur dieser Krümmungskreis kann mit der Parabel eine Berührung dritter Ordnung eingehen.

Zieht man durch die 4 Schnittpunkte von Kreis und Parabel an beiden Curven die Normalen (die Kreisnormalen gehen durch den Kreismittelpunkt) und sind die Winkel dieser Normalen mit der positiven Richtung der Abscissenachse α_1, α_2, α_3, α_4 bzhw. β_1, β_2, β_3, β_4 (Fig. 8.), so erhält man nach der zu Anfang festgesetzten Bezeichnung:

$$\sin\alpha_1 = \frac{y_1 - b}{r}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{y_2 - b}{r}$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{y_3 - b}{r}$$

$$\sin\alpha_4 = \frac{y_4 - b}{r}$$

durch Addition ergiebt sich

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4b}{r}$$

da

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

ist, so ist

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4 = -\frac{4b}{r}$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg}\beta_1 = -\frac{y_1}{\text{subn.}} = -\frac{y_1}{p}$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = -\frac{y_2}{\text{subn.}} = -\frac{y_2}{p}$$

$$\operatorname{tg}\beta_3 = -\frac{y_3}{\text{subn.}} = -\frac{y_3}{p}$$

$$\operatorname{tg}\beta_4 = -\frac{y_4}{\text{subn.}} = -\frac{y_4}{p}$$

daher ist

$$\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2 + \operatorname{tg}\beta_3 + \operatorname{tg}\beta_4 = -\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{p}$$

also:

$$\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2 + \operatorname{tg}\beta_3 + \operatorname{tg}\beta_4 = 0$$

Wird eine Parabel

$$y^2 = 2px$$

von einem beliebigen Kegelschnitt

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0$$

geschnitten, so gilt für die Abstände y_1, y_2, y_3, y_4 der Durchschnitts punkte von der Parabelachse folgende Bedingungsgleichung:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{2ap}{b}$$

Beweis.

Substituirt man den aus der Parabelgleichung sich ergebenden Wert von x in die Kegelschnittgleichung, so erhält man eine Gleichung vierten Grades für y von der Form

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

wo

$$A = \frac{2ap}{b}$$

ist, daher

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{2ap}{b}$$

Wenn daher in obiger allgemeinen Gleichung eines Kegelschnittes das Glied mit xy verschwindet, also $a = 0$ wird, während $b \lessgtr 0$ ist, so wird

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

die Schnittpunkte liegen dann auf der Peripherie eines Kreises.

Um nun die Bedeutung der Bedingungen $a = 0$, $b \gtrless 0$ zu erkennen, denken wir uns die Scheitelgleichung eines Kegelschnittes

$$\eta^2 = 2p'\xi + q\xi^2$$

auf die obige allgemeine Form gebracht unter Anwendung der Transformationsgleichungen:

$$\xi = m + x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$\eta = n + x\sin\theta + y\cos\theta$$

In der transformirten Gleichung wird dann der Coefficient von xy

$$a = \sin 2\theta \,.\, (1 + q)$$

der Coefficient von x^2 wird

$$b = \sin^2\theta \,.\, (1 + q) - q$$

Nun verschwindet a für

$$1)\ \ \theta = 0,\quad 2)\ \ \theta = \frac{\pi}{2}\quad \text{oder}\quad 3)\ \ q = -1$$

Für

$$\theta = 0 \quad \text{und} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

ist also eine Symmetrieachse des Kegelschnittes parallel resp. senkrecht zur Parabelachse. Für $q = -1$ ist der Kegelschnitt ein Kreis, hat also unzählige Symmetrieachsen, θ wird daher in diesem Falle unbestimmt.

a und b verschwinden gleichzeitig, wenn $\theta = 0$ und $q = 0$, d. h. wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist, deren Achse der Achse der ersteren Parabel

$$y^2 = 2px$$

parallel ist. In diesem Falle können indessen nicht 4 Schnittpunkte existiren, denn sämtliche Schnittpunkte der Curven

$$C_1 \equiv y_2 - 2px = 0 \quad \text{und} \quad C_2 \equiv y^2 + cy + dx + e = 0$$

sind in

$$C_2 - C_1 \equiv cy + (d + 2p)x + e = 0$$

enthalten. Dieses ist die Gleichung einer geraden Linie, welche also mit jeder der Parabeln höchstens 2 Punkte gemein haben kann.

Unter Berücksichtigung dieser Entwicklungen erhalten wir also den folgenden Satz:

Wird eine Parabel von einem Kegelschnitt so geschnitten, das eine der Symmetrieachsen desselben senkrecht zur Parabelachs steht, so liegen die Durchschnittspunkte auf der Peripherie eine Kreises.

Folgerungen.

1) Wenn die Winkelhalbirende zweier Geraden zur Achse eine Parabel senkrecht steht, so liegen die Durchschnittspunkte de Geraden mit der Parabel auf der Peripherie eines Kreises.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

2) Je zwei Gegenseiten des einer Parabel und einem Kreis gemeinschaftlichen Sehnenvierecks schneiden die Parabelachse unte entgegengesetzt gleichen Winkeln.

Dieser Satz lässt sich indirect leicht beweisen. Auch der direct Beweis ist sehr einfach.

Wenn α_1 und α_2 (Fig. 9.) die Winkel zweier Gegenseiten de Sehnenvierecks mit der Parabelachse sind, und die obige allgemein Kegelschnittgleichung als die Gleichung dieser beiden Sehnen ange sehen wird, so ergiebt sich die Bedingungsgleichung:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e$$
$$= (y + \operatorname{tg}\alpha_1 x + m)(y + \operatorname{tg}\alpha_2 x + n) = 0$$

und da $a = 0$, so folgt

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_1 = -\alpha_2$$

3) Die gemeinschaftliche Sehne und Tangente einer Parabel un eines Krümmungskreises derselben schneiden die Parabelachse unte entgegengesetzt gleichen Winkeln

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \quad \text{(Fig. 10.)}$$

Wenn zwei Kegelschnitte sich so schneiden, dass eine Symme trieachse des einen zu einer ebensolchen des anderen senkrech steht [1]), so liegen die Schnittpunkte auf der Peripherie eines Kreises

Beweis.

Zwei orthoaxiale Kegelschnitte können den vorangehenden Be trachtungen gemäss stets auf folgende Form gebracht werden:

---

1) Zur Abkürzung bezeichnet Verfasser derartige Kegelschnitte im fo genden als „orthoaxiale“.

$$H_1 \equiv y^2 + b_1 x^2 + d_1 x = 0$$
$$H_2 \equiv y^2 + b_2 x^2 + c_2 y + d_2 x + e_2 = 0$$

Der Kegelschnitt

$$H_2 - H_1 \equiv (b_2 - b_1) x^2 + (d_2 - d_1) x + c_2 y + e_2 = 0$$

geht durch sämtliche Schnittpunkte beider. Der letztere ist aber eine Parabel, deren Achse der Ordinatenachse parallel läuft, die daher H_1 in 4 Punkten schneidet, welche auf der Peripherie eines Kreises liegen. Da diese Punkte mit den Schnittpunkten von H_1 und H_2 identisch sind, so ist der Satz bewiesen.

Umkehrung.

Liegen die 4 Schnittpunkte zweier Kegelschnitte auf der Peripherie eines Kreises, so sind letztere orthoaxial.

Beweis.

Ist $H_1 = 0$ die Scheitelgleichung des einen Kegelschnittes, $H_0 = 0$ die Gleichung des Kreises, so muss die Gleichung des anderen Kegelschnittes H_2 von der Form

$$H_1 + \lambda H_0 = 0 \text{ sein.}$$

H_2 kann also kein Glied mit xy enthalten, muss daher, vorangegangenen Betrachtungen zufolge, zu H_1 orthoaxial sein.

Folgerungen.

1) Zwei Gerade, deren Winkelhalbirende auf der Achse eines Kegelschnittes senkrecht steht, schneiden den Kegelschnitt in vier Punkten, die auf der Peripherie eines Kreises liegen.

2) Zwei Paar gerader Linien, deren Winkelhalbirende auf einander senkrecht stehen, begrenzen ein Kreisviereck.

3) Die gemeinschaftlichen Sehnen zweier orthoaxialen Kegelschnitte schneiden die Achsen unter paarweis entgegengesetzt gleichen Winkeln.

4) Die gemeinsame Sehne und Tangente eines Kegelschnittes und eines Krümmungskreises desselben schneiden die Achse des Kegelschnittes unter entgegengesetzt gleichen Winkeln.

Hieraus folgt eine Construction des Krümmungskreises in einem gegebenen Punkte eines Kegelschnittes [1]).

5) Wird ein Kegelschnitt von einem System von Kreisen in einem Punkte berührt und in zwei anderen Punkten geschnitten, so sind die Schnittsehnen einander parallel und ihr Winkel mit der Achse des Kegelschnittes ist dem Tangentenwinkel entgegengesetzt gleich.

6) Laufen 2 Sehnen eines Kegelschnittes zweien von einem Punkte der Achse ausgehenden Tangenten parallel, so liegen ihre Endpunkte auf einem Kreise.

Specialfälle.

a) Beide Sehnen sind Tangenten.

b) Eine Sehne ist Tangente in dem einen Endpunkte der anderen. — Der Kreis ist der Krümmungskreis in diesem Punkte.

c) Beide Sehnen sind Tangenten und die Berührungspunkte fallen zusammen, — dieses ist nur im Scheitel des Kegelschnittes möglich — daher der Satz:

Ein Kegelschnitt kann nur mit dem Krümmungskreise im Scheitel eine Berührung 3. Ordnung eingehen.

Sämtliche Kegelschnitte, welche durch die Ecken eines Kreisvierecks gelegt werden können, haben einander parallele oder orthogonale Achsen.

Beweis.

Vier Punkte eines Kreises lassen sich stets als Durchschnitt zweier orthoaxialer Kegelschnitte auffassen:

$$H_1 \equiv y^2 + a_1 x^2 + b_1 x = 0$$
$$H_2 \equiv y^2 + a_2 x^2 + b_2 x + c_2 y + d_2 = 0$$

Sämtliche durch die Schnittpunkte beider gehenden Kegelschnitte werden dann durch

$$H_1 + \lambda H_2 = 0$$

---

1) vergl. Salmon-Fiedler, Analytische Geom. der Kegelsch., 5. Aufl. S. 401.

ausgedrückt, wo λ ein beliebiger Parameter ist. Auch hierin ist der Coefficient von xy gleich 0. Daher sind die Achsen sämtlicher durch

$$H_1 + \lambda H_2 = 0$$

ausgedrückten Kegelschnitte parallel oder senkrecht zu den Achsen von H_1 und H_2.

Folgerung.

Die Geraden, welche die Winkel je zweier Gegenseiten eines Kreisvierecks halbiren, stehen auf einander senkrecht.

Für die Coordinaten der Schnittpunkte zweier orthoaxialer Kegelschnitte, die auf ein den Achsen paralleles Coordinatensystem bezogen sind:

$$H_1 \equiv y^2 + a_1 x^2 + b_1 x + c_1 y + d_1 = 0$$
$$H_2 \equiv y^2 + a_2 x^2 + b_2 x + c_2 y + d_2 = 0$$

gelten die Relationen:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{2(a_2 c_1 - a_1 e_2)}{a_1 - a_2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2}$$

Beweis.

In dem System der Kegelschnitte $H_1 + \lambda H_2$, welche mit H_1 und H_2 gleiche Schnittpunkte haben, befinden sich zwei Parabeln

$$P_1 \equiv x^2 - \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} x - \frac{c_2 - c_1}{a_1 - a_2} y - \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2} = 0$$

$$P_2 \equiv y^2 - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 - a_2} x - \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 - a_2} y - \frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_1 - a_2} = 0$$

Die Achsen dieser Parabeln müssen den Coordinatenachsen parallel sein, ihre Gleichungen sind daher

$$x = C, \quad y = C_1$$

worin C und C_1 diejenigen Werte von x resp. y sind, welche y in P_1 resp. x in P_2 zu einem Maximum oder Minimum machen.

Da nun in P_1

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial P_1}{\partial x}}{\frac{\partial P_1}{\partial y}} = \frac{2x - \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}}{\frac{c_2 - c_1}{a_1 - a_2}} \text{ ist,}$$

so ist

$$C = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$$

Für P_2 ist

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial P_2}{\partial y}}{\frac{\partial P_2}{\partial x}} = \frac{2y - \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 - a_2}}{\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 - a_2}}$$

daher

$$C_1 = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 - a_2}$$

Die Abstände der Schnittpunkte von H_1 und H_2 von der Achse der Parabel P_1 sind

$$C - x_1, \quad C - x_2, \quad C - x_3, \quad C - x_4$$

Die Summe dieser Abstände ist dem zu Anfang dieser Arbeit bewiesenen Satze zufolge gleich 0, daher

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4C = \frac{2(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2}$$

Ebenso ist

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4C_1 = \frac{2(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{a_1 - a_2}$$

Die Coordinaten (α, β) des Mittelpunktes des einem Systeme orthoaxialer Kegelschnitte zugehörigen Kreises sind gleich den Parametern der zugehörigen Parabeln, vermehrt um das arithmetische Mittel aus den entsprechenden Coordinaten der Durchschnittspunkte. (Fig. 11.)

Beweis.

Bezeichnet man die Parameter der beiden Parabeln P_1 und P_2 des Systems $H_1 + \lambda H_2$ mit p_y und p_x und setzt zur Abkürzung die oben bestimmten Coordinaten des Schnittpunktes ihrer Achsen C und C_1 ein, so lauten die Gleichungen der Parabeln:

$$P_1 \equiv x^2 - 2Cx - 2p_y y + \frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2} = 0$$

$$P_2 \equiv y^2 - 2p_x x - 2C_1 y + \frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_2 - a_1} = 0$$

Hieraus erhält man durch Addition die Gleichung des Kreises der Durchschnittspunkte

$$H \equiv P_1 + P_2 \equiv [y-(C_1+p_y)]^2 + [x-(C+p_x)]^2 + A = 0$$

wo A die aus der Rechnung sich ergebende Constante bedeutet.

Daher sind die Coordinaten des Kreismittelpunktes:

$$\alpha = C + p_x = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

$$\beta = C_1 + p_y = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4} + p_y$$

was zu beweisen war.

Wählt man die Achsen der beiden Parabeln zu Coordinatenachsen, so ist

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$$

und

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 0$$

und man erhält so für die Abstände des Kreismittelpunktes von den Parabelachsen

$$MN = \alpha_1 = p_x$$
$$MR = \beta_1 = p_y$$

Sind die Gleichungen zweier Kegelschnitte in der allgemeinen Form (nach Salmon-Fiedler) gegeben:

$$H \equiv a_{11}y^2 + a_{12}xy + a_{22}x^2 + a_{13}y + a_{23}x + a_{33} = 0$$
$$H' \equiv a_{11}'y^2 + a_{12}'xy + a_{22}'x^2 + a_{13}'y + a_{23}'x + a_{33}' = 0$$

so liegen die Durchschnittspunkte auf einem Kreise, wenn das System

$$H + \lambda H' = 0$$

einen Kreis enthält, d. h. wenn

$$a_{11} + \lambda a_{11}' = a_{22} + \lambda a_{22}'$$

und

$$a_{12} + \lambda a_{12}' = 0$$

oder nach Elimination von λ:

$$\frac{a_{12}}{a_{12}'} = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11}' - a_{22}'}$$

Liegt der Mittelpunkt des Kreises auf der Achse der Parabel mit dem Parameter p_x (nach obiger Bezeichnung), so ist der Parameter

$$p_y = 0$$

Die Gleichungen der beiden orthoaxialen Parabeln haben dann die Formen:

$$y^2 = 2p_x x + c_1$$
$$x^2 = 0 \cdot y + c_2$$

oder nach entsprechender Transformation:

$$y^2 = 2p_x x$$
$$x^2 = d_1 x + d_2$$

Die zweite Parabel geht also für diesen Fall in zwei parallele Gerade über.

Für $d_2 = 0$ wird die eine dieser Geraden Tangente im Scheitel der Parabel. Für $\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{cases}$ fallen beide Gerade mit der Scheiteltangente zusammen, und die Kreisgleichung ist daher

$$y^2 + x^2 = 2p_x x$$

oder

$$y^2 + (x - p_x)^2 = p_x^2$$

Also:

Der Radius des Krümmungskreises im Scheitel einer Parabel ist gleich dem Parameter derselben.

Die 3 Mittellinien eines vollständigen Vierecks schneiden sich in einem Punkte, der sie halbirt.

Beweis.

Die Coordinaten der Ecken seien

$$A \equiv (x_1, y_1), \quad B \equiv (x_2, y_2)$$
$$C \equiv (x_3, y_3), \quad D \equiv (x_4, y_4)$$

Die Seitenmittelpunkte sind dann:

$$M \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$N \equiv \left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}\right)$$

$$R \equiv \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

$$S \equiv \left(\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 - y_1}{2}\right)$$

$$O \equiv \left(\frac{x_3 + x_1}{2}, \frac{y_3 + y_1}{2}\right)$$

$$P \equiv \left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}\right)$$

Daher ist die Mitte von MN:

$$Q \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}\right)$$

auch Mitte von RS und OP, somit ist der Satz bewiesen.

Die Mittellinien des zwei orthoaxialen Parabeln gemeinsamen Sehnenvierecks schneiden sich im Achsenschnittpunkt.

Beweis.

Die Achsen seien Coordinatenachsen, dann ist

$$Q \equiv (0, 0) \quad \text{(nach obiger Bezeichnung)}$$

was zu beweisen war.

Folgerung.

Besitzen zwei orthoaxiale Parabeln einen gemeinsamen Krümmungskreis, so geht die Krümmungssehne durch den Achsenschnittpunkt und wird durch denselben im Verhältniss 1 : 4 geteilt.

II.

Zur Theorie der Curven in analytischer Behandlungsweise.

Von

A. zur Kammer, Dr. phil.
in Kiel.

Lange Zeit war von den Evoluten einer ebenen Curve nur die Krümmungsmittelpunktscurve bekannt, und von den Evoluten einer Curve doppelter Krümmung kannte man gar keine oder hielt ihre Krümmungsmittelpunktscurve sogar für eine solche, bis Monge [1]) vor etwa hundert Jahren die Kenntniss dieses Gebietes bedeutend erweiterte, indem er zeigte: dass jede Curve, auch die ebene, unendlich viele Evoluten besitzt, die sämtlich doppelt gekrümmt sind bis auf eine einzige, nämlich die Krümmungsmittelpunktscurve der ebenen Curve, dass dagegen die Krümmungsmittelpunktscurve einer Raumcurve im engeren Sinne niemals zu den Evoluten gehört. Es ist interessant zu bemerken dass sich hierin selbst nachher ein namhafter Mathematiker irrte, nämlich Lagrange, und dass Jacobi [2]) es noch für nötig hielt, diesen Irrtum aufzuklären. In der Folge ist dieser Teil der analytischen Geometrie verhältnissmässig wenig bearbeitet. Neuerdings hat Herr Pirondini [3]), Molins [4]) die Krümmungsmittelpunktscurve einer näheren Betrachtung unterzogen, allein in syste-

1) Monge, sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure. Paris. 1785.

2) Jacobi, zur Theorie der Curven. Crelle's Journal, Bd. 14. 1835,

3) Pirondini, sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo de'suoi centri di curvatura. Annali di Mat., t. XVII. 1889.

4) Molins, sur quelques nouvelles propriétés du lieu centres de courbure des courbes gauches. Mém. de Toul. Sér. 8, t. X (1888) et sér. 9, t. I.

matischer Weise sind die Fundamentalgrössen dieser wichtigen Begleitcurve noch nicht entwickelt. Und doch ist dieses mit geringen Hilfsmitteln leicht möglich: man gebraucht dazu ausser Differentiationen nur die Serret-Frénet'schen Formeln und einige der 22 Relationen, welche wegen der Orthogonalität der Achsen statt haben, sodass die Lehrbücher bequem von diesen Resultaten Gebrauch machen können.

In der folgenden Abhandlung werden zunächst im ersten Paragraphen Eigenschaften der Evoluten aus ihren Gleichungen analytisch in der Weise abgeleitet, wie solches im § 2. bei der Krümmungsmittelpunktscurve geschieht; § 3. enthält mehrere Curvenclassen unter Bevorzugung der dimensionslosen Invarianten i, wo $\varrho = R \cos i$, nebst den Verhältnissen der abgewickelten Evolutfläche; im § 4. ist endlich eine specielle Raumcurve, nämlich die Schraubenlinie auf einem Kreisevolventencylinder, erörtert und dabei eine Verallgemeinerung des Puiseux'schen Satzes gegeben: wenn für eine Curve ϱ eine lineare Function von ϑ und von τ ist, so ist sie notwendig eine isogonale Trajectorie der geradlinigen Erzeugenden einer Cylinderfläche, deren Basis eine Kreisevolvente. Am Schlusse finden sich einige Umkehrungen dafür, dass beiden ebenen Curven die Krümmungsmittelpunktscurve zu den Evoluten gehört.

§ 1.

Inbetreff der Bezeichnungsweise beachte man, dass f, g, h; f', g', h', l, m, n; l', m', n' die Richtungscosinus der Tangente, der Hauptnormale, der Binormale und der rectificierenden Kante bedeuten sollen, ferner ist in üblicher Bezeichnung ds das Bogenelement der Curve, τ und ϑ der Krümmungs- und Torsionswinkel

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{d\vartheta}{d\tau}, \quad d\sigma^2 = d\vartheta^2 + d\tau^2, \quad \varrho = \frac{ds}{d\tau}, \quad r = \frac{ds}{d\vartheta} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Curvenelemente, welche sich auf eine Evolute, auf die Krümmungsmittelpunktscurve und auf die Polcurve der Urcurve beziehen, werden wir mit dem Index e, k und p versehen. Für die positive Aufeinanderfolge der begleitenden Achsen treffen wir die Festsetzung: Tangente nach vorn, Hauptnormale zur Linken, Binormale nach oben.

Für die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte einer Evolute bestehen die Gleichungen, wenn c eine willkürliche Constante bezeichnet,

$$x_e = x + \varrho \cdot f' - \varrho \cdot \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot l$$
$$y_e = y + \varrho \cdot g' - \varrho \cdot \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot m$$
$$z_e = z + \varrho \cdot h' - \varrho \cdot \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot n$$

Durch Differentiation (nach einer unabhängig Veränderlichen ergiebt sich, dass

$$dx_e = [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [f' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot l] \cdot \varrho\, d\vartheta$$
$$dy_e = [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [g' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot m] \cdot \varrho\, d\vartheta$$
$$dz_e = [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [h' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot n] \cdot \varrho\, d\vartheta$$

ferner dass

$$\begin{aligned} d^2x_e = & \left[\frac{1}{\cos^2 i}\frac{di}{d\vartheta} + \frac{1}{\cos^2(\vartheta+c)}\right] \cdot [f' - \operatorname{tg}(\vartheta+c) \cdot l] \cdot \varrho\, d\vartheta^2 \\ & + [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [-f \cdot \operatorname{cotg}\lambda + \operatorname{tg}(\vartheta + c) \\ & \qquad \cdot (f' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot l)] \cdot \varrho\, d\vartheta^2 \\ & + [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [f' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot l] \cdot \operatorname{tg} i \cdot \varrho\, d\vartheta^2 \end{aligned}$$

Durch cyklische Vertauschung der Richtungscosinus erhält man die Werte für d^2y_e und d^2z_e. In diesen Gleichungen bedeutet i den Winkel, um welchen der Radius R der Schmiegungskugel gegen die Osculationsebene geneigt ist, sodass also

$$\varrho = R \cos i \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} i = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\vartheta}$$

Mit Hilfe obiger Ausdrücke erhält man nun

$$A_e \equiv \begin{vmatrix} dy_e & dz_e \\ d^2y_e & d^2z_e \end{vmatrix} = [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)]^2 \cdot [l + \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot f'] \cdot \varrho^2 \cdot \operatorname{cotg}\lambda\, d\vartheta^3$$

$$B_e \equiv \begin{vmatrix} dz_e & dx_e \\ d^2z_e & d^2x_e \end{vmatrix} = [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)]^2 \cdot [m + \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot g'] \cdot \varrho^2 \cdot \operatorname{cotg}\lambda\, d\vartheta^3$$

$$C_e \equiv \begin{vmatrix} dx_e & dy_e \\ d^2x_e & d^2y_e \end{vmatrix} = [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)]^2 \cdot [n + \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot h'] \cdot \varrho^2 \cdot \operatorname{cotg}\lambda\, d\vartheta^3$$

und

$$D_e \equiv \pm \sqrt{A_e^2 + B_e^2 + C_e^2} = \pm [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)]^2 \cdot \frac{\varrho^2 \operatorname{cotg}\lambda\, d\vartheta^3}{\cos(\vartheta + c)}$$

Nunmehr ist man im Stande, mehrere Elemente einer Evolute in den auf die Urcurve sich beziehenden Grössen auszudrücken.

$$ds_e \equiv \pm \sqrt{dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2} = \pm [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot \frac{\varrho\, d\vartheta}{\cos(\vartheta + c)}$$

Infolge der festgesetzten positiven Aufeinanderfolge der positiven Richtungen der begleitenden Achsen ist bei ds_e und D_e das positive Vorzeichen zu wählen. Für die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale einer Evolute ergeben sich dann die Werte

$$f_e \equiv \frac{dx_e}{ds_e} = \cos(\vartheta + c) \,.\, f' - \sin(\vartheta + c) \,.\, l \quad \text{etc.}$$

$$f_e' \equiv \frac{B_e \,.\, ds_e - C_e \,.\, dy_e}{D_c \,.\, ds_e} = -f \quad \text{etc. und}$$

$$l_o \equiv \frac{A_e}{D_e} = \cos(\vartheta + c) \,.\, l + \sin(\vartheta + c) \,.\, f' \quad \text{etc.}$$

Die begleitenden Achsen einer Evolute haben daher die in Fig. 1. angegebenen Richtungen. Die Tangente T_e und die Binormale B_e liegen in der Normalebene der ursprünglichen Curve und bilden mit der Krümmungsachse den Winkel $\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta + c\right)$ resp. $(\vartheta + c)$; die Hauptnormale der Evolute ist entgegengesetzt gleich gerichtet der Tangente der Evolvente, und da die Normalebene der Evolvente Tangentialebene der Evolutfläche, so ist jede Evolute eine geodätische Linie auf der Fläche der Krümmungsachsen.

$$d\tau_e \equiv \frac{D_e}{ds_e^2} = \cos(\vartheta + c) \,.\, d\tau$$

$$d\vartheta_e \equiv \pm \sqrt{dl_e^2 + dm_e^2 + dn_e^2} = - \sin(\vartheta + c) \,.\, d\tau$$

$$d\sigma_e = d\tau, \quad \lambda_e = -(\vartheta + c)$$

$$l_e' \equiv \frac{d\vartheta_e}{d\sigma_e} \,.\, f_e + \frac{d\tau_e}{d\sigma_e} \,.\, l_e = l \quad \text{etc.}$$

In Worten: die Krümmungsachsen der Evolvente sind die rectificirenden Geraden einer Evolute, oder die Evolutfläche der Evolvente ist die rectificirende Cylinderfläche der Evoluten.

$$\varrho_e \equiv \frac{ds_e}{d\tau_e} = [\operatorname{tg} i + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot \frac{\varrho \operatorname{tg} \lambda}{\cos^2(\vartheta + c)}$$

Dieser Ausdruck gestattet eine geometrische Construction des Krümmungsmittelpunktes der Evoluten. Wir unterlassen es, für

$$r_e \equiv \frac{ds_e}{d\vartheta_e}, \quad R_e \equiv \sqrt{\varrho_e^2 + \left(\frac{d\varrho_e}{d\vartheta_e}\right)^2}$$

u. s. w. die Werte anzugeben, da sie von keiner besonderen Einfachheit sind.

Soll eine der ∞^1 vielen Evoluten eine allgemeine Schraubenlinie sein, so muss für ein bestimmtes c nach dem Bertrand'schen Satze

$$\frac{d\vartheta_e}{d\tau_e} = \text{Const.}$$

sein, folglich

$$\operatorname{tg}(\vartheta + c) = -\text{Const.} \quad \text{also} \quad \vartheta = \text{const.}$$

d. h. die Evolvente ist eben. Dann sind die sämtlichen Evoluten Schraubenlinien. Ist also eine der unendlich vielen Evoluten eine Schraubenlinie, so sind es auch die übrigen, und die Evolvente ist eine ebene Curve.

In umgekehrter Weise folgt aus den obigen Beziehungen, dass

$$d\tau = d\sigma_e, \quad d\vartheta = -d\lambda_e \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} f &= -f_e' \quad \text{etc.} \\ f' &= \cos\lambda_e \cdot f_e - \sin\lambda_e \cdot l_e \quad \text{etc.} \\ l &= \sin\lambda_e \cdot f_e + \cos\lambda_e \cdot l_e \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Gleichungen, welche für die Umkehraufgabe in Betracht kommen, zu gegebener Evolute die zugehörigen Evolventen zu finden. Es sind dies orthogonale Trajectorien der Tangenten der Evolute und Krümmungslinien auf ihrer Tangentenfläche. Man erinnere sich dabei der besonderen Verhältnisse einer ebenen Evolute, wo ihre Tangentenfläche die Ebene ist, in der die Curve sich befindet.

§ 2.

Die Gleichungen der Polcurve

$$x_p = x + \varrho \cdot f' + \frac{d\varrho}{d\vartheta} \cdot l \quad \text{etc.}$$

in ebensolcher Weise zu behandeln, bietet keinerlei Schwierigkeit und führt natürlich zu den bekannten Eigenschaften dieser Curve. Aus den Gleichungen der Krümmungsmittelpunktscurve

$$\begin{aligned} x_k &= x + \varrho \cdot f' \\ y_k &= y + \varrho \cdot g' \\ z_k &= z + \varrho \cdot h' \end{aligned}$$

lässt sich ableiten, dass

$$dx_k = \left(\varrho \cdot l + \frac{d\varrho}{d\vartheta} \cdot f'\right) \cdot d\vartheta \quad \text{etc.}$$

$$d^2x_k = \left[-\frac{d\varrho}{d\vartheta}\,.\,\text{cotg}\,\lambda\,.\,f + \left(\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} - \varrho\right).\,f' + 2\,\frac{d\varrho}{d\vartheta}\,.\,l\right] d\vartheta^2 \quad \text{etc.}$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$A_k = \left\{\left[\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 - \varrho\,\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2}\right].\,f - \varrho\,\frac{d\varrho}{d\vartheta}\,\text{cotg}\,\lambda\,.\,f' + \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 \text{cotg}\,\lambda\,.\,l\right\} d\vartheta^3$$

und durch Einführung des bereits erklärten Winkels i, dass

$$A_k = R^2\,.\left[\left(1 - \frac{di}{d\vartheta}\right).\,f - \sin i \cos i\,\text{cotg}\,\lambda\,.\,f' + \sin^2 i\,\text{cotg}\,\lambda\,.\,l\right] d\vartheta^3 \quad \text{etc.}$$

$$D_k = \pm\,R^2\,.\sqrt{\left(1 - \frac{di}{d\vartheta}\right)^2 + \sin^2 i\,\text{cotg}^2\lambda}\;.\,d\vartheta^3$$

Für das Bogenelement ds_k der Krümmungsmittelpunktscurve berechnet man zunächst

$$ds_k = \pm\,R d\vartheta$$

Im Specialfalle der Curven constanter erster Krümmung oder $i = 0$ fällt die Krümmungsmittelpunktscurve mit der Polcurve zusammen, die Tangente der Polcurve hat aber die Richtung der positiven Binormale der Urcurve, aus dem Grunde ist bei ds_k das positive Vorzeichen zu wählen. Es ist demnach

$$ds_k = R d\vartheta \quad \text{und}$$

$$f_k = \sin i\,.\,f' + \cos i\,.\,l \quad \text{etc.}$$

Die Tangente der Krümmungsmittelpunktscurve liegt, was selbstverständlich ist, in der Normalebene der ursprünglichen Curve und bildet mit der Krümmungsachse den Winkel i und mit der Hauptnormale den Winkel

$$i' = \frac{\pi}{2} - i$$

Daraus folgt die bekannte Construction dieser Tangente, welche mit der Steiner'schen Construction der Tangente einer Fusspunktencurve im Zusammenhange steht: construirt man in der Normalebene der Urcurve um M als Mittelpunkt mit dem Halbmesser (s. Fig. 2.)

$$\overline{MP} = \overline{MP_k} = \overline{MP_p}$$

den Kreis, so ist die Tangente im Punkte P_k an den Kreis auch Tangente an die Krümmungsmittelpunktscurve. Aehnlich, wie oben, kommen wir bei der Entscheidung über das Vorzeichen von D_k zu dem Schlusse, dass der positive Wert zu nehmen ist; dann erhält man

$$l_k = \frac{1-\frac{di}{d\vartheta}}{\sqrt{\left(1-\frac{di}{d\vartheta}\right)^2+\sin^2 i \operatorname{cotg}^2\lambda}} \cdot f$$
$$+ \frac{\sin i \cdot \operatorname{cotg}\lambda}{\sqrt{\left(1-\frac{di}{d\vartheta}\right)^2+\sin^2 i \operatorname{cotg}^2\lambda}} (-\cos i \cdot f' + \sin i \cdot l) \quad \text{etc.}$$

Diese Gleichungen gestatten eine einfache geometrische Interpretation; denn bezeichnen f'_1, g_1, h_1 die Richtungscosinus der Geraden $\overline{P_k M}$, so ist

$$f_1 = -\cos i \cdot f' + \sin i \cdot l \quad \text{etc.}$$

und führt man nun noch einen Hilfswinkel θ ein, so dass

$$\cos\theta = \frac{1-\frac{di}{d\vartheta}}{\sqrt{\left(1-\frac{di}{d\vartheta}\right)^2+\sin^2 i \operatorname{cotg}^2\lambda}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sin i \cdot \operatorname{cotg}\lambda}{\sqrt{\left(1-\frac{di}{d\vartheta}\right)^2+\sin^2 i \operatorname{cotg}^2\lambda}}$$

und mithin

$$\operatorname{cotg}\theta = \left(\frac{d\vartheta}{d\tau} - \frac{di}{d\tau}\right)\frac{1}{\sin i}$$

so gewinnt man die leicht zu deutenden Beziehungen

$$l_k = \cos\theta \cdot f + \sin\theta \cdot f_1 \quad \text{etc.}$$

und für die Richtungscosinus der Hauptnormale berechnen sich die Werte

$$f_k' = -\sin\theta \cdot f + \cos\theta \cdot f_1 \quad \text{etc.}$$

In Worten (s. Fig. 2): die Normalebene der Krümmungsmittelpunktscurve geht durch $P_k M$, und es bilden ihre Haupt- und Binormale mit dieser Geraden die Winkel

$$\theta \text{ und } \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

wo θ durch die Gleichung bestimmt ist

$$\cotg \theta = \left(\frac{d\vartheta}{d\tau} - \frac{di}{d\tau}\right) \cdot \frac{1}{\sin i}$$

Hierdurch ist das begleitende Achsenkreuz der Krümmungsmittelpunktscurve festgelegt.

Zieht man vom Mittelpunkte der Gauss'schen Einheitskugel parallele Geraden zu der Tangente, Haupt- und Binormale sowol der ursprünglichen Curve, wie ihrer Krümmungsmittelpunktscurve bis zur Kugeloberfläche, und verbindet man die entstehenden Punkte auf der Einheitskugel durch Bogen grösster Kreise, so entstehen sphärische Dreiecke, welche die Abhängigkeit anderer, die gegenseitige Lage der beweglichen Achsenkreuze bestimmenden Winkel von den eingeführten Hilfswinkeln i und θ erkennen und berechnen lassen. Bezeichnet man mit F_k, G_k, H_k; F_k', G_k', H_k'; L_k, M_k, N_k die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale der Krümmungsmittelpunktscurve in Bezug auf die beweglichen, begleitenden Achsen der ursprünglichen Curve, so ergiebt sich, dass

$$F_k = 0, \quad G_k = \sin i, \quad H_k = \cos i$$
$$F_k' = -\sin \theta, \quad G_k' = -\cos i \cos \theta, \quad H_k' = \sin i \cos \theta$$
$$L_k = \cos \theta, \quad M_k = -\cos i \sin \theta, \quad N_k = \sin i \sin \theta$$

Gleichungen, welche auch durch die Beziehungen

$$f_k = F_k \cdot f + G_k \cdot f' + H_k \cdot l \quad \text{etc.}$$
$$f_k' = F_k' \cdot f + G_k' \cdot f' + H_k' \cdot l \quad \text{etc.}$$
$$l_k = L_k \cdot f + M_k \cdot f' + N_k \cdot l \quad \text{etc}$$

hätten abgeleitet werden können.

Es erübrigt noch, $d\tau_k$, $d\vartheta_k$ u. s. w. in den auf die Urcurve sich beziehenden Grössen auszudrücken. Es ist

$$d\tau_k = \frac{\sin i}{\sin \theta} \cdot d\tau$$

Man kann dies Resultat in die Worte kleiden (Molins): eine Raumcurve und ihre Krümmungsmittelpunktscurve stehen in dem Zusammenhange, dass die Cosinus der beiden Winkel, welche die Tangente der einen mit der Osculationsebene der andern bildet, sich verhalten wie ihre Contingenzwinkel (s. Fig. 2).

Es ist allgemein

$$d\vartheta_k \equiv \pm \sqrt{(dl_k)^2 + (dm_k)^2 + (dn_k)^2}$$
$$\equiv \frac{A_k \,.\, d^3x_k + B_k \,.\, d^3y_k + C_k \,.\, d^3z_k}{D_k^2} \,.\, ds_k$$

Bei der Berechnung nach dem letzten Ausdrucke stellen sich recht umständliche Rechnungen ein, einfacher gestaltet sich dieselbe mit Hilfe des ersten; man erhält zunächst

$$dl_k = (-\cos\theta \,.\, f_1 + \sin\theta \,.\, f) \,.\, \left(\cos i \operatorname{cotg} \lambda - \frac{d\theta}{d\vartheta}\right) d\vartheta \quad \text{etc.}$$

folglich

$$d\vartheta_k = \left(\cos i \operatorname{cotg} \lambda - \frac{d\theta}{d\vartheta}\right) d\vartheta$$

oder

$$d\vartheta_k = \left(\cos i - \frac{d\theta}{d\tau}\right) d\tau$$

Diese Gleichung zeigt uns, dass es doppelt gekrümmte Curven mit ebener Krümmungsmittelpunktscurve geben wird, nämlich wenn für dieselben

$$\cos i - \frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

Ferner ergiebt die Ausrechnung, dass

$$\operatorname{tg} \lambda_k = \frac{\sin\theta}{\sin i}\left(\cos i - \frac{d\theta}{d\tau}\right)$$

$$\varrho_k = \frac{R \operatorname{tg} \lambda \sin\theta}{\sin i}$$

und

$$r_k = \frac{R}{\cos i \operatorname{cotg} \lambda - \frac{d\theta}{d\vartheta}}$$

Sucht man umgekehrt, die Grössen der Urcurve in denen der Krümmungsmittelpunktscurve auszudrücken, so folgt aus den obigen Formeln, dass

$$f = \cos\theta \,.\, l_k - \sin\theta \,.\, f_k' \quad \text{etc.}$$
$$f' = \sin i \,.\, f_k - \cos i\,(\cos\theta \,.\, f_k' + \sin\theta \,.\, l_k) \quad \text{etc.}$$
$$l = \cos i \,.\, f_k + \sin i\,(\cos\theta \,.\, f_k' + \sin\theta \,.\, l_k) \quad \text{etc.}$$

und dass ferner

$$d\vartheta = di + \cos\theta \,.\, d\tau_k$$

$$d\tau = \frac{\sin\theta}{\sin i} \cdot d\tau_k$$

$$d\theta = \operatorname{cotg} i \,.\, \sin\theta \,.\, d\tau_k - d\vartheta_k$$

oder in Grössen, die jedoch mit Dimensionen behaftet

$$\frac{d\theta}{ds_k} = \frac{\operatorname{cotg} i \,.\, \sin\theta}{\varrho_k} - \frac{1}{r_k}$$

eine Differentialgleichung, welche zur Bestimmung des Winkels θ benutzt werden muss. Man beachte, dass auf den rechten Seiten sich ausserdem noch der Winkel i befindet, der zunächst in Grössen der Urcurve definiert ist. Die vorstehenden Gleichungen lassen die grossen Schwierigkeiten des Umkehrproblems erkennen, zu gegebener Krümmungsmittelpunktscurve die ursprüngliche Curve zu finden.

§ 3.

Der Inclinationswinkel

$$i = \arccos\frac{\varrho}{R}$$

ist besonders geeignet, Curvenclassen zu charakterisiren. Es möge zunächst der Specialfall

$$i = \text{const.}$$

betrachtet werden. Aus unsern Formeln folgt, dass die Krümmungsmittelpunktscurve eine isogonale Trajectorie der gradlinigen Erzeugenden der Evolutfläche ist. Welche besondern Verhältnisse treten bei der Abwicklung der Evolutfläche auf? [1]) Die Pol- und Krümmungsmittelpunktscurve transformiren sich in logarithmische Spiralen, deren gemeinsamer Pol der Punkt P ist, auf den die Raumcurve bei der Abwicklung auf eine ihrer Normalebenen sich reducirt; denn die logarithmische Spirale hat die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre Fusspunktencurve in Bezug auf den Ursprung als Pol wiederum eine logarithmische Spirale ist, welche die Tangenten der ersten unter constantem Winkel schneidet. Die abgewickelte Evolutfläche besteht allemal aus zwei übereinander liegenden Blättern, welche längs der transformirten Polcurve mit einander zusammenhangen.

---

1) Steiner, über einige allgemeine Eigenschaften der Curven von doppelter Krümmung. Ges. Werke, Band II. pag. 161—165.

Die Grenzfälle

$$i = 0 \quad \text{und} \quad i = \frac{\pi}{2}$$

verlangen eine besondere Behandlung. Der Specialfall

$$i = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$R = \infty \quad \text{und} \quad d\vartheta = 0$$

charakterisirt die ebenen Curven. Die Evolutfläche ist eine Cylinderfläche mit der ebenen Krümmungsmittelpunktscurve als Basis. Weil allgemein die Tangentenflächen zweier Evoluten sich längs der Evolvente unter constantem Winkel schneiden, da (cf. Fig. 1.)

$$(\vartheta + c_1) - (\vartheta + c) = \text{const.}$$

so folgt in umgekehrter Weise, dass die Tangenten allgemeiner Schraubenlinien die Ebene der Basis in einer Evolvente der Basis unter ihrem Steigungswinkel durchsetzen. Die bei der Abwicklung der Evolutfläche doppelt gekrümmter Curven geltenden Verhältnisse haben in diesem Falle im eigentlichen Sinne nicht mehr statt.

Der zweite Grenzfall

$$i = 0$$

kennzeichnet die Curven constanter erster Krümmung oder

$$\varrho = C$$

wo dann auch

$$R = C$$

Pol- und Krümmungsmittelpunktscurve sind dieselben. Bei der Abwicklung der Evolutfläche gehen diese zusammenfallenden Begleitcurven in die Peripherie eines Kreises mit dem Radius C über, dessen Mittelpunkt der Punkt P ist, auf den die Urcurve sich reducirt. Welche Vereinfachungen erfahren unsere Gleichungen?

$$f_k = l \quad \text{etc.}$$

$$f_k' = -f' \quad \text{etc.}$$

$$l_k = f \quad \text{etc.}$$

$$d\tau_k = d\vartheta$$

$$d\vartheta_k = d\tau$$

Auch die übrigen Formeln beweisen, dass alles in guter Uebereinstimmung ist. Die Curven constanter erster Krümmung haben die ausgezeichnete Eigenschaft, dass volle Reciprocität zwischen Urcurve und Polcurve besteht: sucht man die Polcurve der Polcurve, so gelangt man zur ursprünglichen Curve zurück.

Nicht minder interessant, aber doch weniger beachtet, scheinen uns die allgemeineren Curven zu sein, für welche nur

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = C$$

oder ϱ eine lineare Function von ϑ ist. Für den Inclinationswinkel i folgt hieraus die Bedingung

$$\operatorname{cotg} i = \vartheta + c$$

oder, da es auf eine additive oder subtractive Constante nicht ankommt,

$$\operatorname{cotg} i = \vartheta$$

Die Einsetzung dieses Wertes in unsere Formeln liefert einige Vereinfachungen. In geometrischer Hinsicht ist klar, dass sämtliche correspondirende Punkte der Pol- und Krümmungsmittelpunktscurve den constanten Abstand C von einander besitzen. In was für Curven biegen sich dieselben bei der Abwicklung der Evolutfläche um? Die Polcurve wird eine Kreisevolvente, deren Evolutkreis mit dem Mittelpunkt P den Halbmesser C hat, denn die Fusspunktencurve einer Kreisevolvente in Bezug auf den Mittelpunkt des Evolutkreises als Pol besitzt, wie leicht einzusehen, die merkwürdige Eigenschaft, dass die Entfernung entsprechender Punkte gleich der constanten Länge des Radius des Evolutkreises ist. Die Curven constanter erster Krümmung sind ein Specialfall dieser, die Constante C hat dann den Wert null.

Der Bedingung $R =$ Const. kann durch die beiden

$$\varrho = \text{const.} \quad \text{und}$$

$$\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = 0$$

genügt werden. Mit der letzten Bedingungsgleichung ist

$$i = -(\vartheta + c)$$

oder

$$i = -\vartheta$$

äquivalent. Bei diesen, den sphärischen Curven, degenerirt die ganze Polcurve in einen Punkt, nämlich den Mittelpunkt der Kugel, auf welcher die Curve sich befindet. Die Schmiegungskugel geht durch die sämtlichen Punkte der Curve, grade so wie bei der ebenen Curve die Osculationsebene alle Curvenpunkte enthält. Die Evolutfläche ist ein Kegel. Bei seiner Ausbreitung, z. B. in eine Normal-

ebene der sphärischen Curve, geht die Krümmungsmittelpunktscurve in die Peripherie eines Kreises über, dessen Durchmesser

$$PP_p = R = \text{Const.}$$

Auf eine ähnliche Bedingungsgleichung führt die Untersuchung der Frage (cf. eine irrtümliche Behauptung bei Steiner, l. c. pag. 161), für welche Curven ist die Krümmungsmittelpunktscurve eine geodätische Linie der Evolutfläche? Dann muss sich dieselbe bei der Abwicklung der Evolutfläche in eine Gerade transformiren, woraus man leicht ableiten wird, dass die transformirte Polcurve eine Parabel ist, für welche die bewusste Gerade Scheiteltangente und deren Brennpunkt der oft erwähnte Punkt P ist. Aus diesen Verhältnissen lässt sich dann eine Relation zwischen ϱ und R herleiten, nämlich

$$\varrho^2 = R_0 \cdot R$$

wo R_0 eine Constante. Dieser Bedingungsgleichung genügen aber auch noch Curven, welche die verlangte Eigenschaft nicht besitzen, nämlich die Curven constanter erster Krümmung.

Einen einfacheren und besseren Weg zur Lösung der Frage liefern unsere Formeln im vorhergehenden Paragraphen, da wir auf diese Weise mühelos die notwendige und hinreichende Bedingung gewinnen. Soll die Krümmungsmittelpunktscurve eine Geodätische der Evolutfläche sein, so muss in jedem Curvenpunkte ihre Hauptnormale mit der Flächennormalen zusammenfallen, d. h. es muss beständig der Winkel

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

sein; folglich erhalten wir als Bedingungsgleichung

$$i = \vartheta + c$$

Selbstverständlich haben alle ebenen Curven die geforderte Eigenschaft. Unsere Formeln liefern diese nicht ohne weiteres mit, weil dieselben unter der stillschweigenden Voraussetzung $d\vartheta \gtrless 0$ abgeleitet sind; man kann dieselben in die Bedingungsgleichung

$$i = \vartheta + c$$

mit einschliessen, wenn

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - c$$

genommen wird.

Wir unterlassen es, weitere Anwendungen obiger Formeln zu geben.

§ 4.

Die Kreisevolvente und ihre Parallelcurven kann man durch Gleichungen darstellen

$$x = a \cdot \cos u + (au + c) \sin u$$
$$y = a \cdot \sin u - (au + c) \cos u$$

wo a der Radius des Evolutkreises und c eine willkürliche Constante ist. Wickelt man ein ebenes, rechtwinkeliges Dreieck auf eine Cylinderfläche mit einer Kreisevolvente als Basis auf in der Art, dass die eine Kathete mit der Basis zusammenfällt, während die andere Kathete die z-Coordinate wird, so biegt sich die Hypotenuse in eine Schraubenlinie um, welche die Kreiscylinder-Schraubenlinie als Specialfall enthält ($a = 0$). Für die rechtwinkeligen Coordinaten dieser verallgemeinerten Schraubenlinie ergeben sich die Gleichungen

$$x = a \cos u + (au + c) \cdot \sin u$$
$$y = a \sin u - (au + c) \cdot \cos u$$
$$z = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \int_0^u \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du = \left(\frac{a}{2} u + c\right) u \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$$

wenn die Aufwicklung des Steigungsdreieckes im Punkte

$$(x = a, \quad y = -c)$$

beginnt, und der Steigungswinkel ε ist.

Es ist keine wesentliche Einschränkung, wenn man anstatt der äquidistanten Kreisevolventen diese selbst wählt, denn man braucht dann die Abwicklung des Evolutkreises nur in einem andern Punkte beginnen zu lassen; es soll deshalb $c = 0$ gesetzt werden, wodurch die vorstehenden Gleichungen die einfache Gestalt annehmen

$$x = a(\cos u + u \sin u)$$
$$y = a(\sin u - u \cos u),$$
$$z = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varepsilon \cdot u^2$$

Mithin ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{dx}{du} = au\cos u \quad \frac{d^2x}{du^2} = a(\cos u - u\sin u) \quad \frac{d^3x}{du^3} = -a(2\sin u + u\cos u)$$

$$\frac{dy}{du} = au\sin u \quad \frac{d^2y}{du^2} = a(\sin u + u\cos u) \quad \frac{d^3y}{du^3} = a(2\cos u - u\sin u)$$

$$\frac{dz}{du} = a\,\mathrm{tg}\,\varepsilon . u \quad \frac{d^2z}{du^2} = a\,\mathrm{tg}\,\varepsilon \quad \frac{d^3z}{du^3} = 0$$

Die für Raumcurven wichtigen Grössen A, B, C, D haben daher in dem vorliegenden Falle die Werte

$$A = - a^2 \,\mathrm{tg}\,\varepsilon \,.\, u^2 \,.\, \cos u$$
$$B = - a^2 \,\mathrm{tg}\,\varepsilon \,.\, u^2 \,.\, \sin u$$
$$C = a^2 \,.\, u^2 \quad \text{und}$$
$$D = \frac{a^2}{\cos\varepsilon} \,.\, u^2$$

Hieraus berechnen sich die Elemente der Schraubenlinie, wie folgt:

$$ds = \frac{a}{\cos\varepsilon} \,.\, u\, du$$

$$f = \cos\varepsilon \,.\, \cos u$$
$$g = \cos\varepsilon \,.\, \sin u$$
$$h = \sin\varepsilon$$

$$f' = -\sin u$$
$$g' = \cos u$$
$$h' = 0$$

$$l = -\sin\varepsilon \,.\, \cos u$$
$$m = -\sin\varepsilon \,.\, \sin u$$
$$n = \cos\varepsilon$$

Die Gleichungen besagen unter anderem, dass die Hauptnormalen parallel den Normalen im entsprechendem Punkte der Basis sind, sie sind daher parallel der Basisebene und berühren den graden Kreiscylinder über dem Evolutkreise. Die Fläche der Hauptnormalen lässt sich durch die folgenden Gleichungen darstellen

$$\xi = a\cos u + (au + v)\sin u$$
$$\eta = a\sin u - (au + v)\cos u$$
$$\zeta = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\varepsilon \,.\, u^2$$

Die analytische Behandlung dieser Gleichungen lässt vorzügliche Eigenschaften dieser verallgemeinerten Schraubenfläche erkennen; es hat den Anschein, dass sie und eine ihr nahe verwandte gradlinige Fläche die gewöhnliche Schraubenfläche in den technischen Fällen mit Vorteil vertreten werden, wenn die Schraubenmutter ein ausweichendes Mittel ist.

Die weitere Ausrechnung der Curvenelemente ergiebt, dass

$$d\tau = \cos\varepsilon\,.\,du,\quad d\vartheta = \sin\varepsilon\,.\,du;\quad \varrho = \frac{a}{\cos^2\varepsilon}\,.\,u,\quad r = \frac{a}{\sin\varepsilon\,\cos\varepsilon}\,.\,u$$

u. s. w.

Wie beschaffen ist die Evolutfläche? Für ihre Rückkehrkante oder für die Polcurve bestehen allgemein die Gleichungen

$$x_p = x + \varrho\,.\,f' + \frac{d\varrho}{d\vartheta}\,.\,l \quad \text{etc.}$$

mithin hat man in dem vorliegenden Falle:

$$-x_p = a\,\mathrm{tg}^2\varepsilon(\cos u + u\sin u)$$
$$-y_p = a\,\mathrm{tg}^2\varepsilon(\sin u - u\cos u)$$
$$z_p = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}^2\varepsilon\,.\,\mathrm{cotg}\varepsilon\,.\,u^2 + \frac{a}{\sin\varepsilon\,\cos\varepsilon}$$

Die Polcurve ist ebenfalls eine Schraubenlinie eines Kreisevolventencylinders; der Radius des Evolutkreises hat den Wert $(a\,\mathrm{tg}^2\varepsilon)$ und der Steigungswinkel ist

$$\varepsilon' = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

Der Anfangspunkt liegt diametral gegenüber und um $\frac{a}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}$ oberhalb der xy-Ebene. Die Polcurve der Polcurve befindet sich mit der Urcurve auf demselben Kreisevolventencylinder und besitzt mit ihr den gleichen Steigungswinkel: sie ist mit der ursprünglichen Curve in entsprechenden Stücken congruent. Die correspondirenden Punkte haben von einander den constanten Abstand $\frac{a}{\sin\varepsilon\cos^3\varepsilon}$. Sucht man die $n$te Polcurve der Urcurve, so liegt diese mit ihr auf demselben Kreisevolventencylinder oder auf demjenigen der ersten Polcurve, je nachdem n gerade oder ungerade. Erwähnenswert ist noch der specielle Fall

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4}$$

dann sind alle diese Schraubenlinien in entsprechenden Stücken einander congruent, während sie sich sonst in zwei Gruppen teilen. Die Krümmungsmittelpunktscurve der Urcurve hat von der Polcurve in entsprechenden Punkten den constanten Abstand

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{a}{\sin\varepsilon\cos^2\varepsilon}$$

Für die betrachtete Schraubenlinie ist sowol $\frac{d\varrho}{d\vartheta}$, wie auch $\frac{d\varrho}{d\tau}$ constant. Es lässt sich zeigen, dass diese Eigenschaft den Schraubenlinien eines Kreisevolventencylinders allein zukommt. Aus den beiden Bedingungen

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = c_1 \quad \text{und}$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = c_2$$

folgt, von Specialfällen abgesehen, dass

$$\operatorname{tg}\lambda \equiv \frac{d\vartheta}{d\tau} = \text{const.}$$

und daher nach dem Bertrand'schen Satze die zu bestimmenden Raumcurven jedenfalls isogonale Trajectorien der Erzeugenden einer gewissen Cylinderfläche sind. Wählen wir das Coordinatensystem so, dass die z-Achse mit der festen Richtung der rectificirenden Geraden zusammenfällt, so steht die Cylinderfläche, auf welcher die gesuchten Raumcurven liegen, senkrecht zur xy-Ebene, und es handelt sich darum, ihre Leitcurve oder Basis zu finden. In der angenommenen Bezeichnungsweise ist nun

$$\operatorname{arc}\cos h = \frac{\pi}{2} - \lambda \quad \text{und} \quad h \equiv \frac{dz}{ds} = \sin\lambda$$

Ist $y = f(x)$ die Gleichung der gesuchten Basis, so ist

$$ds \equiv \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{1}{\cos\lambda}\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \,.\, dx$$

mithin

$$f = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$$

$$g = \frac{\cos\lambda \, . \, f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}$$

$$h = \sin\lambda$$

Durch Differentiation erhält man

$$df = -\frac{\cos\lambda f'(x) f''(x)}{\{1+[f'(x)]^2\}^{3/2}} dx, \quad dg = \frac{\cos\lambda f''(x)}{\{1+[f'(x)]^2\}^{3/2}} dx, \quad dh = 0$$

folglich

$$d\tau = \cos\lambda \, . \, \frac{f''(x)}{\{1+[f'(x)]^2\}^{3/2}} \, . \, \sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

Unterscheidet man die Curvenelemente der Basis durch den Index b, so lehren die vorstehenden Gleichungen, dass zwischen den Elementen einer Schraubenlinie und der Basis ihrer Cylinderfläche allgemein folgende Beziehungen stattfinden

$$ds = \frac{ds_b}{\cos\lambda}, \quad d\tau = \frac{\cos\lambda}{\varrho_b} ds_b \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\varrho_b}{\cos^2\lambda}$$

Jede dieser drei Relationen ist eine Folge der beiden anderen. Der bequemeren Schreibweise wegen werde mit α der Winkel bezeichnet, den die Tangente der Basis mit der x-Achse einschliesst, dann ist

$$\varrho_b = \frac{ds_b}{d\alpha}$$

Durch Differentiation von

$$\varrho_b = \cos^2\lambda \, . \, \varrho$$

und unter Berücksichtigung der Voraussetzung

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = e_2$$

gewinnt man die Gleichung

$$d\varrho_b = c_2 \cos^3\lambda \, . \, d\alpha$$

und durch Integration

$$\varrho_b = c_2 \cos^3\lambda \, . \, \alpha + C_1$$

folglich ist auch

$$ds_b = (c_2 \cos^3\lambda \, . \, \alpha + C_1) d\alpha$$

und da ferner

$$dx = \cos\alpha \, . \, ds_b$$

und

$$dy = \sin\alpha \, . \, ds_b$$

so erhält man die Differentialgleichungen

$$dx = \cos\alpha\,(c_2\cos^3\lambda\,.\,\alpha + C_1)\,d\alpha$$

und

$$dy = \sin\alpha\,(c_2\cos^2\lambda\,.\,\alpha + C_1)\,d\alpha$$

Ihre Integralgleichungen lauten

$$x = (c_2\cos^3\lambda\,.\,\alpha + C_1)\sin\alpha + c_2\cos^3\lambda\,.\,\cos\alpha + C_2$$

$$y = -\,(c_2\cos^3\lambda\,.\,\alpha + C_1)\cos\alpha + c_2\cos^3\lambda\,.\,\sin\alpha + C_3$$

Betrachten wir nun anstatt der Basis ihre Evolute! Für deren rechtwinklige Coordinaten X, Y bestehen allgemein die Gleichungen

$$X = x - \varrho_b\,.\,\sin\alpha$$

$$Y = y + \varrho_b\,.\,\cos\alpha$$

Die Einsetzung der gefundenen Werte ergiebt daher, dass

$$X = c_2\cos^3\lambda\,.\,\cos\alpha + C_2$$

und

$$Y = c_2\cos^3\lambda\,.\,\sin\alpha + C_3$$

oder schliesslich

$$(X - C_2)^2 + (Y - C_3)^2 = (c_2\cos^3\lambda)^2 \quad \text{q. c. d.}$$

Ist also für eine Raumcurve ϱ eine lineare Function von ϑ und und von τ, so ist sie Schraubenlinie auf einer Cylinderfläche, deren Basis eine Kreisevolvente ist. Hierin ist der Puiseux'sche Satz als Specialfall enthalten, dass die Schraubenlinien mit constantem Krümmungsradius Kreiscylinderschraubenlinien sind.

Beim Beginne unserer Betrachtungen erwähnten wir die Tatsache: bei der ebenen Evolvente giebt es eine ebene Evolute, und diese ist zugleich Krümmungsmittelpunktscurve; hier am Schlusse mögen einige hierauf bezügliche Umkehrungen Platz finden. Ist eine der unendlich vielen Evoluten einer Curve eben, so ist auch die Evolvente eben, und diese Evolute ist auch Krümmungsmittelpunktscurve. Ist die Krümmungsmittelpunktscurve eben, so kann sie zugleich Evolute sein, aber es ist nicht notwendig, denn dieses tritt in zwei Fällen ein:

$$d\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad d\theta = \cos i\,d\tau$$

Ist die Krümmungsmittelpunktscurve eine Geodätische der Evolutfläche — die Evoluten sind geodätische Linien derselben —, so braucht sie deswegen noch nicht zu den Evoluten zu gehören; denn es giebt ausser den ebenen eine Classe von doppelt gekrümmten Curven, welche diese Eigenschaft besitzt. Ist aber schliesslich die

Krümmungsmittelpunktscurve eben und eine geodätische Linie der Evolutfläche, so gehört sie zu den Evoluten, und die ursprüngliche Curve befindet sich mit ihr in derselben Ebene; denn dann ist die Krümmungsmittelpunktscurve nach einem Satze aus der Flächentheorie eine Krümmungslinie der Evolutfläche und schneidet mithin, da sie zu den gradlinigen Erzeugenden nicht gehören kann, die Krümmungsachsen unter dem Winkel

$$i = \frac{\pi}{2}$$

eine Bedingung, welche die ebenen Curven charakterisirt.

Kiel, im Februar 1896.

III.

Strecken- und Punktrechnung, insbesondere die Rechnung mit parallelen Strecken.

(Quaternionen Hamilton's und Unverzagt's).

Von

Prof. Dr. **Fr. Graefe**, Darmstadt.

Die von Unverzagt in Programmen und in seinem Werke: „Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen, Wiesbaden 1876" begründeten Rechnungen mit parallelen Strecken, mit sog. Quotientvectoren habe ich weiter ausgebildet. Die Quotientvectorenrechnung führt zu complexen Zahlensystemen, die u. A. Weierstrass, Schwarz, Dedekind, Hölder, Schur, Study, Scheffers zu dem Gegenstande ihrer Untersuchungen gemacht haben. Die symbolische Schreibweise Hamiltons und seiner Schule (*Tq*, *Sq*, *Vq* etc.) habe ich nicht angewendet und ebenso die Namen „Tensor", „Scalar" (nach dem Wunsche Grassmanns) vermieden. Meine Unterscheidung von „Strecke" und „Vector" ergiebt sich aus dem Texte. In dem Abschnitte „Anwendung der Gesetze der Addition und Multiplication paralleler Strecken", (der unbeschadet für die folgenden Abschnitte übergangen werden kann), habe ich u. A. nachgewiesen, dass die von Unverzagt aufgestellten Coordinatensysteme specielle Fälle der bekannten Staudt-Fiedler'schen Systeme sind.

Addition und Subtraction von parallelen Strecken.

Wenn man eine gerade Linie von einem Punkte B, dem Anfangspunkte, nach dem Punkte N, dem Endpunkte, zieht, so kommt der geraden Linie BN ausser der absoluten Länge eine Richtung zu, die durch Bewegung eines Punktes in gerader Linie von B nach N bestimmt wird. Wenn man die Linie oder Strecke BS an Länge gleich der Strecke BN macht, so unterscheiden sich beide in der Richtung. Die gegenseitige Richtung ist durch den Winkel NBS bestimmt. Ist der Winkel NBS gleich zwei Rechte, so fällt BS mit BP zusammen und die Strecke BP ist die Strecke BN entgegengesetzt gerichtet. Die parallelen Strecken AM und BN der Figur 1. nennt man gleichgerichtet und die Strecken AM und NB entgegengesetzt gerichtet. Die Strecken bezeichnet man in Bezug auf Grösse und Richtung mit griechischen Buchstaben α, β, γ und deren absoluten Längen mit den entsprechenden lateinischen Buchstaben a, b, c. Der Anfangspunkt der Strecke α und der Strecke α_n ist im allgemeinen mit dem entsprechenden lateinischen Buchstaben A bezeichnet.

„Strecken sind nur dann gleich, wenn sie denselben Anfangs- „und Endpunkt besitzen, d. h. wenn sie sich decken. Zwei gleich- „lange, parallele, gleichgerichtete Strecken, die nicht denselben An- „fangspunkt haben, sind also nicht gleich, d. h die eine Strecke „kann nicht statt der andern gesetzt werden".

Unter einer Strecke $m\alpha$, wo m eine positive oder negative reelle Zahl ist, versteht man ferner eine solche, die mit α denselben Anfangspunkt, dieselbe oder entgegengesetzte Richtung von α hat und deren Grössenverhältniss zu der Länge von α durch denselben Wert von m bezeichnet wird. „Parallele, gleichgerichtete Strecken haben „die gleichen Vorzeichen ($+$, $-$), parallele entgegengesetzt gerichtete „Strecken verschiedene Vorzeichen". Die Strecke $\frac{\alpha}{a}$ heisst Einheitsstrecke.

Liegt ein Punkt C auf der geraden Linie AB, so sollen für die Abstände der Punkte die Gleichungen

$$AC + CB = AB, \quad AC = -CA \qquad \text{a.}$$

bestehen. Liegt C $\begin{Bmatrix}\text{zwischen}\\ \text{ausserhalb}\end{Bmatrix}$ A und B, so ist das Teilverhältniss $\frac{AC}{CB}$ $\begin{cases}\text{positiv,}\\ \text{negativ,}\end{cases}$ und ist das Teilverhältniss $\begin{cases}\text{positiv,}\\ \text{negativ,}\end{cases}$ so liegt C

$\begin{Bmatrix}\text{zwischen}\\ \text{ausserhalb}\end{Bmatrix}$ A und B. Nimmt man AC, CB als Repräsentanten von Strecken, so gilt die erste der Gleichungen a. nicht.

„Unter der Summe der parallelen, gleichgerichteten Strecken α „und β versteht man die zu ihnen parallele, gleichgerichtete Strecke „γ, deren absolute Länge gleich der Summe der absoluten Längen „von α und β ist und deren Anfangspunkt C den Abstand AB im „umgekehrten Verhältniss der Längen von α und β teilt".

Es ist somit

$$\alpha+\beta=\gamma,\quad a+b=c,\quad \frac{AC}{CB}=\frac{b}{a} \qquad 1.$$

Denkt man sich den Punkt A mit der Masse a und den Punkt B mit der Masse b behaftet, so ist der mit der Masse $a+b$ behaftete Punkt C der Schwerpunkt der beiden Punkte A und B. Den Punkt $A(B)$ nennt man den Schwerpunkt der im Punkte C gelegenen Masse $(a+b)$ und der im Punkte $B(A)$ gelegenen Masse $-b(-a)$. Man kann also leicht den Schwerpunkt von positiven und negativen Massen bestimmen.

Die Verknüpfung $\alpha+\beta$ genügt den beiden Gesetzen der Addition, dem commutativen Gesetze

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad 2.$$

und dem associativen Gesetze

$$\alpha+(\beta+\delta)=(\alpha+\beta)+\delta=\alpha+\beta+\delta \qquad 3.$$

wenn δ eine Strecke bezeichnet, die den Strecken α, β gleichgerichtet parallel ist. Die Formel 2. folgt aus der Erklärung der Verknüpfung und die Formel 3 aus dem Satze, dass drei Punkte nur einen Schwerpunkt haben.

Was die Differenz der beiden parallelen, gleichgerichteten Strecken γ, β $(c>b)$ betrifft, so muss ihrer Definition nach sein

$$(\gamma-\beta)+\beta=\gamma$$

also

$$\left.\begin{matrix}(\gamma-\beta)+\beta=\gamma\\ \gamma-\beta=\alpha,\quad c-b=a,\quad AC:CB=b:c-b\end{matrix}\right\} \qquad 4.$$

Diese Gleichungen sollen für jeden Wert von b und c gelten und die Definitionsgleichungen der Summe der beiden Strecken γ, $-\beta$ sein. Man hat also die Erklärung: „die Summe von „zwei parallelen Strecken $m\alpha$ und $n\beta$, wo m, n reelle positive oder „negative Zahlen sind, und $ma+nb$ von null verschieden ist, ist eine

„zu ihnen parallele Strecke von der absoluten Länge $ma+nb$, die „mit der grösseren der beiden Strecken $m\alpha$ und $n\beta$ gleichgerichtet „ist, und deren Anfangspunkt C auf der geraden Linie AB so ge- „legen ist, dass

$$AC : CB = nb : ma$$

„oder der Schwerpunkt aus den beiden Anfangspunkten der Sum- „mandenstrecken ist, wenn man diese Punkte A, B mit den Massen „ma, nb sich behaftet denkt. Diese Verknüpfung genügt dem com- „mutativen und associativen Gesetze".

Leicht ersichtlich ist die Identität dieser Streckensummation mit der Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Wenn in den Gl. 4. $c = b$ ist, so ist $a = 0$ und α ist eine im Unendlichen liegende Strecke von der Länge null. Aus der ersten Gleichung 4. folgt, dass die Hinzufügung der Differenz $\gamma - \beta$ zu β die Strecke β nach γ parallel verschiebt, wobei der Punkt B die Strecke BC beschreibt.

Man kann γ, $-\beta$, $(b = c)$ ein S t r e c k e n p a a r nennen.

Aber auch durch Addition von $\gamma - \beta$ zu einer Strecke σ, die parallel, gleichgerichtet und gleich lang der Strecke γ ist, wird die Strecke σ parallel verschoben, wobei der Punkt S eine Strecke zurücklegt, die parallel, g l e i c h g e r i c h t e t und gleich lang der Strecke BC ist und durch Addition von $\gamma - \beta$ zu einer Strecke $-\sigma$ erhält man eine Parallelverschiebung der Strecke $-\sigma$, bei der der Punkt S eine Strecke beschreibt, die parallel, e n t g e g e n g e s e t z t g e r i c h t e t und gleich lang der Strecke BC ist. Da das associative Gesetz besteht, so ist

$$\sigma + (\gamma - \beta) = (\sigma + \gamma) - \beta$$
$$-\sigma + (\gamma - \beta) = \gamma - (\beta + \sigma) = -[(\beta + \sigma) - \gamma]$$
$$s = b = c$$

Es ist in der Figur 2.

$$\gamma = UC', \quad \beta = BB', \quad \sigma = SS'$$

Der Punkt D ist der Mittelpunkt von CS und BF, der Punkt E ist der Mittelpunkt von BS und CF''; die Strecken BC, SF, $F''S$ sind also parallel, gleichgerichtet und gleich lang. Es ist leicht nachzuweisen, dass ist

$$(\sigma + \gamma) - \beta = DD' - BB' = FF' \quad \gamma - (\beta + \sigma) = CC' - EE' = F_1 F_1'$$

d. h. $\gamma - \beta$ ist ein Operator, der eine Verschiebung der Strecke SS nach FF' und der Strecke SS_1' nach $F''F_1'$ bewirkt.

Folgende Sätze lassen sich leicht beweisen:

1. Wenn C ein beliebiger Punkt der geraden Linie AB ist un α, β, γ parallele Strecken mit den Anfangspunkten A, B, C, s lassen immer zwei Zahlen m und n, die nicht beide null sind, s bestimmen, dass

$$\gamma = m\alpha + n\beta, \quad c = ma + nb$$

ist. Es ist

$$m\alpha + n\beta = r\alpha + s\beta, \quad \text{wenn} \quad m = r, \quad n = s \quad \text{ist}$$ 5

2. Sind A, B, C drei nicht in einer geraden Linie liegen Anfangspunkte von drei parallelen Strecken α, β, γ und ist D e Punkt der Ebene ABC und Anfangspunkt einer den Strecken α, , γ parallelen Strecke δ, so kann man drei Zahlen m, n, p die nic sämtlich null sind, so bestimmen, dass

$$\delta = m\alpha + n\beta + p\gamma, \quad d = ma + nb + pc$$

ist. Es ist

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = r\alpha + s\beta + t\gamma, \quad \text{wenn} \quad m = r, \ n - s, \ p = t \ \text{ist}$$ 6

3. Sind A, B, C, D die Ecken eines Tetraeders und die A fangspunkte der vier parallelen Strecken α, β, γ, δ, und ist E e beliebiger Punkt und Anfangspunkt der Strecke E, die den Streck α, β, γ, δ parallel ist, so kann man vier Zahlen m, n, p, q, so b stimmen, dass

$$\varepsilon = m\alpha + n\beta + p\gamma + q\delta, \quad e = ma + nb + pc + qd$$

Es ist

$$m\alpha + n\beta + p\gamma + q\delta = r\alpha + s\beta + t\gamma + u\delta, \quad \text{wenn} \ m = r, \ n = s, \ p = q = u$$

Das Tetraeder $ABCD$ heisst rechtswendig, wenn ein Kopf in A und den Füssen in B längs AB liegender Mensch, d nach der Kante CD hinsieht, die Ecke C zur Linken und die Ec D zur Rechten hat; sieht dagegen der so liegende Mensch die Ec C rechts und die Ecke D links, so heisst das Tetraeder linkswe dig. Zwei Tetraeder haben gleichen Sinn, wenn beide recht wendig oder beide linkswendig sind, sie haben jedoch entgegen gesetzten Sinn, wenn das eine rechtswendig, das andre link wendig ist.

Unter dem Verhältniss $\frac{T_n}{T}$ von zwei Tetraedern T_n und T, vo

denen T nicht null ist, versteht man die Zahl, die das Verhältniss der beiden Tetraederinhalte misst, mit dem positiven Vorzeichen, wenn sie denselben, mit dem negativen Vorzeichen, wenn sie entgegengesetzten Sinn haben.

Es ist

$$ABCD = -BACD = -ACBD = -ABDC \qquad 8.$$

wenn $ABCD$ der Inhalt des Tetraders $ABCD$ ist.

Die Gegenseiten der Ecken A, B, C, D bezeichne man mit $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$. Der Inhalt des Tetraeders $ABCD$ sei T, die Inhalte der Tetraeder, die einen Punkt M zur Spitze und die vier Seiten von T zu Grundflächen haben, seien

$$T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad T_4$$

Mit Rücksicht auf den Sinn der Tetraeder gilt allgemein die Gleichung

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0$$

also

$$\frac{T_1}{T} + \frac{T_2}{T} + \frac{T_3}{T} + \frac{T_4}{T} = 1 \qquad 9.$$

Es falle der Punkt D in den Punkt C und der Punkt M liege in der Ebene ABC.

Das Dreieck ABC heisst r e c h t s w e n d i g, wenn ein von A nach B sehender Mensch die Ecke C zur Linken hat, und l i n k s w e n d i g, wenn der Sehende die Ecke C zur Rechten hat. Zwei Dreiecke haben g l e i c h e n S i n n, wenn beide rechtswendig oder linkswendig sind; sie haben e n t g e g e n g e s e t z e n S i n n, wenn das eine rechtswendig, das andere linkswendig ist. Unter dem Verhältniss $\frac{\Delta_n}{\Delta}$ von zwei Dreiecken versteht man die Zahl, die das Verhältniss der beiden Inhaltsdreiecke misst, mit dem positiven Vorzeichen, wenn sie denselben, mit dem negativen Vorzeichen, wenn sie entgegengesetzten Sinn haben. Wenn M ein Punkt der Ebene ABC ist, und (MBC) den Inhalt des Dreiecks MEC bezeichnet, dann gilt mit Rücksicht auf den Sinn der Dreiecke allgemein die Gleichung

$$\frac{(MBC)}{(ABC)} + \frac{(MCA)}{(ABC)} + \frac{(MAB)}{(ABC)} = 1 \qquad 10.$$

oder kürzer

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta} + \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \qquad 10'.$$

Sind die nicht in einer geraden Linie liegende Punkte ABC die Anfangspunkte von drei parallelen Einheitsstrecken α', β', γ' und der Punkt M der Ebene ABC der Anfangspunkt einer den Einheitsstrecken parallelen Strecke μ, so ist

$$\mu = m\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\alpha' + \frac{\Delta_2}{\Delta}\beta' + \frac{\Delta_3}{\Delta}\gamma'\right) \qquad 11.$$

Sind $ABCD$ die Ecken eines Tetraeders und die Anfangspunkte der vier parallelen gleichgerichteten Einheitsstrecken α', β'. γ', δ' und ferner M der Anfangspunkt einer den Einheitsstrecken parallelen Strecke μ, so ist

$$\mu = m\left(\frac{T_1}{T}\alpha' + \frac{T_2}{T}\beta' + \frac{T_3}{T}\gamma' + \frac{T_4}{T}\delta'\right) \qquad 12.$$

Division und Multiplication von parallelen Strecken.

Der Quotient von zwei parallelen Strecken α, β (α von null verschieden)

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \qquad 13.$$

soll eindeutig bestimmt sein. Aus dieser Gleichung folgt zur Erklärung der Multiplication die Gleichung

$$q \cdot \alpha = \frac{\beta}{\alpha}\alpha = \beta \qquad 14.$$

Der Quotient q heisst nach Unverzagt eine longimetrische Quaternion[1]). Da diese Quotienten eindeutig bestimmt sein sollen, so hat die Gleichung

$$\frac{x}{\alpha} = \beta \qquad 15.$$

in Bezug auf die Unbekannte x nur eine Auflösung, die man erhält, wenn man beide Seiten mit α multiplicirt

$$\frac{x}{\alpha}\alpha = x = \beta\alpha$$

Es ist also

---

1) Unverzagt: „Theorie der goniometrischen etc. Quaternionen, Wiesbaden 1876". Unverzagt führte die Rechnung mit parallelen Strecken ein.

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \frac{\beta \cdot \alpha}{a} \qquad 15'.$$

Sind die Strecken α und β a) gleichgerichtet, so folgt aus der Gleichung 14., dass die Strecke α durch Multiplication mit dem Quotienten q in die Strecke β übergeführt wird; um dies auszuführen ist erforderlich: 1) dass die Länge a von α verwandelt wird in die Länge b von β, d. h. es muss α entweder gestreckt oder verkürzt werden, bis es so gross ist wie β, 2) dass α parallel verschoben wird bis ein Anfangspunkt, der die gerade Linie AB beschreibt, in den Anfangspunkt B von β fällt. Sind die Strecken α und β b) entgegengesetzt gerichtet, so wird die Strecke α durch Multiplication mit dem Quotienten q in die Strecke β übergeführt; um dies jedoch auszuführen ist es erforderlich: 1) dass die Strecke α in einer Ebene, die die Strecke α enthält, um den Anfangspunkt um $2R$ gedreht wird, 2) dass die Länge a von α verwandelt wird in die Länge b von β, 3) dass die Strecke $-\frac{b}{a}\alpha$ parallel verschoben wird bis ihr Anfangspunkt, der die gerade Linie AB beschreibt, in den Anfangspunkt B von β fällt.

Gesetzt $q_1 = \frac{\delta}{\gamma}$, δ und γ zwei parallele Strecken, wäre ein Quotient, der mit α multiplicirt, diese Strecke α nach β überführe. Dazu ist nötig, um kurz zu sprechen, dass q_1 1) die Strecke α um denselben Winkel (Ord. $2R$) wie q drehe, 2) in demselben Verhältniss wie q die Strecke α an Länge verändere und 3) um dieselbe Länge AB wie q die Strecke α parallel verschiebe. Man kann daher setzen

$$q = q_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$$

wenn ist

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad AB \text{ gleich und gleichstimmig parallel mit } CD \qquad 16.$$

(AB ⇶ CD) CD, δ, γ gleichgerichtet (entgegengesetzt gerichtet) bei gleichgerichteten (entgegengesetzt gerichteten) β, α.

Der Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ dreht um denselben Winkel (0 oder $2R$), verschiebt parallel und streckt oder verkürzt durch Multiplication nicht nur die Strecke α, sondern jede Strecke im Raume. Man kann nämlich nach den Gl. 16. machen

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$$

also ist

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \gamma = \delta$$

Nimmt man

$$\gamma = m\alpha, \quad \delta = m\beta$$

so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m\beta}{m\alpha}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot m\alpha = m\beta = m\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha\right) = \frac{m\beta}{\beta} \cdot \alpha = \frac{m\beta\alpha}{\alpha} = m\frac{\beta\alpha}{\alpha}$$

und man kann setzen

$$m\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m\beta}{\alpha} = \frac{\gamma m}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}m$$

Diese Gleichung setzt fest, dass für die Multiplication einer grösse m mit einem Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ die Gesetze der Multipl und Division mit Zahlen gelten.

Aus der Gleichung 16. folgt, dass je zwei parallele Radien excentrischen Kugeln denselben Quotienten und jede Seite ein raden Cylindermantels mit seiner Axe einen anderen Quotient stimmen.

Die Quotienten $p, q, r, s \ldots$ von je zwei parallelen St kann man nach den Gleichungen 16. auf denselben Dividende auf denselben Divisor reduciren. Man kann setzen

$$\left.\begin{array}{l} p = \frac{\beta}{\alpha}, \quad q = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad r = \frac{\varepsilon}{\alpha} \ldots \\ p = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad q = \frac{\alpha}{\delta}, \quad r = \frac{\alpha}{\alpha} \ldots \end{array}\right\}$$

die Strecken $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \nu$ sind parallel, und es ist

$$AB \# LA, \quad AC \# DA, \quad AE \# NA$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{d}, \quad \frac{e}{a} = \frac{a}{n}$$

Es sind die Strecken β und λ, γ und δ, ε und ν etc. gleichge

Es ist

also
$$\left.\begin{array}{l}\frac{c}{n}=\frac{e}{d'},\quad \frac{c}{l}=\frac{b}{d'},\quad LC=DB \\ \frac{\beta}{\delta}=\frac{\gamma}{\lambda}\end{array}\right\} \qquad 19'.$$

Um in Uebereinstimmung mit den Lehren der Arithmetik zu bleiben, nimmt man an, dass ist

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\mu}=\frac{\beta}{\mu} \qquad 20.$$

Diese Annahme bedeutet nichts anderes, als dass man in dem Product

$$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\mu}\mu\right)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\mu}\right)\mu \qquad 20'.$$

das associative Gesetz gelten lässt, d. h die Ueberführung von μ in α und dann von α in β ist gleich der Ueberführung von μ in β.

Nach den Gleichungen 19. ist

$$pq=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\beta}{\delta},\quad qp=\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}=\frac{\gamma}{\lambda}$$

mithin nach den Gleichungen 19'.

$$pq=qp \qquad 21.$$

Zieht man $DM \# bA$ und bestimmt die Zahl m so, dass ist

$$\frac{e}{a}=\frac{d}{m}$$

so ist

$$r=\frac{\delta}{\mu}$$

Es ist also

$$(pq)r=\frac{\beta}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\mu}=\frac{\beta}{\mu},\quad p(qr)=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\mu}\right)=\frac{\beta}{\mu}$$

mithin

$$(pq)r=p(qr) \qquad 22.$$

Aus den Gleichungen 19. erhält man ferner

$$pq+rq=\frac{\beta}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\delta},\quad (p+r)q=\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha}{\delta}$$

Nimmt man von „der Summe zweier Quotienten mit denselben „Nennern an, dass sie gleich der Summe der Zähler dividirt durch „den gemeinschaftlichen Nenner ist“, so ist

$$pq + rq = \frac{\beta}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\beta + \varepsilon}{\delta}, \quad \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha} \ldots \qquad 23.$$

und

$$pq + rp = (p + r)q$$

Nach der letzten Gleichung ist

$$(p+r)(q+s) = p(q+s) + r(q+s) = (q+s)p + (q+s)r$$
$$= qp + sp + qr + sr = pq + ps + rq + rs \qquad 24.$$

Unter dem Quotienten

$$x = \frac{p}{q} \qquad 25.$$

hat man einen solchen Quotienten x von zwei parallelen Strecken zu verstehen, für den ist

$$xq = p \qquad 25'.$$

oder

$$x\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Es besteht somit die Gleichung

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} \qquad 26.$$

„Das Product, die Summe, der Quotient von zwei Quotienten „paralleler Strecken ist wieder ein Quotient von parallelen Strecken. „Für die vier Grundrechnungen der Quotienten von parallelen „Strecken gelten im allgemeinen die Gesetzte der Arithmetik (nach „Gl. 20. = 26.)".

Sind die Strecken α, β, ε gleichgerichtet parallel, und liegt A so zwischen B und E, dass ist

$$EA : AB = b : e$$

so ist

$$\frac{\beta + \varepsilon}{\alpha} = \frac{m\alpha}{\alpha} = m, \quad m\alpha = b + e$$

d. h. der Quotient $\frac{\beta + \varepsilon}{\alpha}$ ist eine reelle Zahl. Es ist die Summe zweier Quotienten eine reelle Zahl, wenn der gemeinschaftliche Divisor seinen Anfang im Schwerpunkte der Strecken des Dividenden hat.

Sind β', ε' zwei gleich lange, gleichgerichtete parallele Strecken,

so ist in dem Quotienten $\frac{\beta' - \varepsilon'}{\alpha'}$ der Dividend eine im Unendlichen liegende Strecke von der Länge null oder ein Operator, der zu einer anderen parallelen Strecke addirt diese parallel verschiebt. Addirt man diesen Quotienten zu einem anderen Quotienten $\frac{\gamma}{\alpha'}$, so erhält man einen Quotienten $\frac{\varkappa}{\alpha'}$, dessen Dividend dieselbe Länge wie γ hat. Liegt ferner A in der Mitte von Bb und ist α' gleichgerichtet und gleichgross den Strecken β', ε', so ist

$$\frac{\varepsilon'}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\beta'}, \quad \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\varepsilon'}, \quad \varepsilon' + \beta' = 2\alpha'$$

Es ist $\frac{\beta'}{\alpha'}$ nicht gleich $\frac{\varepsilon'}{\alpha'}$, es besteht also die Gleichung

$$\frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\varepsilon'}{\alpha'} = 0$$

nicht.

Obgleich $\frac{\beta' - \varepsilon'}{\alpha'}$ nicht null ist, so hat $\left(\frac{\beta' - \varepsilon'}{\alpha'}\right)^2$ den Wert null. Auf der geraden Linie AB sei E der Mittelpunkt von DB und D der Anfangspunkt einer Strecke δ', die den Strecken α', β' parallel, gleichgerichtet und an Länge gleich ist.

Es ist also ferner

$$\frac{\varepsilon'}{\delta'} = \frac{\beta'}{\varepsilon'}, \quad \frac{\varepsilon'}{\beta'} = \frac{\delta'}{\varepsilon'}, \quad \beta' + \delta' = 2\varepsilon'$$

und

$$\begin{aligned}\left(\frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 &= \left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 - 2\frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\varepsilon'}{\alpha'} \\ &= \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} - 2\frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \\ &= \frac{\beta'}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\beta'} - 2 = \frac{\beta'}{\varepsilon'} + \frac{\delta'}{\varepsilon'} - 2 = \frac{2\varepsilon'}{\varepsilon'} - 2 = 0 \qquad 27.\end{aligned}$$

Diese Quotienten haben mithin dieselben Eigenschaften wie die alternirenden Zahlen Haukels und das äussere Product Grassmanns, „dass ein Product zu null werden kann, ohne dass die Factoren „null sind“.

Es ist ferner

$$\left(\frac{\alpha'}{\alpha'}-\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2=1+\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2-2\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)=1+\frac{\varepsilon'}{\beta'}-2\frac{\varepsilon'}{\alpha'}=1+\frac{\varepsilon'}{\beta'}-2\frac{\alpha'}{\beta'}=0$$

also

$$\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2=2\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)-1 \qquad 27'.$$

Diese Gleichung kann man auch wie folgt ableiten. Man hat

$$\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\varepsilon'}{\alpha'},\quad \frac{\varepsilon'}{\beta'}=\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2,\quad \alpha'=\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\beta',\quad \varepsilon'=\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2\beta'$$

und

$$\frac{\varepsilon'+\beta'}{\beta'}=\frac{2\alpha''}{\beta}=\frac{2\varepsilon'}{\alpha'}$$

$$\frac{\varepsilon'+\beta'}{\beta'}=\frac{\varepsilon'}{\beta'}+1=\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2+1$$

daher

$$2\frac{\varepsilon'}{\alpha'}=\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2+1$$

Ferner ist noch

$$\varepsilon'+\beta'=\frac{\varepsilon'+\beta'}{\beta'}\beta'=\frac{\varepsilon'}{\beta'}\beta'+\frac{\beta'}{\beta'}\beta'=\left(\frac{\varepsilon'}{\beta'}+\frac{\beta'}{\beta'}\right)\beta'$$

$$\frac{\varepsilon'+\beta'}{\beta'}\beta'=\frac{2\varepsilon'}{\alpha'}\beta'$$

mithin

$$\left\{\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2+1\right\}\beta'=\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2\beta'+\beta'=\frac{2\varepsilon'}{\alpha'}\alpha'$$

Allgemein erhält man, wenn n eine positive ganze Zahl ist

$$\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^n=n\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)-(n-1) \qquad 27''.$$

Diese Gleichung kann als Definitionsgleichung gelten, wenn n eine beliebige reelle Zahl ist.

Es seien A, B, C, D die Eckpunkte eines Parallelogramms. dessen Diagonalen AC, BD sich im Punkte E schneiden. Die Strecken α', β', γ', δ', ε' seien parallel, gleichgerichtet und gleichgross. Es ist

$$\left.\begin{array}{l} q_1=\dfrac{\beta'}{\alpha'}=\dfrac{\gamma'}{\delta'},\quad q_2=\dfrac{\gamma'}{\beta'}=\dfrac{\delta'}{\alpha'},\quad q_1^2=2q_1-1,\ q_2^2=2q_2-1 \\ \beta'+\delta'=2\varepsilon',\quad \alpha'+\gamma'=2\varepsilon' \\ \text{also} \\ \beta'+\delta'-\alpha'=\gamma' \end{array}\right\} \qquad 28'.$$

Man hat

$$(q_1 - 1)(q_1 + 1) = 2(q_7 - 1), \quad (q_2 - 1)(q_2 + 1) = 2(q_2 - 1) \qquad 28''.$$

Aus dieser Gleichung folgt nicht

$$q_4 = +1 \, (q_2 = +1)$$

Ferner ist

$$q_1 q_2 = \frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{\beta' + \delta' - \alpha'}{\alpha'} = \frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{\delta'}{\alpha'} - 1 = q_1 + q_2 - 1$$

$$(q_1 q_2)^2 = 2 q_1 q_2 - 1$$

Bezeichnet man mit $q_3, q_4, q_5 \ldots q_p \ldots$ die Quotienten von je gleich zwei gleichgerichteten parallelen Strecken, die dieselben absoluten Längen wie die Strecken α', β', γ' haben, so bestehen die Gleichungen

$$q^n{}_p = n q_p - (n - 1), \quad q_m q_p = q_m + q_p - 1, \quad (q_m - q_p)^2 = 0$$

Es ist also

$$q_1 q_2 q_3 = (q_1 q_2) q_3 = (q_1 + q_2 - 1) q_3 = q_1 q_3 + q_2 q_3 - q_3$$
$$= q_1 + q_2 + q_3 - 2$$

und allgemein

$$q_1 q_2 q_3 q_4 \ldots q_p = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots q_p - p + 1 \qquad 28.$$

Es ist q_1 ein Factor, der eine jede Strecke im Raume durch Multiplication um die Länge AB in einer Richtung verschiebt, die parallel und gleichstimmig mit AB ist oder, der Quotient aus zwei parallelen gleichgerichteten Einheitsstrecken ist gleich dem durch sie bestimmten Verschiebungsfactor. Bezeichnet man daher q_1 mit (A, B), so ist

$$q_2 = (B, C), \quad q_1 q_2 = (A, B)(B, C) \quad \text{und} \quad (B, C)(A, B) = (A, C) \qquad 28''.$$

Diese Formel sagt aus, dass die Folge von zwei Translationen verschiedener Richtung aequivalent einer einzigen Translation ist, die nach Grösse, Richtung durch die dritte Seite eines Dreiecks bestimmt ist, dessen andre Seiten aus den gegebenen Translationen nach Grösse und Richtung construirt werden können; die Ordnung der Translationsfolgen ist beliebig.

Die Einheitsstrecken α', β', γ', δ' ... seien gleichgerichtet parallel. Es ist dann

$$\frac{\beta}{\alpha} = (-1)^n \frac{b}{a}\frac{\beta'}{\alpha'}, \quad a \text{ und } b \text{ positive Zahlen} \qquad 29.$$

wo n eine gerade Zahl bedeutet, wenn die Strecken β, α gleichgerichtet, und n eine ungerade Zahl ist, wenn dieselben Strecken entgegengesetzt parallel sind.

Die Anfangspunkte A, B, C, D, E der Einheitsstrecken α', β', γ', δ', ε' sollen in einer geraden Linie liegen, und es sei der Punkt A der Mittelpunkt von DB und von EC. Es ist dann

$$\beta' = m\alpha' + p'\gamma', \quad m + p = 1, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{p}{m}$$

also

$$(-1)^n \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{b}{a}\frac{m\alpha' + p\gamma'}{\alpha'} = \frac{b}{a}\left(m + p\frac{\gamma'}{\alpha'}\right) \qquad 30$$

Da ferner

$$\delta' = m\alpha' + p\varepsilon', \quad \frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\delta'}{\alpha'}, \quad \frac{\varepsilon'}{\alpha'} \cdot \frac{\gamma'}{\alpha'} = 1 - \frac{\gamma'}{\alpha'} + \frac{\varepsilon'}{\alpha'} = 1$$

ist, so ist

$$(-1)^n \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{a}{b}\frac{\delta'}{\alpha'} = \frac{a}{b}\left(m + p\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right) \qquad 30'$$

$$= \frac{a}{b}\left\{m + p - p\left(\frac{\gamma'}{\alpha'} - 1\right)\right\} = \frac{a}{b}\left(p + 1 - p\frac{\gamma'}{\alpha'}\right)$$

Mit Hilfe der Formeln 11. und 12. kann man dem Quotienten $\frac{\mu}{\sigma}$ die Formen

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{m}{a}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta}\frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{\Delta_3}{\Delta}\frac{\gamma^{\mathrm{I}}}{\alpha'}\right), \quad \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta \qquad 30''$$

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{m}{a}\left(\frac{T_1}{T} + \frac{T_2}{T}\frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{T_3}{T}\frac{\gamma'}{\alpha'} + \frac{T_4}{T}\frac{\delta'}{\alpha'}\right), \quad T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T \; 30'''$$

geben. In der Gleichung 30″. ist zu beachten, dass die Anfangspunkte der Strecken μ, α, β, γ in einer Ebene liegen und die Anfangspunkte der Strecken α, β, γ die Eckpunkte eines Dreiecks sind; die Anfangspunkte der Strecken α, β, γ, d der Formel 30‴. sind die Ecken eines Tetraeders.

Um das Product zweier parallelen Strecken durch den Quotienten dieser Strecken auszudrücken nimmt man an, dass die Gleichung

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\alpha\right)\alpha = \beta\alpha = \frac{\beta}{\alpha}\alpha^2 \qquad 31'.$$

besteht, und dass abgesehen vom Vorzeichen α^2 gleich a^2 ist.
Hamilton setzt

$$\alpha^2 = -a^2$$

ich setze

$$\alpha^2 = (-1)^s a^2$$

wo s eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Nach den Gleichungen 30. ist

$$\left.\begin{array}{l} \beta\alpha = (-1)^{n+s}\,ab\,\dfrac{\beta'}{\alpha'} \quad \alpha\beta = (-1)^{n+s}ab\,\dfrac{\alpha'}{\beta'} \quad (-\beta)\,\alpha = \beta(-\alpha) \\ \beta'\alpha' = (-1)^s\,\dfrac{\beta'}{\alpha'} \end{array}\right\} \qquad 32.$$

„Das Product von zwei parallelen Strecken ist nicht commu-
„tativ, d. h. es ist $\beta\alpha$ nicht gleich $\alpha\beta$.“

Setzt man in den Gleichungen 30.

$$AC = 1$$

so ist

$$\beta\alpha = (-1)^{n+s}ab\,\frac{\beta'}{\alpha'} = (-1)^{n+s}ab\left(1 - AB + AB\,\frac{\gamma'}{\alpha'}\right) \qquad 32'.$$

Man setzt

$$\{\beta\alpha\} = (-1)^{n+s}ab\,.\,(1 - AB), \quad [\beta\alpha] = (-1)^{n+s}ab\,.\,AB\,\frac{\gamma'}{\alpha'} \qquad 32''.$$

Das Product $\{\beta\alpha\}$ heisst S c a l a r und das Product $[\beta\alpha]$ V e c t o r des Productes $\beta\alpha$.

Liegen die Punkte DK auf der geraden Linie AB, so ist

$$\varkappa\delta = (-1)^{m+s}dk\left(1 - DK + DK\,\frac{\gamma'}{\alpha'}\right)$$

und

$$\begin{aligned} \beta\alpha + \varkappa\delta = {} & (-1)^{n+s}ab(1 - AB) + (-1)^{m+s}\,dk(1 - DK) \\ & + \left((-1)^{n+s}\,.\,AB + (-1)^{m+s}\,DK\right)\frac{\gamma'}{\alpha'} \end{aligned} \qquad 32'''$$

Der Scalar dieses Productes ist

$$\left.\begin{aligned}\{\beta\alpha+\varkappa\delta\} &= (-1)^{n+s}ab(1-AB)+(-1)^{m+s}dk(1-DK)\\ &= \{\beta\alpha\}+\{\varkappa\delta\}\\ &\text{und der Vector des Productes ist}\\ [\beta\alpha+\varkappa\delta] &= \left((-1)^{n+s}AB+(-1)^{n+s}(-1)^{m+s}DK\right)\frac{\gamma'}{\alpha'}\\ &= [\beta\alpha]+[\varkappa\delta]\end{aligned}\right\} \quad 32'''.$$

Wenn

$$\beta\alpha = \varkappa\delta$$

so ist

$$\{\beta\alpha\} = \{\varkappa\delta\}, \quad [\beta\alpha] = [\varkappa\delta] \qquad 32^{V}.$$

Der Scalar ist eine reelle Zahl. Es ist

$$\{\beta\}^2 = (-1)^s b^2, \quad \{n\beta\alpha\} = n\{\beta\alpha\}, \quad [\beta^2] = 0, \quad [n\beta\alpha] = n[\beta\alpha] \qquad 32^{VI}.$$

wenn n ein Zahlfactor ist.

„Das Product $[\beta\alpha]$ ändert seinen Wert nicht, wenn man einen „Factor um ein Vielfaches des andern vermehrt;“ es gilt die Gleichung

$$[\beta(\alpha+n\beta)] = [(\beta+m\alpha)\alpha] = [\beta\alpha] \qquad 32^{VII}.$$

Um diese Formel zu beweisen, muss man nachweisen, dass die Gleichungen

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma \qquad 33.$$

$$\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha+\gamma\beta \qquad 34.$$

bestehen. Aus der Gleichung 30. ergiebt sich

$$\alpha\beta+\beta\alpha = (-1)^{n+s}2ab \qquad 35.$$

und die Gleichung 31. giebt

$$\begin{aligned}\alpha\gamma+\beta\gamma &= (-1)^s\frac{\alpha}{\gamma}c^2+(-1)^s\frac{\beta}{\gamma}c^2 = (-1)^s\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\gamma^2\\ &= (\alpha+\beta)\gamma\end{aligned} \qquad 33.$$

Sind die parallelen Strecken α, β, γ gleichgerichtet, so ist

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)\gamma &= (-1)^s 2c(a+b) = (-1)^s 2ac+(-1)^s 2bc\\ &= \alpha\gamma+\gamma\alpha+\beta\gamma+\gamma\beta\end{aligned}$$

also

$$\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha+\gamma\beta \qquad 34.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\alpha+\beta = \varepsilon$, so ist

$$\gamma\varepsilon = \gamma\alpha+\gamma(\varepsilon-\alpha)$$

also

$$\gamma(\varepsilon - \alpha) = \gamma\varepsilon - \gamma\alpha$$
$$-\gamma(\varepsilon - \alpha) = \gamma(\alpha - \varepsilon) = \gamma\alpha - \gamma\varepsilon$$

Die Gleichung 34. gilt mithin für gleichgerichtete und entgegengesetztgerichtete parallele Strecken. Aus den Gleichungen 33. und 34. erhält man

$$\beta(\alpha + n\beta) = \beta\alpha + (-1)^s nb^2, \quad (\beta + m\alpha)\alpha = \beta\alpha + (-1)^s ma^2$$

und hieraus die Gleichung 32^{VII}.

Aus den Gleichungen 33. und 34. folgt, dass das „distributive „Gesetz für Producte von parallelen Strecken in der Form

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta \qquad 36.$$

„gültig ist." Für drei Factoren kann man leicht die Gleichung

$$(\alpha\beta)(\gamma + \delta) = (\alpha\beta)\gamma + (\alpha\beta)\delta \qquad 37.$$

beweisen. Die Anfangspunkte K, D, C, E der gleichlangen, gleichgerichteten, parallelen Strecken $\varkappa'$, δ', γ', ε' seien die Ecken eines Parallelogramms, der Anfangspunkt einer den Strecken $\varkappa'$, δ' parallelen, gleichlangen und gleichgerichteten Strecke α' liege in der Mitte von EK und ebenso der Anfangspunkt B einer Strecke β', die parallel, gleichlang und gleichgerichtet den Strecken $\varkappa'$, δ' ist, sei der Mittelpunkt der Seite DC. Es ist also

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\varepsilon'}{\gamma'} = \frac{\varkappa'}{\delta'}, \quad \frac{\gamma'}{\varepsilon'} = \frac{\vartheta'}{\gamma'}$$

$$\frac{\varepsilon' + \varkappa'}{\gamma' + \delta'} = \frac{\alpha'}{\beta'}$$

und

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\gamma + \frac{\alpha'}{\beta'}\delta' = \varepsilon' + \varkappa' = \frac{\varepsilon' + \varkappa'}{\gamma' + \delta'}(\gamma' + \delta') = \frac{\alpha'}{\beta'}(\gamma' + \delta')$$

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\gamma' = \varepsilon' = \frac{\gamma'}{\beta'}\alpha' \quad \text{oder} \quad (\alpha'\beta')\gamma' = (\gamma'\beta')\alpha'$$

also

$$(\alpha'\beta')\gamma' + (\alpha'\beta')\delta' = (\alpha'\beta')(\gamma' + \delta') = ((\gamma' + \delta')\beta')\alpha' \qquad 37'.$$

Sind a, b, c, d positive oder negative Zahlen, und setzt man

$$\alpha = a\alpha', \quad \beta = b\beta', \quad \gamma = c\gamma', \quad \delta = d\delta'$$

so ist

$$\frac{\alpha}{\beta}\gamma + \frac{\alpha}{\beta}\delta = \frac{a}{b}(c\varepsilon' + d\varkappa')$$

Ferner ist

$$\frac{c\varepsilon'}{\alpha'} = \frac{c\gamma'}{\beta'}, \quad \frac{d\varkappa'}{\alpha'} = \frac{d\delta'}{\beta'}$$

also

$$c\varepsilon' + d\varkappa' = \frac{c\gamma' + d\delta'}{\beta'}\,\alpha' = \frac{b}{a}\,\frac{\gamma+\delta}{\beta}\,\alpha$$

und

$$\frac{\alpha}{\beta}\gamma + \frac{\alpha}{\beta}\delta = \frac{\gamma+\delta}{\beta}\alpha \qquad 37''.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\gamma' = \frac{\gamma'}{\beta'}\alpha' \text{ oder } (\alpha'\beta')\gamma' = (\gamma'\beta')\alpha'$$

folgt

$$(\alpha\beta)\gamma = (\gamma\beta)\alpha \qquad 38.$$

es ist mithin auch

$$\frac{\gamma+\delta}{\beta}\alpha = \frac{\alpha}{\beta}(\gamma+\delta) \quad \text{oder} \quad ((\gamma+\delta)\beta)\alpha = (\alpha\beta)(\gamma+\delta)$$

und daher besteht die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\beta}\gamma + \frac{\alpha}{\beta}\delta = \frac{\alpha}{\beta}(\gamma+\delta)$$

der man die Form 37. geben kann. Aus dieser Gleichung kann man noch die Formel

$$\gamma(\alpha\beta + \beta\alpha) = (\gamma\alpha)\beta + (\gamma\beta)\alpha = (-1)^s 2\gamma abc \qquad 39.$$

ableiten. Man hat

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\gamma' + \frac{\beta'}{\alpha'}\gamma' = 2\gamma'$$

oder

$$(\alpha'\beta')\gamma' + (\beta'\alpha')\gamma' = (-1)^s 2\gamma'$$

also

$$(\alpha\beta)\gamma + (\beta\alpha)\gamma = (-1)^s 2\gamma' abc$$

nach der Formel 35. ist

$$(\alpha\beta + \beta\alpha)\gamma = \gamma(\alpha\beta + \beta\alpha) = (-1)^s 2\gamma' abc$$

mithin ist

$$\left.\begin{aligned}\gamma(\alpha\beta + \beta\alpha) &= (\alpha\beta)\gamma + (\beta\alpha)\gamma \\ &= (\gamma\beta)\alpha + (\gamma\alpha)\beta\end{aligned}\right\} \qquad 39'.$$

Lässt man noch das a s s o c i a t i v e G e s e t z

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma = \alpha\beta\gamma \qquad 40.$$

gelten, so kann man in der Formel 39'. nach dem distributiven Gesetz multipliciren. Es gilt für das Product $\gamma(\alpha\beta + \beta\alpha)$ das distributive

Gesetz auch dann, wenn man annimmt, dass das Product $\alpha'(\alpha'\varepsilon')$ gleich einer Strecke $(-1)^s(m\varepsilon' + (1-m)\alpha')$ ist, wo m entweder gleich der Längeneinheit oder kleiner als die Längeneinheit ist nimmt man $m = 1$, so gilt das associative Gesetz.

Ich nehme das associative Gesetz an; es ist daher

also

$$\left.\begin{aligned} &\alpha'(\beta'\gamma') = (\alpha'\beta')\gamma' = (\gamma'\beta')\alpha' = \gamma'(\beta'\alpha') \\ &\alpha'\frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\alpha'}{\beta'}\gamma' = \frac{\varepsilon'}{\gamma'}\gamma' = \varepsilon' \quad \text{und} \\ &\gamma'\frac{\varepsilon'}{\gamma'} = \frac{\gamma'}{\varepsilon'}\gamma' = \frac{\vartheta'}{\gamma'}\gamma' = \vartheta' \end{aligned}\right\} \quad 40'.$$

Man hat also die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\alpha\beta)\gamma = (\gamma\beta)\alpha = \alpha(\beta\gamma) = \gamma(\beta\alpha) = (-1)^{s+n}abc\varepsilon' \\ (\beta\gamma)\alpha = (\alpha\gamma)\beta = \beta(\gamma\alpha) = \alpha(\gamma\beta) = (-1)^{s+n}abc\zeta' \\ (\gamma\alpha)\beta = (\beta\alpha)\gamma = \gamma(\alpha\beta) = \beta(\alpha\gamma) = (-1)^{s+n}abc\xi' \end{aligned}\right\} \quad 40.$$

Die Seiten des Dreiecks EZX gehen durch die Punkte ABC und sind den Seiten des Dreiecks ABC parallel; die Punkte ABC sind die Mittelpunkte der Seiten EZ, ZX und XE.

„Das Product paralleler Strecken ist wieder eine Strecke, „wenn die Anzahl der Factoren ungerade ist."

Anwendung der Gesetze der Addition und Multiplication paralleler Strecken.

Im Folgenden soll kurz gezeigt werden, wie man mit Hilfe der gegebenen Sätze über die Verknüpfungen von parallelen Strecken, in der Ebene Punkte, gerade Linien und Curven und im Raume Punkte, Ebenen, Flächen und Curven bestimmen kann.

Die (für die Ebene und den Raum) zu Grunde gelegten Coordinatensysteme bilden specielle Fälle der bekannten Staudt-Fiedlerschen Systeme.

Die Ecken des Coordinatendreiecks seien $A_1A_2A_3$ und die der Ecke A_n gegenüberliegende Seite sei a_n. Der Einheitspunkt E hat die Entfernung e_n von der Seite a_n. Wenn die Abstände eines beliebigen Punktes P von den Seiten a_n mit p_n bezeichnet werden, so definirt die Gleichung

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{p_1}{e_1} : \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_3}{e_3} \qquad 41.$$

die Coordinaten des Punktes $P: x_1, x_2, x_3$.

Fällt der Punkt A_3 mit dem unendlich fernen Punkte zusammen, so sind die beiden geraden Linien A_1A_3, A_2A_3, die Axen des Systems, parallel. Zieht man PP_3' und EE'_3 parallel den Axen und nimmt man an, dass ist

$$A_1E_3' = E'_3A_2 = E'_3\,E$$

so ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = P_3'A_2 : A_1P_3' : P_3'P \qquad 41'.$$

Man kann als Coordinaten eines Punktes P den axen-Parallelen Abstand $P_3'P$ desselben von der Mittellinie A_1A_2 betrachten in Verbindung mit dem Verhältniss, (in dem der Fusspunkt P_3' die Strecke A_1A_2 teilt[1].) $A_1P_3' : P_3'A_2$.

Auf der geraden Linie A_1A_2 soll die Richtung von A_1 nach A_2 als die positive gelten, und auf den geraden Linien parallel E', E soll die Richtung E', E positiv genommen werden.

Die von der Ecke A_n des Dreiecks gezogene Höhe sei mit h_n und der Abstand der Ecke A_n von der Linie LM sei mit π_n bezeichnet. Die „Coordinaten der geraden Linie" $LM: u_1, u_2, u_3$ genügen der Gleichung [2])

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{e_1\pi_1}{h_1} : \frac{e_2\pi_2}{h_2} : \frac{e_3\pi_3}{h_3} \qquad 42.$$

Geht diese gerade Linie durch den Punkt P, so ist

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad 42'.$$

Die gerade Linie LM schneidet die Seite A_1A_3 im Punkte M und die Seite A_2A_3 im Punkte N. Fällt der Punkt A_3 mit dem unendlich fernen Punkte zusammen und ferner der Punkt P auf den Punkt M, so ist nach den Gleichungen 41'., 42'.:

---

1) Dieses Coordinatensystem behandelt Unverzagt im Jahresbericht über das Realgymnasium zu Wiesbaden 1871: „Ueber ein einfaches Coordinatensystem der Geraden." Unverzagt bemerkte nicht, dass es, wie auch das entsprechende räumliche Coordinatensystem, einen speciellen Fall des Staudt-Fiedler'schen Systems bildet.

2) Vgl. u. A.: Gundelfinger: „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte." Leipzig, B. G. Teubner. 1895. p. 5.

$$-\frac{u_1}{u_3} = \frac{A_1 M}{A_1 A_2}$$

lässt man den Punkt P mit den Punkten N zusammenfallen, so erhält man

$$-\frac{u_2}{u_3} = \frac{A_3 N}{A_1 A_2}$$

Die Coordinaten der geraden Linie genügen daher der Relation

$$u_1 : u_2 : u_3 = A_1 M : A_2 N : A_2 A_1 \qquad 42''.$$

Die von der geraden Linie LM auf den Axen bestimmten Längen $A_1 M$ und $A_2 N$ kann man als die Coordinaten der geraden Linie LM nehmen (s. Fig.).

Die Coordinaten eines Punktes P in Bezug auf das Coordinatensystem, dessen Axen $A_1 P_3'$, $A_2 P'$ sind, und dessen Mittellinie $A_1 A_2$ ist, bezeichnet man mit x, y, so dass ist

$$x_3 = \frac{A_1 P_3'}{P_3' A_2}, \quad y = P_3 P, \quad A_1 A_2 = 1 \qquad 43.$$

Die Coordinaten einer geraden Linie LM in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem, bezeichnet man mit u, v; es ist

$$u = A_1 M, \quad v = A_2 N \qquad 44.$$

Liegt der Punkt P auf der geraden Linie LM, so ist

$$y = \frac{u + vx}{1 + x} \qquad 45.$$

Nimmt man die Grössen u, v als gegeben an, so liegen alle Punkte, deren Coordinaten x, y der Gleichung 45. genügen, in einer geraden Linie, deren Coordinaten die gegebenen Werte u, v haben. Wenn dagegen die Grössen x, y gegeben sind, so gehen alle geraden Linien, deren Coordinaten u, v die Gleichung 45. erfüllen, durch den Punkt, dessen Coordinaten die gegebenen Werte x, y haben. Im ersten Falle ist 45. die „Gleichung der geraden Linie, deren Coordinaten u, v sind", und im zweiten Falle ist 45. „die Gleichung des Punktes, dessen Coordinaten x, y sind". Die allgemeine Gleichung ersten Grades zwischen u und v,

$$Au + Bv + C = 0 \qquad 46.$$

stellt einen Punkt dar, dessen Coordinaten sind

$$x = \frac{B}{A}, \quad y = -\frac{C}{A + B} \qquad 46'.$$

Die zwei geraden Linien, die die Coordinaten u_1, v_1; u_2, v_2 haben, schneiden sich in dem Punkte, dessen Coordinaten

$$x = \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}, \quad y = \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{u_1 - v_1 + v_2 - u_2}$$

sind, und dessen Gleichung

$$\frac{u - u_1}{v - v_1} = \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} \qquad 47.$$

ist; durch diesen Punkt gehen die geraden Linien, die die Coordinaten

$$u = u_1 (1 - t) + u_2 t, \quad v = v_1 (1 - t) + v_2 t \qquad 47'.$$

haben; der Parameter t kann alle möglichen reellen Werte haben.

Die beiden geraden Linien bestimmen einen Winkel, dessen goniometrische Tangente abgesehen vom Vorzeichen und unter der Voraussetzung, dass die Axen senkrecht auf $A_1 A_2$ sind,

$$\operatorname{tg}(u_1, u_2) = \frac{u_1 - v_1 - (u_2 - v_2)}{1 + (u_1 - v_1)(u_2 - v_2)} \qquad 48.$$

Die beiden geraden Linien sind mithin senkrecht aufeinander, wenn

$$(u_2 - v_2)(u_1 - v_1) = -1 \qquad 48'.$$

und parallel, wenn

$$u_2 - u_1 = v_2 - v_1 \qquad 48''.$$

Die gerade Linie, deren Coordinaten u, v sind, schneidet die Mittellinie im Punkte L; es ist dann

$$\frac{u}{v} = \frac{A_1 L}{A_2 L}$$

Bestimmt man zu den drei Punkten $A_1 A_2 L$ den vierten, harmonisch zu derselben gelegenen Punkt L', der dem Punkte L zugeordnet ist, so hat man

$$\frac{A_1 L}{L A_2} : \frac{A_1 L'}{L' A_2} = -1$$

und

$$\frac{u}{v} = \frac{A_1 L}{A_2 L} = \frac{A_1 L'}{L' A_2} \qquad 49$$

Man kann also setzen [1]), wenn l ein Parameter ist,

1) Unverzagt bestimmt einen Punkt L'' auf der Mittellinie so, dass

$$\left.\begin{array}{ll} u = l \,.\, A_1 L' & \\ & u + v = l \\ v = l \,.\, L' A_2 & \end{array}\right\} \qquad 50.$$

Wenn $A_1 L' : L' A_2$ und die Grösse l gegeben sind, so sind auch die Coordinaten u, v bekannt, also die gerade Linie, deren Coordinaten u, v sind, bestimmt. Da $A_1 L' : L' A_2$ gegeben ist, so kann man den Punkt L construiren; die Grösse l trägt man von A_2 auf der Axe ab ($A_2 T = l$), verbindet den Endpunkt dieser Strecke mit dem Punkte A_1, so schneidet diese Verbindungsgerade $A_1 T$ die durch L' zu den Axen parallel gezogene gerade Linie in einem Punkte R und es ist

$$u = L'R, \quad v = A_2 T - L'R$$

Wenn $A_1 L' : L' A_2$ gegeben ist, und die Zahl l alle möglichen reellen Werte annimmt, so gehen die geraden Linien, deren Coordinaten $l A_1 L'$, $l L' A_2$ sind, durch einen Punkt L, und wenn $A_1 L : L A_2$ bekannt ist, so gehen die geraden Linien, deren Coordinaten $l A_1 L$, $l L A_2$ sind, durch einen Punkt L'.

Auf der Mittellinie liegen vier Punkte L, K, Z, Z_1 so, dass ist

$$\frac{LZ}{ZK} = \frac{t}{l}, \quad \frac{LZ_1}{Z_1 K} = \frac{t_1}{l}$$

Es ist dann

$$(l + t) \,.\, ZK = (l + t_1) \,.\, Z_1 K = l \,.\, LK$$

und

$$(l + t_1) Z_1 A_2 - (l + t) Z A_2 = (l + t_1)(Z_1 K + K A_2)$$
$$- (l + t)(ZK + KA_2) = (t_1 - t) K A_2$$

$$(l + t) Z A_2 - t K A_2 = (l + t) ZK + (l + t) K A_2 - t \,.\, K A_2$$
$$= l \,.\, L A_2$$

Durch die vier Punkte sind die beiden geraden Linien, deren Coordinaten

$$\left\{\begin{array}{l} u = (l + t) A_1 Z \\ v = (l + t) Z A_2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} u = (l + t_1) A_1 Z_1 \\ v = (l + t_1) Z_1 A_2 \end{array}\right\} \qquad 51.$$

sind, bestimmt. Die Gleichung des Schnittpunktes der beiden geraden Linien ist

---

ist, und setzt die Coordinaten gleich einem Vielfachen von $L'' A_2$ und $A_1 L''$; es ist

$$A_1 L'' = L' A_2$$

$$\begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ (l+t)A_1Z, & (l+t)ZA_2, & 1 \\ (l+t_1)A_1Z_1, & (l+t_1)Z_1A_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Addirt man die zweite Colonne zur ersten, so erhält man

$$\begin{vmatrix} u+v, & v, & 1 \\ l+t, & (l+t)ZA_2, & 1 \\ l+t_1, & (l+t_1)Z_1A_2, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

subtrahirt man die zweite Zeile von der dritten und dividirt durch $t_1 - t$, so ist

$$\begin{vmatrix} u+v, & v, & 1 \\ l+t, & (l+t)ZA_2, & 1 \\ 1, & KA_2, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und hieraus folgt

$$u \,.\, KA_2 + v \,.\, KA_1 + l \,.\, LK = 0 \tag{52}$$

Die Coordinaten dieses Punktes sind

$$x = \frac{KA_1}{KA_2} = \frac{A_1K'}{K'A_2}, \quad y = \frac{l \,.\, KL}{KA_2 + KA_1} \tag{52'.}$$

Wenn also die Punkte K, L und die Zahl l gegeben sind, ferner die Grösse t alle möglichen reellen Werte annimmt, so schneiden sich die geraden Linien, die die Coordinaten 51. haben, in einem Punkte, der auf der durch den Punkt K' zu den Axen parallel gezogenen geraden Linie liegt. Die Punkte K und L seien die Anfangspunkte der gleichstimmig parallelen Einheitsstrecken $\varkappa'$, λ'. Der Punkt Z ist der Anfangspunkt der Strecke

$$\left.\begin{array}{l} \zeta = l\lambda + t\varkappa', \quad z = l + t \\ \dfrac{LZ}{ZK} = \dfrac{t}{l} \end{array}\right\} \tag{53.}$$

Diese Gleichung bestimmt, wenn l und t gegeben sind, die gerade Linie 51. Nimmt man in dieser Gleichung t als veränderlich an, so gilt sie für alle durch den Punkt, dessen Gleichung 52. ist, gehenden geraden Linien. Die Gleichung 53. kann man mithin als die Gleichung des Punktes, dessen Gleichung 52. ist, nehmen; man nennt „die Gleichung 53. die Gleichung des Punktes, der die Coordinaten $-\frac{A_1K}{KA_2}$, $\frac{l \,.\, KL}{KA_2 + KA_1}$ hat.“ Dieser Punkt liegt auf der durch die Gleichung

$$\zeta = l\lambda'$$

bestimmten geraden Linie, die mithin nach der Gleichung 51. die Coordinaten $l \,.\, A_1L$, $l \,.\, LA_2$ hat.

Die Gleichung

$$\zeta = t\lambda' \qquad 54.$$

stellt daher einen Punkt auf der Mittellinie dar, der zu den drei Punkten A_1, A_2, L harmonisch liegt und dem Punkte L zugeordnet ist.

Die Anfangspunkte A_1, A_2, B, D . . . L . . . K . . . der den Axen parallelen gleichgerichteten Strecken von der Längeneinheit α', γ', β', δ' . . . λ' . . . $\varkappa'$ . . . sollen auf der Mittellinie liegen. Fällt der Punkt K in den Punkt A_1, so wird Gleichung 53. zu

$$\zeta = l\lambda' + t\alpha' \qquad 55.$$

die einen Punkt darstellt, der auf der durch den Punkt A_1 gehenden Axe liegt; fällt der Punkt K in den Punkt A_2, so wird Gleichung 55. zu

$$\zeta = l\lambda' + t\gamma' \qquad 56.$$

die einen Punkt darstellt, der auf der durch den Punkt A_2 gehenden Axe liegt.

Ferner stellen die Gleichungen

$$\zeta = l\lambda' + t\varkappa', \quad \zeta = n\nu' + t\varkappa' \qquad 57.$$

zwei Punkte dar, die auf einer den Axen parallelen geraden Linie liegen.

Die Verbindungslinie der zwei Punkte, die die Gleichungen

$$\zeta = l\lambda' + t_1\varkappa', \quad \zeta = n\nu' + t_2\mu' \qquad 58.$$

haben, schneidet die Mittellinie in einem Punkte, der zu den drei Punkten A_1, A_2, J harmonisch liegt und dem Punkte J zugeordnet ist. Nach der Gleichung 54. kann man in der Gleichung

$$\zeta = t_3\iota \qquad 58'.$$

t_3 so annehmen, dass die gerade Linie mit den Coordinaten t_3A_1J, t_3JA_2 auf die Verbindungslinie der beiden Punkte fällt. Man kann ferner t_1 und t_2 solche Werte geben, dass von den durch die Gleichungen 58. festgelegten geraden Linien (s. Gl. 51.) zwei auf die

durch die Gleichung 58'. gegebene gerade Linie fallen. Für diese Werte von t_1 und t_2 ist also

$$\zeta = l\lambda' + t_1\varkappa' = n\nu' + t_2\mu' = t_3\iota \qquad 58''.$$

Hieraus folgt

$$l + t_1 = n + t_2 = t_3 \qquad 58'''.$$

Nach den Gleichungen 32. ist

$$\{(l\lambda' + t_1\varkappa')\alpha'\} = \{(n\nu' + t_2\mu')\alpha'\}$$

oder

$$l(1 - A_1L) + t_1(1 - A_1K) = n(1 - A_1N) + t_2(1 - A_1M)$$

und hieraus

$$lA_1L + t_1A_1K = nA_1N + t_2A_1M \qquad 58'''.$$

Aus den Gleichungen 58''' kann man t_1 und t_2 berechnen.

Der Punkt, dessen Gleichung

$$\zeta = l(1 - t)\lambda' + tp\delta' \qquad 59.$$

ist, ist der Schnittpunkt der zwei geraden Linien, die durch die Gleichungen

$$\zeta = l\lambda', \quad \zeta = p\delta' \qquad 59'.$$

bestimmt sind; diese geraden Linien haben die Coordinaten

$$u_1 = l \,.\, A_1L, \qquad u_2 = p \,.\, A_1D$$
$$v_1 = l \,.\, LA_2, \qquad v_2 = p \,.\, DA_2$$

Dieser Punkt fällt in den Einheitspunkt, wenn

$$l = p = 1$$

ist. Die Gleichung des Punktes, der auf den Schnittpunkt der durch die Gleichungen

$$\zeta = l\lambda', \quad \zeta = q\varepsilon' \qquad 59'.$$

bestimmten geraden Linien fällt, ist

$$\zeta = l(1 - t_1)\lambda' + t_1q\varepsilon' \qquad 59''.$$

Die Gleichungen 59 und 59'''. kann man schreiben

$$\zeta = l\lambda' + t(p\delta' - l\lambda'), \quad \zeta = l\lambda' + t_1(q\varepsilon' - l\lambda')$$

Setzt man

$$p\delta' - l\lambda' = (p - l)\mu', \quad q\varepsilon' - l\lambda' = (q - l)\nu'$$

so sind nach den Gleichungen 52'. die Coordinaten der Punkte,

in denen sich die durch die Gleichungen 59'. bestimmten geraden Linien bzhw. schneiden

$$-\frac{A_1M}{MA_2},\ l\frac{ML}{MA_2+MA_1};\quad -\frac{A_1N}{NA_2},\ l\frac{NL}{NA_2+NA_1}$$

Fallen diese beiden Punkte zusammen, so ist

$$\frac{A_1M}{MA_2}=\frac{A_1N}{NA_2}$$

woraus folgt, dass der Punkt M auf den Punkt N fällt. Es ist also

$$(q-l)p\delta'+(l-p)q\varepsilon'+(p-q)l\lambda'=0 \qquad 59'''.$$

Der durch die Gleichung 59. gegebene Punkt, ist der Schnittpunkt von den drei geraden Linien, die durch die Gleichungen 59' bestimmt sind, wenn die Gleichung 59'''. oder die Gleichung

$$q\varepsilon'=l(1-t)\lambda'+tp\delta'$$

besteht.

Man kann in der Gleichung 51. die Einheitsstrecken λ', $\varkappa'$ durch die Summe von Strecken, die ihre Anfangspunkte in den festen Punkten A_1 und A_2 haben, ersetzen. Zwei Zahlen m und n kann man nach der Gleichung 5. derart bestimmen, dass

$$\lambda'=(1-m)\alpha'+m\gamma'$$
$$\varkappa'=(1-n)\alpha'+n\gamma'$$

ist. Die Gleichung 51. heisst daher (kt statt t eingeführt)

$$\zeta=(l(1-m)+k(1-n)t)\alpha'+(lm+knt)\gamma' \qquad 60.$$

Der Punkt, den diese Gleichung darstellt, ist der Schnittpunkt der zwei geraden Linien, die durch die Gleichungen

$$\zeta=\frac{l}{n}(n-m)\alpha',\quad \zeta=l\frac{m-n}{1-n}\gamma'$$

festgelegt sind. Die Coefficienten von α' und β' in der Gleichung 60. sind lineare Functionen in t. Die „Gleichung eines Punktes ist

$$\zeta=r\alpha'+s\gamma' \qquad 61.$$

wenn r, s lineare Functionen von t sind". Man kann nämlich setzen

$$r=a_1+b_1t=(a_1+c_1)\left(1-\frac{c_1}{a_1+c_1}\right)+(b_1+d_1)\left(1-\frac{d_1}{b_1+d_1}\right)t$$
$$=l(1-m)+k(1-n)t$$

$$s = c_1 + d_1 t = (a_1 + c_1)\frac{c_1}{a_1 + c_1} + (b_1 + d_1)\frac{d_1}{b_1 + d_1}\,t$$
$$= lm + knt$$

Durch diesen Punkt gehen alle geraden Linien, deren Coordinaten

$$u = s = c_1 + d_1 t \qquad 62.$$
$$v = r = a_1 + b_1 t$$

sind. Setzt man nämlich

$$r\alpha' + s\gamma' = (r + s)\beta'$$

so ist

$$u = (r + s)A_1B, \quad v = (r + s)BA_2, \quad \frac{A_1B}{BA_2} = \frac{u}{v} = \frac{s}{r}$$

mithin gelten die Gleichungen 62. Der Gleichung des Punktes kann man die Form

$$\begin{vmatrix} u - c_1 & v - d_1 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 62'.$$

geben.

Wenn zwischen r und s eine Gleichung beliebigen Grades gegeben ist, so setzt man z. B. für r irgend einen Wert voraus, und ermittelt durch die Gleichung eine endliche Zahl von Werten von s, die dem angenommenen Werte von r entsprechen. Für dieses r und die entsprechenden s erhält man durch die Gleichung 61. eine oder mehrere gerade Linien mit den Coordinaten

$$u = s, \quad v = r$$

Nimmt man für r einen anderen Wert, so findet man in derselben Art andere gerade Linien.

Wenn man so dem r alle möglichen reellen Werte beilegt, so erhält man eine Folge von geraden Linien, von denen jede den Bedingungen der Gleichung genügt und daher ihr geometrischer Ausdruck ist. Die Gleichung 61. stellt daher irgend einen „Ort" dar, wenn zwischen r und s eine Gleichung

$$\varphi(r, s) = 0$$

besteht.

Statt dieser Gleichung kann man annehmen, dass zwischen r und einer beliebigen Grösse t und ebenso zwischen s und t eine Gleichung besteht. Löst man diese Gleichungen nach s und r auf, so erhält man

$$r = f_1(t), \quad s = f_2(t)$$

Wenn also die Gleichung

$$\zeta = f_1(t)\alpha' + f_2(t)\gamma' \tag{63.}$$

gegeben ist, so kann man den durch sie dargestellten Ort ermitteln.

Ist umgekehrt irgend ein Ort — Curve — durch irgend eine geometrische Eigenschaft erklärt, so kann man aus dieser Eigenschaft eine Gleichung ableiten, die durch die Werte von r und s jeder geraden Linie des Ortes erfüllt wird.

Jede gerade Linie, deren Coordinaten

$$u = f_2(t), \quad v = f_1(t) \quad \text{oder} \quad (-1)^s u\, u = \{\zeta\gamma'\}, \quad (-1)^s v = \{\zeta\alpha'\} \tag{63'.}$$

die Gleichung der Curve (63) genügen, ist Tangente der betr. Curve; die Curve ist umhüllt von den geraden Linien, deren Coordinaten der Gleichung der Curve genügen. Man kann leicht die Gleichung des Berührungspunktes und die Coordinaten desselben bestimmen. Der Schnittpunkt der beiden geraden Linien, die die Coordinaten.

$$\begin{aligned} u_1 &= f_2(t), \quad u_2 = f_2(t+hdt) \\ v_1 &= f_1(t), \quad v_2 = f_1(t+hdt) \end{aligned}$$

haben, hat nach den Gleichungen 47. die Coordinaten

$$x = -\frac{f_2(t+hdt) - f_2(t)}{f_1(t+kdt) - f_1(t)} = \frac{\dfrac{f_2(t+hdt) - f_2(t)}{h}}{\dfrac{f_1(t+hdt) - f_1(t)}{h}}$$

$$y = \frac{f_2(t)f_1(t+hdt) - f_1(t)f_2(t+hdt)}{f_2(t) - f_1(t) - f_2(t+hdt) - f_1(t+hdt)}$$

$$= \frac{f_2(t)\dfrac{f_1(t+hdt) - f_1(t)}{h} - f_1(t)\dfrac{f_2(t+hdt) - f_2(t)}{h}}{\dfrac{f_1(t+hdt) - f_1(t)}{h} - \dfrac{f_2(t+hdt) - f_2(t)}{h}}$$

Wird die Grösse h, die unabhängig von t ist, unendlich klein, so fällt dieser Schnittpunkt mit dem Berührungspunkt der durch die Gleichungen 63'. gegebenen Tangenten zusammen. Der Zähler (und Nenner) von x wird zum Differential $df_2(t)$ (und $df_1(t)$). Ist nämlich p eine Function von t, so definirt man das Differential dp mittelst der Gleichung

$$dp = df(t) = \lim_{h=0} \frac{f(t+hdt)-f(t)}{h} = \frac{df(t)}{dt}dt = f'(t)dt \qquad 64.$$

wo h eine reelle von t unabhängige Grösse ist. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind mithin

$$x = -\frac{f_2'(t)}{f_1'(t)}, \quad y = \frac{f_2(t)f_1'(t)-f_1(t)f_2'(t)}{f_1'(t)-f_2'(t)} \qquad 65.$$

Die Gleichung dieses Berührungspunktes ist mithin

$$uf_1'(t)-vf_2'(t)+f_1(t)f_2'(t)-f_2(t)f_1'(t)=0 \qquad 66.$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort, dass durch den Curvenpunkt alle geraden Linien gehen, die die Coordinaten

$$\left.\begin{array}{l} u = f_2(t)+zf_2'(t) \\ v = f_1(t)+zf_1'(t) \end{array}\right\} \qquad 66'.$$

haben. In diesen Gleichungen ist natürlich t gegeben und z ein Parameter, der alle möglichen reellen Werte haben kann. Nach der Gleichung 61. ist daher die Gleichung des betr. Curvenpunktes

$$\left.\begin{array}{l} \zeta = f_1(t)\alpha'+f_2(t)\gamma'+z\{f_1'(t)\alpha'+f_2'(t)\gamma'\} \\ \quad = \zeta_1+z\zeta_1' \end{array}\right\} \qquad 66''.$$

durch den die geraden Linien gehen, deren Gleichungen sind

$$\zeta = \frac{f_2(t)f_1'(t)-f_1(t)f_2'(t)}{-f_2'(t)}\alpha', \quad \zeta = \frac{f_2(t)f_1'(t)-f_1(t)f_2'(t)}{f_1'(t)}\gamma'$$

Die Gleichung 63. stellt einen Kegelschnitt dar, wenn $f_2(t)$ und $f_1(t)$ die Form haben

$$u = f_2(t) = \frac{l_2+m_2t+n_2t^2}{l_3+m_3t+n_3t^2}$$

$$v = f_1(t) = \frac{l_1+m_1t+n_1t^2}{l_3+m_3t+n_3t^2}$$

Eliminirt man t zwischen diesen Gleichungen, so ist die Gleichung des Kegelschnitts von der Form

$$a_{11}u^2+2a_{12}uv+a_{22}u^2+2a_{13}u+2a_{23}v+a_{33}=0 \qquad 67.$$

Auf der geraden Linie g, die die Coordinaten a, b hat, liegt ein Punkt M, dessen Gleichung

$$u-a-t(v-b)=0$$

ist, und auf einer anderen geraden Linie g', die die Coordinate a', b' hat, liegt ein Punkt M, dessen Gleichung

$$u - a' + \frac{b_1 t + d_1}{a_1 t + c_1}(v - b') = 0$$

oder

$$uc_1 + vd_1 - (a'c_1 + b'd_1) + t(ua_1 + vb_1 - (a'a_1 + b'b_1)) = 0$$

ist. Eliminirt man t zwischen diesen Gl., so erhält man eine Gleichung von der Form 67.

Wenn man in diesen Gleichungen der Grösse t alle möglichen reellen Werte gibt, so erhält man die Gleichungen von allen Punkten M der geraden Linie g und die Gleichungen von allen Punkten M' der geraden Linie g'; die durch ein und denselben Wert von t bestimmten Punkte M, M' nennt man bekanntlich entsprechende Punkte der zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger die geraden Linien g und g' sind. Die gerade Verbindungslinie der entsprechenden Punkte M, M' hat die Coordinaten

$$u = a + \frac{d_1(b' - b) + c_1(a' - a) + (b_1(b' - b) + a_1(a' - a))t}{d_1 + (c_1 - b_1)t + a_1 t^2}$$

$$= \frac{l_2 + m_2 t + n_2 t^2}{l_3 + m_3 t + n_3 t^2}$$

$$v = \frac{b'd_1 + c_1(a' - a) + (bc_1 + a_1(a' - a) + b_1 b')t + a_1 b t^2}{l_2 + m_2 t + n_2 t^2}$$

$$= \frac{l_1 + m_1 t + n_1 t^2}{l_3 + m_3 t + n_3 t^2}$$

Die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von zwei projectivischen Punktreihen umhüllen einen Kegelschnitt, der die Träger dieser Reihen berührt. Die Gleichung dieses Kegelschnittes ist mithin

$$\zeta = \frac{l_1 + m_1 t + n_1 t^2}{l_3 + m_3 t + n_3 t^2}\alpha' + \frac{l_2 + m_2 t + n_2 t^2}{l_3 + m_3 t + n_3 t^2}\gamma' \qquad 68.$$

Die einfachste Gleichung für die Kegelschnitte, die einen Mittelpunkt besitzen, ist

$$\zeta = t\alpha' + \frac{k}{t}\gamma', \quad \left(u = \frac{k}{t}, \quad v = t\right) \qquad 69$$

diese Gleichung stellt eine Ellipse dar, wenn k positiv und eine Hyperbel, wenn k negativ ist. Aus der Gleichung 69. erhält man

$$\{\zeta\alpha'\}\{\zeta\gamma'\} = k$$

Die Coordinaten eines Curvenpunktes sind

$$x = \frac{k}{t^2}, \quad y = \frac{2kt}{t^2 + k}$$

und da

$$\frac{u}{v} = \frac{k}{t^2}$$

ist, so ist

$$x = \frac{u}{v}$$

d. h. der Berührungspunkt teilt das Stück der Tangente, das zwischen den Axen liegt, im Verhältniss der Coordinaten der Tangente. Es ist A_1A_2 ein Durchmesser des Kegelschnittes und die Axen berühren den Kegelschnitt in den Punkten A_1, A_2.

Wenn die Axen des Coordinatensystems auf der Mittellinie senkrecht stehen, und

$$k = \pm \left(\frac{A_1A_2}{2}\right)^2$$

ist, so stellt die Gleichung 69. einen Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel dar.

Die Gleichung einer Parabel, die im Punkte L_1 von der Axe berührt wird, ist

$$\zeta = \left(\frac{2p^2}{t} + \frac{t}{2}\right)\alpha' + \frac{t}{2}\gamma' \qquad 70.$$

oder

$$\{\zeta\alpha'\}\{\zeta\gamma'\} = p^2 + \{\zeta\alpha'\}^2$$

Die Coordinaten eines Punktes der Parabel sind

$$x = \frac{t^2}{4p^2 - t^2}, \quad y = t \mp 2u$$

Durch einen Punkt der Curve, die durch die Gleichung 63. dargestellt ist, gehen die geraden Linien, deren Coordinaten nach de Gleichungen 66'. sind

$$u_1 = f_2(t) + zf_2'(t) = u + zf_2'(t) = u + zu'$$
$$v_1 = f_1(t) + zf_1'(t) = v + zf_1'(t) = v + zv'$$

Es seien die Axen des Coordinatensystems auf der geraden Linie A_1A_2 senkrecht. Die geraden Linien, die die Coordinaten

$$u = f_2(t), \quad v = f_1(t); \quad u_1, v_1$$

haben, sind auf einander senkrecht, wenn ist (nach Gl. 48')

$$(u_1 - v_1)(u - v) = -1$$

hieraus folgt

$$z = \frac{1 + (u - v)^2}{(v' - u')(u - v)}$$

also

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{u' + (u - v)(uv' - vu')}{(r' - u')(u - v)} \\ v_1 &= \frac{v' + (u - v)(uv' - vu')}{(v' - u')(u - v)} \end{aligned}\right\} \qquad 71.$$

Für einen gegebenen Wert von t ist mithin die Gleichung einer Normalen der Curve

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{f_1'(t) + (f_2(t) - f_1(t(f_2(t) f_1'(t) - f_1(t)f_2'(t))}{(f_1'(t) - f_2'(t))(f_2(t) - f_1(t))} \alpha' \\ &+ \frac{f_2'(t) + (f_2(t) - f_1(t))(f_2(t)f_1'(t) - f_1(t)f_2'(t))}{(f_1'(t) - f_2'(t))(f_2(t) - f_1(t))} \gamma' \qquad 72. \\ &= v_1\alpha' + u_1\gamma' \end{aligned}$$

Jede gerade Linie, deren Coordinaten u_1, v_1 dieser Gleichung genügen, ist Tangente an eine bestimmte Curve, der Evolute der durch die Gleichung 63. gegebenen Curve.

Die Gleichung 72. ist mithin die Gleichung der Evolute der durch die Gleichung 63. gegebenen Curve. Die gerade Linie, die durch die Coordinaten u_1, v_1 bestimmt ist, berührt die Evolute in einem Punkte, dessen Coordinaten nach der Gleichung 65. sind

$$x_1 = -\frac{u_1'}{v_1'}, \quad y_1 = \frac{u_1 v_1' - v_1 u_1'}{v_1' - u_1'} \quad \left(u_1' = \frac{du_1}{dt}, \quad v_1' = \frac{dv_1}{dt}\right) \qquad 73.$$

Auf dieser geraden Linie liegt ferner der Punkt der gegebenen Curve, der die Coordinaten

$$x = -\frac{u'}{v'}, \quad y = \frac{uv' - vu'}{v' - u'} \qquad 65.$$

hat. Der durch die Gleichungen 73. bestimmte Punkt der Evolute heisst der Krümmungsmittelpunkt des durch die Gleichungen 65. festgelegten Punktes der gegebenen Curve. Die Evolute ist der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve. Umgekehrt nennt man die Curve, die durch die Gleichung 63. bestimmt ist, die Evolvente der Curve, die mittelst der Gleichung 72. dargestellt ist. Ferner ist die Entfernung der beiden Punkte, deren Coordinaten durch die Gleichungen 73., 65. gegeben sind, gleich

$$\sqrt{\left(\frac{x - x_1}{(1+x)(1+x_1)}\right)^2 + (y - y_1)^2} = r \qquad 74.$$

die Zahl e gibt bekanntlich die absolute Länge des Krümmungshalbmessers der durch die Gleichung 63. gegebenen Curve.

Die Ecken des Coordinatentetraeders seien $A_1 A_2 A_3 A_4$ und die der Ecke A_n gegenüber liegende Seite sei a_n. Der Einheitspunkt E hat die Entfernung e_n von der Seite a_n Wenn die Abstände eines beliebigen Punktes P von den Seiten a_n mit p_n bezeichnet werden, so definirt die Gleichung

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{p_1}{e_1} : \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_3}{e_3} : \frac{p_4}{e_4} \qquad 75.$$

die „Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Punktes P.

Fällt der Punkt A_4 mit dem unendlich fernen Punkt zusammen, so sind die geraden Linien A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4, die Axen des Systems, parallel. Der Einfachheit wegen nimmt man an, dass die Axen auf der Ebene $A_1A_2A_3$ senkrecht stehen. Die den Axen parallelen geraden Linien PP', EE' treffen die Fundamentalebene $A_1A_2A_3$ in den Punkten P', E' und eine den Punkt P enthaltende Ebene hat mit den Axen $A_1A_4^{\infty}$, $A_2A_4^{\infty}$, $A_3A_4^{\infty}$ die Punkte L, M, N gemeinschaftlich. Die geraden Linien LM, MN, NL treffen bzhw. die Dreiecksseiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 in drei Punkten H, J, K, die in einer geraden Linie liegen. Nach der Gleichung 10. ist

$$(P'A_2A_3) + (P'A_3A_1) + (P'A_3A_2) = (A_1A_2A_3)$$
$$(E'A_2A_3) + (E'A_3A_1) + (E'A_1A_2) = (A_1A_2A_3)$$

Den Punkt E kann man so festlegen, dass ist

$$(E'A_2A_3) = (E'A_3A_1) = (E'A_1A_2) = \tfrac{1}{3}(A_1A_2A_3), \quad E'E = \tfrac{1}{3}$$

Es ist

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{(P'A_2A_3)}{(A_1A_2A_3)} : \frac{(P'A_3A_1)}{(A_1A_2A_3)} : \frac{(P'A_1A_2)}{(A_1A_2A_3)} : \frac{P'P}{3E'E} \qquad 75'.$$

Die Richtung von E' nach E soll als die positive gelten.

Man kann als „Coordinaten eines Punktes P den axenparallelen Abstand $P'P$“ desselben von der Fundamentalebene $A_1A_2A_3$ „in Verbindung mit den Verhältnissen“

$$\frac{(P'A_2A_3)}{(A_1A_2A_3)} : \frac{(P'A_3A_1)}{(A_1A_2A_3)} : \frac{(P'A_1A_2)}{(A_1A_2A_3)}$$

betrachten; die Verhältnisse sind die Dreiecks-Coordinaten des Punktes P' in Bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$.

Die Coordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 einer Ebene, in der der Punkt P liegt, genügen der Gleichung

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0 \qquad 76.$$

Fällt der Punkt P der Reihe nach auf die Punkte A_1, A_2, A_3, so ist nach den Gleichungen 75'., 76,

$$\frac{u_1}{u_4} = -\frac{A_1L}{3E'E}, \quad \frac{u_2}{u_4} = -\frac{A_2M}{3E'E}, \quad \frac{u_3}{u_4} = \frac{A_3N}{3E'E}$$

Die Coordinaten der Ebene genügen daher der Relation

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = A_1L : A_2M : A_3N : 3EE' \qquad 76'.$$

Die von der Ebene auf den Axen bestimmten Längen A_1L, A_2M, A_3N kann man als die Coordinaten der Ebene LMN annehmen [1]). Bezeichnet man die Coordinaten mit u, v, w, so ist

$$u = A_1L, \quad v = A_2M, \quad w = A_3N \qquad 76'',$$

und

$$\frac{u}{v} = \frac{A_1L}{A_2M} = \frac{HA_1}{HA_2}, \quad \frac{v}{w} = \frac{A_2M}{A_3N} = \frac{JA_2}{JA_3}, \quad \frac{w}{u} = \frac{A_3N}{A_1L} = \frac{KA_3}{KA_1}$$

Man kann in der Ebene $A_1A_2A_3$ einen Punkt O so bestimmen [2]) dass ist

$$\frac{A_1L}{A_2M} = \frac{(OA_3A_1)}{(OA_1A_2)}, \quad \frac{A_2M}{A_3N} = \frac{(OA_1A_2)}{(OA_2A_3)}$$

Die Coordinaten der Ebene LMN sind daher

$$\left.\begin{array}{l} u = l\dfrac{(OA_3A_1)}{(A_1A_2A_3)}, \quad v = l\dfrac{(OA_1A_2)}{(A_1A_2A_3)}, \quad w = l\dfrac{(OA_2A_3)}{(A_1A_2A_3)} \\ u + v + w = l \end{array}\right\} \qquad 75''.$$

Als Coordinaten des Punktes P kann man die Zahlen

---

1) Unverzagt: „Theorie der goniometrischen etc. Quaternionen, Wiesbaden 1876". S. 94—100.

2) Unverzagt setzt

$$\frac{A_1L}{A_2M} = \frac{(OA_2A_3)}{(OA_3A_1)}, \quad \frac{A_2M}{A_3N} = \frac{(OA_3A_1)}{(OA_1A_2)}$$

$$x = \frac{(P'A_3A_1)}{(P'A_2A_3)},\quad y = \frac{(P'A_1A_2)}{(P'A_2A_3)},\quad z = P'P \qquad 77.$$

nehmen.

Liegt der Punkt P in der Ebene LMN, so ist

$$z = \frac{u + vx + wy}{1 + x + y} \qquad 78.$$

Sind in dieser Gleichung die Grössen u, v, w gegeben, so ist „sie die Gleichung der durch die Coordinaten u, v, w bestimmten Ebene;“ sind jedoch die Grössen x, y, z gegeben, so ist „sie die Gleichung des durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punktes.“ Die allgemeine Gleichung ersten Grades zwischen u, v, w

$$Au + Bv + Cw + D = 0 \qquad 79.$$

stellt einen Punkt dar, dessen Coordinaten sind

$$x = \frac{B}{A},\quad y = \frac{C}{A},\quad z = -\frac{D}{A + B + C} \qquad 79'.$$

Die Axen des Coordinatensystems sollen mit den Einheitsvectoren α', β', γ' gleiche Anfangspunkte und gleiche Richtung haben. Eine bei den Einheitsstrecken parallele Strecke w, deren Anfangspunkt O in der Ebene $A_1A_2A_3$ liegt, ist nach Gleichung 11. aequivalent

$$\omega = l\left(\frac{(O\,A_2A_3)}{(A_1A_2A_5)}\alpha' + \frac{(O\,A_3A_1)}{(A_1\,A_2A_3)}\beta' + \frac{(O\,A_1A_2)}{(A_1A_2A_3)}\gamma'\right)$$

$$\omega = (w\alpha' + u\beta' + u\gamma') \qquad 80.$$

oder wenn w' die entsprechende Einheitsstrecke ist,

$$(u + v + w)w' = \omega\alpha' + u\beta' + v\gamma' \qquad 80'$$

Die Strecke ω kann mithin als der Repräsentant der Ebene betrachtet werden, die auf den Axen die Stücke u, v, w abschneidet. Aus dieser Gleichung folgt leicht die Construction des Punktes O.

Die Gleichung 80. stellt einen Punkt dar, wenn u, v, w lineare Functionen von zwei Parametern t mit t_1 sind. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Ebenen, deren Coordinaten u, v, w sind. Es sei

$$u = a + bt + ct_1,\quad v = a_1 + b_1t + c_1t_1,\quad w = a_2 + b_2t + e_2t_1 \qquad 81$$

also ist

$$= w_1\alpha' + u_1\beta' + v_1\gamma' + (w_1\alpha' + u_1'\beta' + v_1'\gamma')t_1 \qquad 83'''.$$

…iden sich diese geraden Linien in einem Punkte, so ent-…er die beiden geraden Linien enthaltenden Ebene nach … 83″. eine Strecke ω und nach Gleichung 83‴. eine Strecke …n Strecken müssen offenbar identisch sein. Es ist mithin …ichung 6′.

$$\begin{aligned} w + w't &= w_1 + w_1't_1 \\ u + u't &= u_1 + u_1't_1 \\ v + v't &= v_1 + u_1't_1 \end{aligned}$$

…e Bedingung, dass die beiden geraden Linien sich schneiden, …hin

$$\begin{vmatrix} u - u_1 & u' & u_1' \\ v - v' & v' & v_1' \\ w - w_1 & w' & w_1' \end{vmatrix} = 0 \qquad 83''''$$

Man kann die Ebenen so bestimmen, dass sie die drei gegebenen …en Linien enthalten und einer vierten geraden Linie parallel … Die Schnittlinien der Ebenen seien die Strecken $m\alpha'$, $n\beta'$, $p\gamma'$. Gleichungen der gegebenen geraden Linien sind

$$\begin{aligned} \omega &= c\alpha' + b\gamma' + t\beta' \\ \omega &= c_1\alpha' + a_1\beta' + t\gamma' \\ \omega &= a_2\beta' + b_2\gamma' + t\alpha' \end{aligned}$$

…d die Gleichung 83‴ sei die der sich bewegenden geraden Linie. …ich bew… gerade Linie die gegebenen geraden Linien …chneid… …lten nach der Gleichung 83⁗ die Beziehungen

$$\frac{u - a_1}{w - c_1} = \frac{u'}{w'}, \quad \frac{u - a_2}{v - b_2} = \frac{u'}{v'}$$

… den … die Gl…

… $= (v - …$

$… + u\beta' + v\gamma'$

…fläche dar. …

… Linien, deren …

$$\omega = w_1\alpha' + u_1\beta' + v_1\gamma' + (\alpha' + \beta' + \gamma')t \qquad 84'.$$

die unendlich ferne gerade Linie.

Die Gleichung

$$\omega = (w_2\alpha' + u_2\beta' + v_2\gamma')t \qquad 85.$$

stellt eine gerade Linie dar, die in der Ebene $A_1A_2A_3$ und in der Ebene, deren Coordinaten u_2, v_2, w_2 sind, liegt.

Als Gleichung einer geraden Linie lässt sich auch die Formel

$$\omega = \delta + \varepsilon t \qquad 86$$

geben, wenn die Strecken δ, ε den Axen parallel sind und ihre Anfangspunkte in der Ebene $A_1A_2A_3$ liegen.

Wenn allgemein u, v, w Functionen von zwei Parametern t, t_1 sind, so ist die Gleichung 80. der Repräsentant einer Fläche und wenn u, v, w Functionen eines Parameters t sind, so stellt die Gleichung 80. eine Curve im Raum dar.

Die Gleichung einer Fläche hat die Form

$$w_1 = f_1(t, t_1)\alpha' + f_2(t, t_1)\beta' + f_3(t, t_1)\gamma' \qquad 87.$$

und die einer Curve im Raume hat die Form

$$w = f_1(t)\alpha' + f_2(t)\beta' + f_3(t)\gamma' \qquad 88.$$

Die Coordinaten der Ebenen, die diese räumlichen Gebilde **einhüllen**, sind bzhw.

$$u = f_2(t, t_1), \quad v = f_3(t, t_1), \quad w = f_1(t, t_1) \qquad 87'.$$

$$u = f_2(t), \quad v = f_3(t), \quad w = f_1(t) \qquad 88'.$$

Aehnlich den Ableitungen der Gleichungen der Tangenten, Normalen für Curven in der Ebene, kann man die Gleichungen der Tangentenebene, Normalen für Flächen und die der Tangenten, Normalebenen etc. für Curven im Raume bestimmen.

Es soll die Gleichung eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche abgeleitet werden. Man hat also die Gleichung der Fläche zu bestimmen, die durch eine längs dreier festen geraden Linien sich bewegende gerade Linie erzeugt wird.

Die Gleichung der sich bewegenden geraden Linie sei

$$\omega = w\alpha' + u\beta' + v\gamma' + (w'\alpha' + u'\beta' + v'\gamma')t \qquad 83''.$$

und die Gleichung einer anderen geraden Linie sei

$$\omega_1 = w_1\alpha' + u_1\beta' + v_1\gamma' + (w_1\alpha' + u_1'\beta' + v_1'\gamma')t_1 \qquad 83'''.$$

Schneiden sich diese geraden Linien in einem Punkte, so entspricht der die beiden geraden Linien enthaltenden Ebene nach Gleichung 83''. eine Strecke ω und nach Gleichung 83'''. eine Strecke ω_1; diesen Strecken müssen offenbar identisch sein. Es ist mithin nach Gleichung 6'.

$$\begin{aligned} w + w't &= w_1 + w_1't_1 \\ u + u't &= u_1 + u_1't_1 \\ v + v't &= v_1 + u_1't_1 \end{aligned}$$

Die Bedingung, dass die beiden geraden Linien sich schneiden, ist mithin

$$\begin{vmatrix} u - u_1 & u' & u_1' \\ v - v' & v' & v_1' \\ w - w_1 & w' & w_1' \end{vmatrix} = 0 \qquad 83''''$$

Man kann die Ebenen so bestimmen, dass sie die drei gegebenen geraden Linien enthalten und einer vierten geraden Linie parallel sind. Die Schnittlinien der Ebenen seien die Strecken $m\alpha'$, $n\beta'$, $p\gamma'$. Die Gleichungen der gegebenen geraden Linien sind

$$\begin{aligned} \omega &= c\alpha' + b\gamma' + t\beta' \\ \omega &= c_1\alpha' + a_1\beta' + t\gamma' \\ \omega &= a_2\beta' + b_2\gamma' + t\alpha' \end{aligned}$$

und die Gleichung 83''' sei die der sich bewegenden geraden Linie. Da die sich bewegende gerade Linie die gegebenen geraden Linien zugleich schneidet, so gelten nach der Gleichung 83'''' die Beziehungen

$$\frac{v-b}{w-c} = \frac{v'}{w'}, \quad \frac{u-a_1}{w-c_1} = \frac{u'}{w'}, \quad \frac{u-a_2}{v-b_2} = \frac{u'}{v'}$$

Wenn mithin zwischen den u, v, w die Gleichung

$$(w-c)(u-a_1)(v-b_2) = (v-b)(w-c_1)(u-u_2)$$

besteht, so stellt die Gleichung

$$\omega = w\alpha' + u\beta' + v\gamma'$$

ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche dar. Auf diesem Hyperboloid liegen auch die drei geraden Linien, deren Gleichungen

$$\omega = c_1\alpha' + b_2\gamma' + t\beta', \quad \omega = c\alpha' + a_2\beta' + t\gamma', \quad \omega = a_1\beta' + b\gamma' + t\alpha'$$

Eine gerade Linie, die diese drei geraden Linien zugleich schneidet, liegt auf demselben Hyperboloide.

Summen, Differenzen, Producte und Quotienten von Punkten, Vectoren und Strecken.

Man kann die Punkte A, B, C . . . als Vertreter paralleler, gleichgerichteter Einheitsstrecken α', β', γ' . . . auffassen, die in jenen Punkten ihren Anfang haben. Treten in der Rechnung Punkte auf, die parallele Strecken von gleicher Länge und Richtung darstellen, so nennt man sie g l e i c h w e r t i g e P u n k t e.

Wenn der Punkt A statt der Strecke α' genommen wird, so soll der Punkt nA der Repräsentant der Strecke $n\alpha'$ sein. Den Punkt nA, der eine Strecke von n Längeneinheiten darstellt, nennt man einen nf a c h e n oder nw e r t i g e n P u n k t. Aus diesen Erklärungen folgt: „Punkte werden addirt, bzhw. subtrahirt wie die parallelen Strecken, deren Repräsentanten die Punkte sind." Ferner ergibt sich, dass $C-B$ einen Punkt von der Grösse null darstellt, der auf der Geraden Linie BC im Unendlichen liegt.

Addirt man $C-B$ zu einem beliebigen dritten Punkt S, der mit B und C gleichwertig ist, so erhält man einen Punkt F, der aus S entstanden ist, durch Verschiebung des Punktes S um die Strecke SF, die parallel, gleichgerichtet und gleich lang der Strecke BC ist. Es ist nämlich (Fig. 2.)

$$\begin{aligned} S + (C - B) &= (S + C) - B \\ &= 2D - B \\ &= F \end{aligned}$$

Da aber D in der Mitte von CS liegt, und

$$BD = DF$$

ist, so ist SF parallel und gleich BC. Es ist also $C-B$ ein Operator, der einen Punkt, zu dem er addirt wird, um eine Strecke verschiebt, die parallel, gleichgerichtet und gleich lang BC ist. Durch die Strecke BC ist $C-B$ als Operator im gegebenen Sinne vollständig bestimmt; umgekehrt ist durch $C-B$ als Operator die bestimmte Strecke BC nicht ganz festgelegt.

Nimmt man $C-B$ als Repräsentant einer Translation parallel, gleichgross und gleichgerichtet BC, so kann man die Definitionsgleichung

$$C - B = [BC] \tag{89.}$$

aufstellen. Man muss sich immer bewusst sein, dass $[BC]$ ein Operator ist, der einen Punkt, zu dem er addirt wird, um eine Strecke verschiebt, die gleichgerichtet, gleich lang und parallel mit $[BC]$ ist. Diese Differenz $C-B$, also $[BC]$ nennt Möbius und Grassmann „Strecke", Hamilton hat für diese Differenz den Namen „Vector" eingeführt und Unverzagt gebraucht den Namen „Differenzvector".

Die Definitionsgleichung 89. führt zu dem Satze: „Zwei gleich lange, parallele, gleichgerichtete Vectoren sind gleich". Es ist nämlich (Fig. 2.)

$$C - B = [BC]$$

und

$$B - C = [CB]$$

also das bekannte Resultat

$$[BC] = -[CB] \tag{90}$$

Aus

$$C - B = [BC]$$
$$S - B = [BS]$$

folgt

$$C + S - 2B = [BC] + [BS]$$

Es ist also

$$C + S = 2D = F + B, \qquad 2D - 2B = F - B$$
$$2D - 2B = 2(D - B) = 2[BD] = [BF]$$

also

$$[BC] + [BS] = [BF]$$

Es ist aber

$$[BC] + [CF] = (C - B) + (F - C) = F - B = [BF]$$

mithin

$$[BC] + [CF] = [BC] + [BS] = [BF] \tag{91.}$$

d. h. $[CF]$ und $[BS]$ sind gleich, und CF, BS sind als gleichgerichtete Gegenseiten eines Parallelogramms gleich. Die Gleichungen 90. und 91. definiren die Addition und Substraction von Vectoren.

Der von Unverzagt[1]) eingeführte durch „die vielfachen Punkte mA, nB festgelegte Quotientvector“ (mA, nB) ist durch den Quotienten

$$\frac{nB}{mA} = (mA, nB) \qquad 92.$$

definirt“. Man nennt „mA den Anfangs- und nB den Endpunkt des Quotientvectors (mA, nB)“.

Es ist

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{B}{A} = (A, B) \qquad 92'.$$

und da

$$\frac{n\beta'}{m\alpha'} = \frac{n}{m}\,\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{np}{mp}\,\frac{\beta'}{\alpha'}$$

so ist,

$$\frac{n}{m}(A, B) = (mA, nB) = \left(A, \frac{n}{m}B\right) \qquad 92''.$$

$$= \left(\frac{m}{n}A, B\right) = (mpA, npB)$$

Es ist also $\frac{n}{m}(A, B)$ gleich dem durch die vielfachen Punkte mpA, npB bestimmten Quotientenvector (mpA, npB). „Zwei Quotientenvectoren (mA, nB), $(m_1 C_3, n_1 D)$ sind gleich, wenn

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$$

ist und die Strecken AB, CD gleich gross, parallel und gleichgerichtet sind“. Die Quotientenvectoren (mA, nB); $(m_1 C, n_1 D)$ heissen parallel, wenn die Strecken AB, CD parallel sind; diese Quotientvectoren sind gleichgerichtet, wenn die Strecken AB, CD gleichgerichtet sind.

Nach den Gleichungen 92. ist ferner

$$\left.\begin{array}{l} (A, A) = (mA, mA) = 1, \quad (mA, nB)(nB, mA) = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (A, B)(B, C) = A, C \\ (A, B)(B, C)(C, D) \ldots (M, N) = (A, N) \end{array}\right\} \qquad 93.$$

„Für die vier Grundrechnungen der Quotientvectoren gelten im allgemeinen die Gesetze der Arithmetik“ (nach den Gl. 20—26).

---

1) Unverzagt: „Theorie der goniometrischen etc. Functionen 1876“. S. 229.

Wenn A, B, C, D die Eckpunkte eines Parallelogramms, dessen Diagonalen AC, BD sich im Punkte E schneiden, sind, so erhält man aus den Gleichungen 28'., 28''. die Formeln

$$\frac{B}{A} = \frac{C}{D}, \quad \frac{C}{B} = \frac{D}{A}, \quad B + D = 2E, \quad \frac{B+D}{N} = \frac{B}{N} + \frac{D}{N} = \frac{2E}{N}$$

$$\frac{B}{A} D = C, \quad \frac{C}{B} A = D, \quad A + C = 2E, \quad \frac{A+C}{E} = \frac{A}{E} + \frac{C}{E} = 2\frac{E}{E}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} (A, B) = (D, C), \quad (B, C) = (A, D) \\ \qquad\qquad (N, B) + (N, D) = (N, 2E) \\ (A, B)D = C, \quad (B, C)A = D, \quad (E, A) + (E, C) = (E. 2E) = 2 \\ \text{und} \\ (A. mB)pD = pmC, \quad (B, mC)pA = pmD \end{array}\right\} \quad 94.$$

Daher ist (A, mB) ein Factor, der einen p-fachen Punkt im Raume durch Multiplication um die Länge AB in einer Richtung verschiebt, die parallel und gleichstimmig mit AB ist und den verschobenen Punkt zu einem pm-fachen Punkte macht. Ferner ist die Summe der zwei von einem Punkte N ausgehenden Quotienten $(N, B) + (N, D)$ gleich einem Quotientvector, der durch den Punkt N und den Schwerpunkt der Punkte B, D bestimmt ist. Allgemein ist

$$(N, A) + (N, B) + (N_1, C) + (N, D) + \ldots (N, M) = (N, mP) \quad 95.$$

wenn P der Schwerpunkt der m Punkte $A, B, C, D \ldots M$ ist. Die Formel 95. erhält man aus der Gleichung

$$m\alpha' + r\beta' = (n + r)\gamma'$$

oder

$$nA + rB = (n + r)C$$

daher

$$(N, nA) + (N, rB) = (N, (n + r)C)) \quad 96.$$

Der Punkt C liegt auf der geraden Verbindungslinie A, B.

Die Formel 96. kann man benutzen, um die Summe von zwei beliebigen Quotientvectoren (mA, nB), $(m_1 C, n_1 D)$ zu bilden. Man verschiebt CD parallel, bis der Punkt C in den Punkt B und der Punkt D nach F fällt. Es ist dann

$$(m_1C,\ n_1D) = (m_1A,\ n_1F) = \left(A,\ \frac{n_1}{m_1}F\right)$$

$$\frac{n}{m}B + \frac{n_1}{m_1}F = \left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right)J$$

und

$$(mA,\ nB) + (m_1C,\ n_1D) = \left(A,\ \frac{n}{m}B\right) + \left(A,\ \frac{n_1}{m_1}F\right)$$

$$= \left(A,\ \left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right)J\right)$$

Ist

$$m = m_1 = n = n_1 = 1$$

und liegt der Punkt A in der Mitte der Strecke BF, so ist

$$(A,\ B) + (B,\ A) = (A,\ 2A) = 2$$

Setzt man in der Gleichung 28.

$$q_1 = (A,\ B) \quad q_2 = (B,\ C), \quad q_3 = (C,\ D)\ .\ .\ .\ q_s = (S,\ A)$$

so erhält man allgemein

$$(A,\ B) + (B,\ C) + (C,\ D) + (D,\ E) + \cdot\ \cdot\ \cdot + (S,\ A)$$
$$= (A,\ sA) = s$$

und

$$\left.\begin{aligned}(A,\ B)^n &= n(A,\ B) - (n-1) = (A,\ nB) - (A,\ (n-1)A)\\ (A,\ B)(C,\ D) &= (A,\ B) + (C,\ D) - 1\\ &= (A,\ B) + (C,\ D) - (A,\ A)\end{aligned}\right\}$$

Obgleich $(A,\ B)$ nicht gleich $(C,\ D)$ ist, so ist

$$\{(A,\ B) - (C,\ D)\}^2 = 0$$

Aus den Gleichungen 96. folgt die Formel

$$\begin{aligned}(A,\ E) + (A,\ B) - (CD) &= (A,\ E) + (A,\ B) - (A,\ F)\\ &= (A,\ E + B - F)\\ &= (A,\ H)\end{aligned}$$

die Strecke EH ist gleich, parallel und gleichgerichtet der Stre[cke] FB.

Die Gleichung

$$(A,\ B)^n = (A,\ nB) - (A,\ (n-1)A)$$

kann man auch schreiben

$$(A, B)^n = (A, nB - (n-1)A)$$
$$= (A, C) \qquad 98'.$$

wenn

$$AC = nAB$$

ist. Es ist also „$(A, B)^n$ ein Quotientfactor bestimmt durch den Punkt A und einen Punkt C der geraden Linie AB, dessen Entfernung vom Punkte A gleich der n-fachen Entfernung des Punktes B vom Punkte A ist, oder $(A, B)^n$ ist ein Factor, der einen Punkt im Raume durch Multiplication um die Länge $n \,.\, AB$ in einer Richtung verschiebt, die parallel und gleichstimmig mit AB ist."

Der Quotientvector kann auch durch das Product zweier Punkte dargestellt werden. Es ist nämlich

$$\beta' \,.\, \alpha' = (-1)^s \frac{\beta'}{\alpha'}$$

also

$$m\beta' \,.\, n\alpha' = mn(\beta' \,.\, \alpha') = (-1)^s mn \frac{\beta'}{\alpha'},$$

oder, wenn man statt der Strecken deren Anfangspunkte nimmt,

$$mB \,.\, nA = mn(B \,.\, A) = (-1)^s mn \frac{B}{A} = (-1)^s mn (A, B)$$
$$= (-1)^s (A, mn B)$$

Der Definition nach gelten die Gleichungen

$$mA \,.\, nA = (-1)^s (A, mnA) = (-1)^s mn = mB \,.\, nB$$
$$mA \,.\, mB = (-1)^s (B, mnA)$$

Ein solches Product $A \,.\, B$ unterscheidet sich sowol von dem durch Grassmann als auch von dem durch Unverzagt eingeführten Product von zwei Punkten. Grassmann setzt

$$A \,.\, B = C \,.\, D$$

wenn die Strecken AB, CD gleich lang, gleichgerichtet sind und auf einer geraden Linie liegen. Es bedeutet $A \,.\, B$ die Linie, die A und B zu Grenzpunkten hat, aufgefasst als bestimmten Teil der durch A und B bestimmten unendlichen geraden Linie. Dies Product $A \,.\, B$ nennt Grassmann der Aeltere „L i n i e n t e i l", Hankel und E. Müller gebrauchen den Namen „G e r a d e n s t ü c k", Budde benutzt den Ausdruck „l i n i e n f l ü c h t i g e n V e c t o r" und H. Grassmann der Jüngere hat dafür das Wort „S t a b" eingeführt. Die Gesetze der Addition und Subtraction solcher Stäbe können hier nicht der Betrachtung unterworfen werden.

Unverzagt versteht unter dem Producte $A \,.\, B$ zweier einfachen Punkte den Punkt D^2, der mit dem Mittelpunkte der Strecke AB zusammenfällt. Diese Erklärung erhält man durch folgende Betrachtung. Die Rechnung mit Punkten kann man von der Rechnung mit Strecken frei machen. Man definirt die Addition von Punkten, übereinstimmend mit Moebius, den Quotienten von zwei Punkten durch die Gleichung 92, nimmt die Gesetze der Arithmetik an, ferner fasst man A^n als einen Punkt auf, der mit dem einfachen Punkt A zusammenfällt. Ausserdem soll die Gleichung

$$(A,\, B) = (C,\, D)$$

nur dann richtig sein, wenn die Strecken AB, CD gleich lang, gleichgerichtet und parallel sind. Ist der Punkt A der Mittelpunkt der Strecke DB, so ist

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{B}{A} \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{A} \cdot \frac{A}{D} = \frac{B}{D} = \frac{2A - D}{D} = 2\frac{A}{D} - 1 = 2\frac{B}{A} - 1$$

Durch den Schluss von n auf $n + 1$ folgt die Gleichung

$$\left(\frac{B}{A}\right)^n = n\frac{B}{A} - (n-1) = \frac{C}{A}, \quad AC = nAB \qquad 98'.$$

Liegen die Punkte A, B, C, D so in einer geraden Linie, dass ist

$$(n-1)A + C = nB, \quad pA + nB = (n+p)D$$

so ist nach der Gleichung 98′.

$$(A,\, B)^n = (A,\, C), \quad (A,\, D)^{n+p} = (A,\, C)$$

also

$$\left(\frac{B}{A}\right)^n = \left(\frac{D}{A}\right)^{n+d}$$

Da die Gesetze der Arithmetik gelten sollen, so hat man

$$\left(\frac{B}{A}\right)^n = \frac{B^n}{A^n}, \quad \frac{B^n}{A^n} A^{n+p} = B^n A^p, \quad (A,\, B)^n = (A^n,\, B^n) \qquad 101.$$

mithin

$$B^n \,.\, A^p = D^{n+p} = A^p \,.\, B^n \qquad 102.$$

Es ist das „Product von n einfachen Punkten A gleich einem Punkte $n$ter Ordnung A^n und es definirt die Gleichung 102, in Verbindung mit der Gleichung

$$nB + pA = (n+p)D \qquad 102'.$$

das Product von zwei Punkten p ter und $n$ter Ordnung". Es ist für

in der Tat

$$n = p = 1$$

$$A \, . \, B = B \, . \, A = D^2 \qquad 103.$$

Aus der Gleichung 98'. erhält man ferner

$$\frac{rB^n + sA^n}{A^n} = \frac{rn\,B - (n-1)\,rA + sA}{A} = \frac{(r+s)H}{A}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} sA^n + rB^n &= (s+r)H \, . \, A^{n-1} = (s+r)C^n \\ \text{und} \quad sA + rB &+ (s+r)C \end{aligned}\right\} \qquad 104.$$

Für die Punkte A^n, B^n . . . gelten also in Bezug auf Addition und Subtraction dieselben Gesetze, die in Bezug auf Addition und Subtraction von einfachen Punkten bestehen. Es stellt also $B^n - A^n$ entweder einen Punkt $n$ter Ordnung im Unendlichen dar, oder es ist ein Operator, der zu einem Punkte $n$ter Ordnung addirt diesen um AB, parallel und gleichgerichtet mit AB verschiebt.

Mit Hilfe der Gleichungen 102., 103., 104. kann man die Summe von zwei beliebigen Quotientvectoren (mA, nB), (m_1C, n_1D) bestimmen. Es ist

$$(mA, nB) + (m_1C, n_1D) = \frac{nB}{mA} + \frac{n_1D}{m_1C} = \frac{nm_1B \, . \, C + n_1mA \, . \, D}{mm_1A \, . \, C}$$

Die Punkte E, H, K, L seien die Mittelpunkte der Strecken AC, BC, AD und EM. Man hat daher nach der Gleichung 104.

$$\frac{nm_1B \, . \, C + n_1mA \, . \, D}{mm_1A \, . \, C} = \frac{nm_1H^2 + n_1mK^2}{mm_1E^2}$$

und

$$nm_1H^2 + n_1mK^2 = (nm_1 + n_1m)L^2$$

also

$$(mA, nB) + (m_1C, n_1D) = \left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right)\frac{L^2}{E^2}$$

Es ist aber

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{L}$$

mithin

$$\left(\frac{L}{E}\right)^2 = \frac{L^2}{E^2} = \frac{M}{E}$$

und

$$(mA, nB) + (m_1C, n_1D) = \left(\frac{u}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right)\frac{M}{E} = \left(E, \left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right)M\right) \qquad 96''.$$

Der Punkt M ist durch die Gleichung

$$2\left(\frac{n}{m}+\frac{n_1}{m_1}\right)M=\left(\frac{n_1}{m_1}-\frac{n}{m}\right)(A-C)+2\frac{n}{m}B+2\frac{n_1}{m_1}D \qquad 96''.$$

gegeben.

Wenn

$$n=m=n_1=m_1=1$$

und die Strecken AB, CD parallel und gleichgerichtet sind, so ist EM die Mittellinie des Trapezes $ABCD$.

Wenn die Strecken AB, CD parallel, gleichlang und entgegengesetzt gerichtet sind, so ist M der unendlich ferne Punkt der Mittellinie des Trapezes $ABCD$.

Das Product der zwei Quotientvectoren ist

$$(mA,\ nB)(m_1C,\ n_1D)=\frac{nn_1}{mm_1}(A,\ B)(C,\ D)$$
$$=\frac{nn_1}{mm_1}\,\frac{B\ .\ D}{A\ .\ C}$$

Wenn G der Mittelpunkt von BD und von EF ist, so hat man

$$\frac{B\ .\ D}{A\ .\ C}=\frac{G^2}{E^2}=\frac{F}{E}$$

also

$$(mA,\ nB)(m_1C,\ n_1D)=(mm_1E,\ nn_1F) \qquad 93'.$$

Wenn

$$(B,\ C_1)=(C,\ D)$$

so erhält man die Gleichung 93.

$$(A,\ B)(B,\ C_1)=(A,\ C_1)$$

Es seien AB, CD und ferner AB_1, CD_1, parallele gleichgerichtete Strecken; die absoluten Längen dieser Strecken seien der Reihe nach a, b, 1, $\dot{1}$. Man hat also

$$AB=a\ .\ AB_1,\quad CD=b\ .\ CD_1$$

Gelten die Gleichungen 92., 98, 102., 104. als Definitionsgleichungen auch für den Fall, dass die Zahlenfactoren m, n, m_1, n_1, r, s etc. irrational sind, so hat man

$$\left(\frac{B_1}{A}\right)^a=\frac{B}{A},\quad \left(\frac{D_1}{C}\right)^b=\frac{D}{C}$$

und

$$\frac{B\ .\ D}{A\ .\ C}=\frac{B_1{}^a}{A^a}\ .\ \frac{D_1{}^b}{C^b}=\frac{N^{a+b}}{P^{a+b}}=\frac{R}{P}$$

Die absolute Länge von PR ist gleich $a+b$ und die Punkte N, P sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} aB_1 + bD_1 &= (a+b)N \\ aA + bC &= (a+b)P \end{aligned}$$

bestimmt. Aus den Gleichungen folgt

$$(A, B)(C, D) = (P, R) \qquad 93''.$$

Bezeichnet man die Strecken AB. CD, PR mit α_1, γ_1, π_1, so ist

$$\pi_1 = \alpha_1 + \gamma_1 \qquad 93''$$

Wenn die Strecken AB, CD parallel, jedoch entgegengesetzt gerichtet sind, so bestimmen ebenfalls die Gleichungen 93''. das Product der Quotientvectoren $(A, B) \cdot (C, D)$.

Setzt man in den Gleichungen 96''., 98''. und 98'. statt der Quotientvectoren (A, B), (C, D), (P, R), (E, M) die Quotienten der gleichgerichteten, parallelen Einheitsstrecken $\frac{\beta'}{\alpha'}$, $\frac{\delta'}{\gamma'}$, $\frac{\varrho'}{\pi'}$, $\frac{\mu'}{\varepsilon'}$, deren Anfangspunkte die Punkte A, B, C, D, P, R, E, M bzhw. sind, so erhält man die richtigen Gleichungen

$$\frac{n\beta'}{m\alpha'} + \frac{m_1\gamma'}{n_1\delta'} = \left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right)\frac{\mu'}{\varepsilon'}$$

$$\frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\delta'}{\gamma'} = \frac{\varrho'}{\pi'}, \quad \left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)^n = n\frac{\beta'}{\alpha'} - (n-1)$$

Ferner kann man in den Gleichungen, die Producte und Potenzen von Punkten nicht enthalten, statt der Punkte mA, nB etc. und der Quotienten $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{D}$ etc. die Strecken $m\alpha'$, $n\beta'$ etc. und die Quotienten $\frac{\beta'}{\alpha'}$, $\frac{\gamma'}{\delta'}$ etc. nehmen. Hiermit ist nachgewiesen, dass man mittelst der von Unverzagt eingeführten Punktrechnung und aus der Annahme

$$(A, B) = \frac{B}{A} = \frac{\beta'}{\alpha'} \qquad 92'.$$

die Gesetze der Addition und Multiplication der Quotienten von parallelen Strecken erhält. Es ist selbstverständlich, dass man in dieser Punktrechnung für den Punkt

$$A^n (n = 1, 2 \ldots)$$

im allgemeinen nicht die Strecke α'_n nehmen kann; in den Rech-

nungen mit Strecken kann man $\frac{\beta'}{\alpha'}$ durch $\frac{B}{A}$ ersetzen, jedoch die Strecke α' im allgemeinen nicht durch den Punkt A. So z. B. kann man statt der Gleichung 40'.

$$b\beta'(\beta' \,.\, \alpha') = (\alpha' \,.\, \beta')\, b\beta'$$

oder

$$\beta\,\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\beta'}\,\beta$$

setzen

$$\beta(A,\ B) = (B,\ A)\beta \qquad 105.$$

aber nicht

$$B(A,\ B) = (B,\ A)B$$

Man kann ferner die Hamilton'schen Quaternionen mittelst Quotientvectoren darstellen. Nach der Gleichung 98'. ist für eine reelle Zahl n der Quotient $\left(\frac{B}{A}\right)^n$ oder der Quotientvector $(A,\ B)^n$ gleich einem Quotientvector $(A,\ C)$, dessen Endpunkt C auf der geraden Linie AC liegt; es ist

$$AC = nAB$$

Es seien AB, AC zwei Strecken, die den Winkel ϑ einschliessen, und es sei

$$AC = a \,.\, AB$$

Die Strecke AC_1 auf AC soll dieselbe absolute Länge wie AB haben. Da AC_1 aus AB durch Drehung der Strecke AB um den Winkel ϑ entsteht, so kann man setzen

$$(A_2 C_1) = (A_1\ B)^{f(\vartheta)}$$

wenn der Exponent $f(\vartheta)$ anzeigt, dass man AB um den Winkel ϑ drehen soll. Man hat

$$(A,\ C) = (A,\ C_1)^a = ((A,\ B)^a)^{f(\vartheta)}$$

Es ist dann klar, dass man hat

$$(A,\ C) = ((A,\ B)^{\,a})^{f(\vartheta)} = (A,\ B)^{af(\vartheta)} = ((A,\ B)^{f(\vartheta)})^a$$

Nimmt man wie in der Arithmetik die Gleichung

$$((A,\ B)^{f(\vartheta)})^{f(\vartheta_1)} = (A,\ B)^{f(\vartheta)\cdot f(\vartheta_1)}$$

wo $f(\vartheta_1)$ ein Exponent ist, der AB um den Winkel ϑ_1 in der Ebene BAC dreht, an; ist die Länge der Strecke AE der Ebene BAC gleich der Länge der Strecke AB, und ist der Winkel BAE gleich ϑ_1, so ist

$$(A, E) = (A, B)^{f(\vartheta+\vartheta_1)}$$

und ebenso

$$(A, E) = (A, C_1)^{f(\vartheta_1)} = ((A, B)^{f(\vartheta)})^{f(\vartheta_1)}$$

also

$$(A, B)^{f(\vartheta+\vartheta_1)} = (A, B)^{f(\vartheta)f(\vartheta_1)}$$

Es ist also

$$f(\vartheta + \vartheta_1) = f(\vartheta)f(\vartheta_1) \qquad 106.$$

Nach der Gleichung 93'. ist

$$(A, B)\,(A, C_2) = (A, F)$$

die Länge von AF ist, wenn AB gleich der Längeneinheit ist, gleich $2\cos\frac{\vartheta}{2}$ und der Winkel BAF ist gleich $\frac{\vartheta}{2}$, mithin ist

$$(A, F) = (A, B)^{2\cos\frac{\vartheta}{2}f\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= (A, B)\,(A, B)_{f}^{(\vartheta)}$$

Setzt man die Gesetze der Arithmetik voraus, so folgt aus dieser Gleichung

$$f(\vartheta) + 1 = 2\cos\frac{\vartheta}{2}f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \qquad 107.$$

Da die Gleichung 106.

$$f(\vartheta) = f\left(\frac{\vartheta}{2}\right)f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \left[f\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right]^2$$

giebt, so erhält man aus der Gleichung 107. die Gleichung

$$\left[f\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right]^2 - 2\cos\frac{\vartheta}{2}f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = -1 \qquad 108.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \cos\frac{\vartheta}{2} + i\,.\,\sin\frac{\vartheta}{2} \\ f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \cos\frac{\vartheta}{2} - i\,.\,\sin\frac{\vartheta}{2} \end{array}\right. \qquad i^2 = -1$$

also ist $f(\vartheta)$ entweder

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ f(\vartheta) = \cos\vartheta + i\,.\,\sin\vartheta \\ 2.\ f(\vartheta) = \cos\vartheta - i\,.\,\sin\vartheta \end{array}\right.\quad i^2 = -1 \Bigg\} \qquad 109.$$

Nimmt man für $f(\vartheta)$ den ersten Wert, so ist

und
$$\left.\begin{aligned}(A, C_1) &= (A_1 B)^{\cos\vartheta + i.\sin\vartheta}\\ (A, B) &= (A, C_1)^{\cos\vartheta - i.\sin\vartheta}\end{aligned}\right\} \qquad 109.$$

nimmt man für $f(\vartheta)$ den zweiten Wert, so ist

$$\left.\begin{aligned}(A, C_1) &= (A, B)^{\cos\vartheta - i.\sin\vartheta}\\ (A, B) &= (A, C_1)^{\cos\vartheta + i.\sin\vartheta}\end{aligned}\right\} \qquad 109'.$$

Stimmt also die Drehung, die der Exponent $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$ $\cos\vartheta - i\sin\vartheta$) anzeigt, mit der Uhrzeigerbewegung überein, so ist die durch den Exponenten $\cos\vartheta - i\sin\vartheta$, $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ bestimmte der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt gerichtet.

Man bezeichnet die Drehung um den Winkel ϑ, die mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt mit $+\vartheta$ und die Drehung um den Winkel ϑ, die der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt gerichtet ist mit $-\vartheta$. Man kann also setzen

$$(A, C) = (A, B)^{a(\cos\vartheta + i.\sin\vartheta)} \qquad 110.$$

wo ϑ das Zeichen $+$ oder $-$ hat, je nachdem die Drehung von AB in der Ebene BAC mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt oder nicht übereinstimmt, umgekehrt legt i alle Ebenen fest, die der Ebene BAC parallel sind. Nach Hamilton ist, wenn $AB = l$

$$a(\cos\vartheta + i\,.\,\sin\vartheta) = \frac{[AC]}{[AB]} = \frac{C-A}{B-A}$$

$$[AC]\,.\,[AB] = -\,al^2(\cos\vartheta + i\,.\,\sin\vartheta) \qquad 110'.$$

dieser Quotient wird Quaternion genannt [1]). Errichtet man in einem beliebigen Punkte M der Ebene der Quaternion (ABC) ein Perpendikel MN von der Längeneinheit. nach der Seite des Raumes, von der aus die Drehung ϑ mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmend gesehen wird, so setzt Hamilton

$$i = [MN] = N - M \qquad 110''.$$

Diese Annahmen Hamiltons werden im Folgenden nicht benutzt.

---

1) Vgl. u. A. meine „Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen", Leipzig 1883. Ich glaube an dieser Stelle darauf hinweisen zu dürfen, dass V. Balbin in seinen „Elementos de calculo de los cuaterniones", Buenos Aires 1887 im neunten und zehnten Capitel (Theorie der Curven u. Flächen) die bez. Abschnitte meiner Vorlesungen zum Teil übersetzt habe.

Ist A der Mittelpunkt der Strecke $C'B'$, so ist

$$(A, C') = (A; B)^{\cos\pi + i\sin\pi} = (A; B)^{-1}$$

unabhängig von der Ebene ABC.

Man ist berechtigt, die Definitionsgleichungen des Logarithmus

$$p^x = q, \quad x = {}^p\log q \qquad 111'.$$

auf den Fall, dass p und q Quotientvectoren sind, auszudehnen so dass man nach der Gleichung 110 setzen kann

$$a(\cos\vartheta + i \, . \, \sin\vartheta) = {}^{(A,\,B)}\log(A, C) \qquad 110'.$$

Man nennt a den **Modul** und ϑ das **Argument** der Quaternion.

Es ist also der „Logarithmus eines Quotientvectors (A, C) für einen zweiten Quotientvector (A, B) als Basis gleich der Quaternion aus den zwei Differenzvectoren $[AC]$ und $[AB]$.

Für die Logarithmen der Quotientvectoren kann man alle für die Quaternionen geltenden Sätze beweisen. Man kann die Sätze der Quaternionen beweisen mit Hülfe der Logarithmen von Quotientvectoren, wenn man annimmt, dass diesen Logarithmen die Eigenschaften

$${}^p\log q \, . \, {}^r\log p = {}^r\log q, \quad {}^r\log q + {}^r\log p = {}^r\log q \, . \, p \qquad 111'.$$

zukommen, jedoch im allgemeinen die Gleichungen

$${}^p\log q \, . \, {}^r\log p = {}^r\log p \, . \, {}^p\log q$$
$${}^p\log q \, . \, {}^r\log s = {}^r\log s \, . \, {}^p\log q$$

nicht gelten; die zwei letzten Gleichungen sind richtig, wenn die die Quotientvectoren p, r, q, s bestimmenden Punkte in **einer** Ebene (bzhw. parallelen Ebenen) liegen.

Ganz ähnlich kann man die Quotienten von parallelen Strecken mittelst der sog. parallelen Quotientvectoren darstellen. Nimmt man an, dass „Quotientvectoren nur dann gleich sind, wenn sie denselben Anfangs- und Endpunkt besitzen", so bedarf es natürlich einer besonderen Erklärung der Addition und Multiplication dieser Quotientvectoren. Für diese Quotientvectoren führt man am besten ein besonderes Zeichen ein; man bezeichnet den durch die Punkte mA und nB bestimmten Quotientvector mit $(mA; nB)$.

Es ist

$$(mA;\ nB) = (m_1 C;\ n_1 D)$$

wenn C auf A, D auf B fällt und

$$\frac{n}{m} = \frac{n_1}{m_1} \text{ ist.}$$

Von den Gleichungen 93''., 96''. ausgehend, erhält man folgende Definitionen:

1) „Unter der Summe von zwei parallelen Quotientvectoren $(mA;\ nB)$, $(m_1 C;\ n_1 D)$ versteht man einen Quotientvector $\left(E;\ \left(\frac{n}{m}+\frac{n_1}{m_1}\right) M\right)$, dessen Anfangs- und Endpunkt durch die Gleichungen

$$2E = A + C,\quad 2\left(\frac{n}{m}+\frac{n_1}{m_1}\right) M = \left(\frac{n_1}{m_1}-\frac{n}{m}\right)(A - C) + \frac{2n}{m} B + \frac{2n_1}{m_1} D \qquad 96''.$$

bestimmt sind". Die drei Quotientvectoren $(mA;\ nB)$, $(m_1 C;\ n_1 D)$, $\left(E;\ \left(\frac{n}{m}+\frac{n_1}{m_1}\right) M\right)$ sind parallel.

2) „Wenn die Strecke PR gleich der Summe der zwei parallelen Strecken AC, CD ist, so versteht man unter dem Product der zwei parallelen Quotientvectoren $(A;\ B)$, $(C;\ D)$ den Quotientvector $(P;\ R)$". Für diese Quotientvectoren gelten also die Gleichungen 93., 93'. nicht.

Diese Verknüpfungen genügen dem commutativen und associativen Gesetze.

Man kann leicht nachweisen, dass der Quotientvector $(A;\ B)^n$, wenn n eine reelle Zahl bezeichnet, gleich einem Quotientvector $(A;\ M)$ ist; es ist

$$AM = n\,AB$$

und der Punkt M liegt auf der geraden Linie AB. Es seien AB, CD zwei parallele gleichgerichtete Strecken, und es sei

$$CD = a \,.\, AB$$

die Strecke CD_1 auf CD soll dieselbe absolute Länge AB haben. Da man CD_1 aus AB durch Parallelverschiebung der Strecke AB um die Länge AC in der Richtung von A nach C erhält, so kann man setzen

$$(C;\ D_1) = (A;\ B)^{\varphi(AC)}$$

wenn $\varphi(AC)$ eine Translation anzeigt, die nach Grösse und Richtung durch AC bestimmt ist.

Man hat

$$(C;\ D) = ((A;\ B)^{\alpha})^{\varphi(AC)} = ((A;\ B)^{\varphi(AC)})^{\alpha}$$

Wenn

$$(A;\ B)\,(C;\ D_1) = (P;\ R)$$

ist, so ist

$$(P;\ R) = ((A;\ B)^2)^{\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}$$

$$(C;\ D_1)^2 = (P;\ R)^{\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}$$

mithin

$$(A;\ B)\,(A;\ B_1)^{\varphi(AC)} = ((A;\ B)^2)^{\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}$$

$$\{(A;\ B)^{\varphi(AC)}\}^2 = \{[(A;\ B)]^{2\,\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}\}^{\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}$$

Setzt man für diese Gleichungen die Gesetze der Arithmetik voraus, so erhält man

$$(A;\ B)^{\varphi(AC)+1} = (A;\ B)^{2\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}$$

$$(A;\ B)^{2\varphi(AC)} = (A;\ B)^{2\left[\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)\right]^2}$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(AC) + 1 = 2\varphi\left(\frac{AC}{2}\right) \\ &\varphi(AC) = \left[\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)\right]^2 \\ \text{mithin}\quad &\left[\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)\right]^2 = 2\varphi\left(\frac{AC}{2}\right) - 1 \end{aligned}\right\} \qquad 112.$$

Bezeichnet man die Strecken AB, CD_1 mit α' und γ', so genügen den Gleichungen 112.

$$1)\quad \varphi(AC) = 1, \qquad 2)\quad \varphi(AC) = \frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{C}{A}$$

$$\varphi\left(\frac{AC}{2}\right) = \frac{\gamma' + \alpha'}{2\alpha'} = \frac{A+C}{2A} = \frac{P}{A}$$

Da die Quotientvectoren $(A;\ B)$, $(C;\ D_1)$ nicht gleich sind, so ist

$$\varphi(AC) = \frac{\gamma'}{\alpha'} \tag{112'.}$$

und

$$(C;\ D) = (A;\ B)^{a\varphi(AC)} = (A;\ B)^{\frac{a\gamma'}{\alpha'}} \tag{113.}$$

Nach der Definitionsgleichung 111. ist mithin

$$\frac{a\gamma'}{a'} = {}^{(A;\ B)}\log(C;\ D) \tag{113'.}$$

Man erhält daher den Satz: „Der Logarithmus eines Quotientvectors $(C;\ D)$ für einen zweiten parallelen, gleichgerichteten Quotientvector $(A;\ B)$ als Basis ist gleich dem Quotienten der parallelen Strecken CD und AB“.

Allgemein hat man den Satz: „Wenn die Strecken AB, CF gleich lang, gleichgerichtet und parallel sind, und ebenso die Strecken AE, CD gleich lang, gleichgerichtet und parallel sind, so ist der Logarithmus des Quotientvectors $(C;\ D)$ für den Quotientvector $(A;\ B)$ als Basis gleich dem Producte der Quaternionen aus den zwei Vectoren $[AE]$ und $[AB]$ und des Quotienten der Strecken CD und AE oder gleich dem Producte des Quotienten der Strecken CF und AB und der Quaternion aus den zwei Vectoren $[CD]$ und $[CF]$“. Dieses Product nennt Unverzagt Biquaternion.

Es seien A und C die Anfangspunkte der parallelen, gleichgerichteten Einheitsstrecken α', γ_c'; die absoluten Längen von AB, CD seien mit a und c bezeichnet: ferner sei in der Ebene

ABE: $\quad AG' \parallel BE,\ \ G'E \parallel AB,\ \ AE$ skr. $CD,\ \ AB \# CF$
$\qquad EB'$ skr. $AB,\ \ AG$ skr. $AB,\ \ AG$ skr. EG

B' ein Punkt der geraden Linie AB, und in der Ebene CDF

DF' skr. $CF,\ \ CH$ skr. $CF,\ \ DH$ skr. CH

F' ein Punkt der geraden Linie CF; CD bilde mit AB den Winkel ϑ und AG' mit AB den Winkel ϑ'. Es ist

$$(A,\ G') = (A,\ B)^{\frac{c \sin\vartheta}{a \sin\vartheta'}(\cos\vartheta' + i\ .\ \sin\vartheta')}$$

$$(A,\ E) = (A,\ B)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\ .\ \sin\vartheta)}$$

also

$$(A,\ G')\,(A,\ B) = (A,\ B)^{\frac{c}{a}\left(\frac{a}{c} + \sin\vartheta \operatorname{cotg}\vartheta' + i\ .\ \sin\vartheta\right)}$$

$$= (A,\ B)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\ .\ \sin\vartheta)} \qquad i^2 = -1$$

mithin

$$(A,\ G')\,(A,\ B) = (A,\ E)$$

Diese Formel kann als Definitionsgleichung des Products $(A;\ G')\,(A;\ B)$ dienen, also

„Das Product von zwei Quotientvectoren $(A; G')(A;\ B)$ ist wieder ein Quotientvector $(A;\ E)$: die Strecke AE ist die Diagonale des durch die Strecken $(AG',\ AB)$ bestimmten Parallelogramms. Es gilt das commutative und associative Gesetz."

Man hat dann

$$\left.\begin{aligned} (A;\ E) &= (A;\ B)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\ .\ \sin\vartheta)} = (A;\ G')\,(A;\ B) \\ (C;\ D) &= (A;\ E)^{\frac{\gamma'}{\alpha'}} = \left\{(A;\ B)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\ .\ \sin\vartheta)}\right\}^{\frac{\gamma_1'}{\alpha'}} \end{aligned}\right\} \qquad 114.$$

und nach Gleichung 111., und der ersten Gleichung 111'.

$$\left.\begin{aligned} {}^{(A;\ B)}\log(C;\ D) &= \frac{\gamma_1'}{\alpha'}\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\ .\ \sin\vartheta) \\ &= \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}(\cos\vartheta + \ .\ i\sin\vartheta) \\ \text{oder} \qquad (C;\ D) &= \left\{(A;\ B)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\ .\ \sin\vartheta)}\right\}^{\frac{\gamma_1'}{\alpha'}} \\ &= (A;\ B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}(\cos\vartheta + i\ .\ \sin\vartheta)} \end{aligned}\right\} \qquad 115.$$

Ferner ist

$$(C;\,F) = (A;\,B)^{\frac{\gamma_1'}{\alpha'}}, \quad (C;\,D) = (C;\,F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}$$

$$= \{(A:\,B)^{\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}\}$$

und nach der Gleichung 111. und der ersten Gleichung 111'.

$$^{(A;\,B)}\log(C;\,D) = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{\gamma_1'}{\alpha'} = \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad 115'.$$

Für

$$c = a, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

erhält man

$$i\frac{\gamma_1'}{\alpha'} = \frac{\gamma_1'}{\alpha'}i \qquad 115''.$$

Die Gleichungen

$$(C;\,D) = (C;\,F')\,(C;\,H), \quad (C;\,F') = (A;\,B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}\cos\vartheta}$$

$$(C;\,H) = (A;\,B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}i\sin\vartheta}$$

geben

$$(A;\,B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = (A;\,B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}}\,(A;\,B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}i\sin\vartheta} \qquad 116.$$

Da man nach der Definition des Productes von parallelen Quotientvectoren

$$(C;\,D)^{m\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n\frac{\pi'}{\varrho'}} = (C;\,D)^{m\frac{\gamma_1'}{\alpha'}}\,(C;\,D)^{n\frac{\pi'}{\varrho'}}$$

$$= (C;\,D)^{n\frac{\pi'}{\varrho'}}\,(C;\,D)^{m\frac{\gamma_1'}{\alpha'}}$$

hat, wo α', γ_1', π', ϱ' gleichgerichtete parallele Einheitsstrecken sind, so ist

$$(C;\,F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\left(m\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n\frac{\pi'}{\varrho'}\right)}$$

$$= (C;\,F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\,m\frac{\gamma_1'}{\alpha'}}\,(C;\,F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\,n\frac{\pi'}{\varrho'}} \qquad 117.$$

Die Gleichungen 115.—117. sind mit Hilfe der Definitionen des Productes von parallelen Quotientvectoren und von Quotientvectoren, die denselben Anfangspunkt haben, und ferner der Gleichung 111. und der ersten Gleichung 111′. abgeleitet worden.

Nimmt man noch an, dass die zweite Gleichung 111′. besteht, wenn p, q, entweder parallele Quotientvectoren oder Quotientvectoren mit demselben Anfangspunkte sind, so erhält man aus den Gleichungen 116., 117. die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
&{}^{(A;\,B)}\log(C;\,D) = {}^{(A;\,B)}\log(C;\,F',)\,(C;\,H) \\
&\qquad\qquad = {}^{(A;\,B)}\log(C,\,F') + \log(C;\,H) \\
&\text{oder} \\
&{}^{(A;\,B)}\log\{(A;\,B)^{\frac{c\gamma'}{a\alpha'}\cos\vartheta}\,(A;\,B)^{\frac{c\gamma'}{a\alpha'}\,i\sin\vartheta}\} \\
&\quad = {}^{A;\,B}\log(A;\,B)^{\frac{c\gamma'}{a\alpha'}\cos\vartheta} + {}^{A;\,B}\log(A;\,B)^{\frac{c\gamma'}{a\alpha'}\,i\sin\vartheta} \\
&\frac{c\gamma'}{a\alpha'}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta) = \frac{c\gamma'}{a\alpha'}\cos\vartheta + \frac{c\gamma'}{a\alpha'}\,i\sin\vartheta
\end{aligned}\right\}\quad 116'.$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&{}^{(C;\,F)}\log(C;\,F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\left(m\frac{\gamma_1'}{\alpha'}+n\frac{\pi'}{\varrho'}\right)} \\
&\quad = {}^{(C;\,F)}\log(C;\,F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^{n}\frac{\gamma_1'}{\alpha'}} \\
&\quad + {}^{(C;\,F)}\log(C;\,F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\frac{n\pi'}{\varrho'}} \\
&\frac{c}{a}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\left(m\frac{\gamma_1'}{\alpha'}+n\frac{\pi'}{\varrho'}\right) \\
&\quad = \frac{c}{a}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)m\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + \frac{c}{a}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\frac{n\pi'}{\varrho'}
\end{aligned}\right\}\quad 117'$$

Mithin ist

$$(A;\,B)\,(A;\,B)^{(\cos\pi+i\sin\pi)\frac{\gamma_1'}{\alpha'}} = (A;\,B)\,(A;\,B)^{-\frac{\gamma_1'}{\alpha'}}$$

$$= (A;\,B)^{1-\frac{\gamma_1'}{\alpha'}}$$

$(A; B)\,(A; B)^{\cos\pi+i\sin\pi} = (A; B)\,(A; B)^{-1} = (A; B)^0$

$$(\cos\pi + i\sin\pi)\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'}$$

Die Quotienten $(A; B)$, $(A; B)$ sind entgegengesetzt parallel und das Product derselben ist nach der Definition und der letzten Gleichung ein Quotientvector, dessen Anfangspunkt auf AC im Unendlichen liegt und dessen Anfangspunkt und Endpunkt die Entfernung null haben. Die Quotientvectoren $(A; B)$, $(A; B)^{\cos\pi+i\sin\pi}$ haben denselben Anfangspunkt, und das Product derselben ist nach der Definition und der letzten Gleichung ein Quotientvector, dessen Anfangs- und Endpunkt mit dem Punkte A zusammenfallen. Fällt der Punkt A auf den Punkt C, so ist

$$\gamma_1' = \alpha'$$

und die beiden letzten Gleichungen stimmen überein.

Da ist

$$(A; B)^{m(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \,.\, (A; B)^{m(\cos(\varphi+\pi)+i_1\sin(\varphi+\pi))} = (A; B)^s$$

wo i_1 anzeigt, dass die Strecke AB nicht in der Ebene ABC gedreht werden soll, so ist das Zeichen $(A; B)^0$ für sich genommen, unbestimmt.

An einer Figur kann man leicht zeigen, dass für die rechte Seite der zweiten Gleichung 117'. ausser dem commutativen Gesetze das associative Gesetz gilt.

Um in Uebereinstimmung mit allen Lehren der allgemeinen Arithmetik zu bleiben, sollen die Formeln

$$(A; B)^u \,.\, (A; B)^v = (A: B)^{u+v} = (A: B)^{v+u} = (A; B)^v \,.\, (A; B)^u \qquad 116''.$$

$$\{(A; B)^u \,.\, (A; B)^v\} \,.\, (A; B)^w = (A; B)^u\{(A; B)^v \,.\, (A; B)^w\}$$

bestehen, Bei dieser Annahme ist das Product von zwei Quotientvectoren, die entweder denselben Anfangspunkt haben oder parallel sind, wieder ein Quotientvector, dagegen ist das Product von zwei Quotientvectoren, die weder denselben Anfangspunkt haben, noch parallel sind, nicht einem Quotientvector gleich.

Es seien nun AA_1, AB_1, AC_1 die Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems und

$$\left.\begin{array}{l} AA_1 = AB_1 = AC_1 = 1, \quad i_1^2 = -1, \quad i_2^2 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i_3^2 = -1 \\ (A;\,B_1) = (A;\,A_1)^{i_3}, \quad (A;\,C_1) = (A;\,B_1)^{i_1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (A;\,A_1) = (A;\,C_1)^{i_2} \end{array}\right\} \qquad 118.$$

also nach den Gleichungen 109.

$$(A;\,B_1) = (A;\,C_1)^{-i_1}, \quad (A;\,C_1) = (A;\,A_1)^{-i_2}, \quad (A;\,A_1 = (A;\,B_1)^{-i_3}$$

Die Zeichen i_1, i_2, i_3 operiren in den Ebenen AB_1C_1, AA_1C_1, AA_1B_1.

Hieraus erhält man z. B.

$$[(A;\,A_1)^{i_3}]^{i_1} = (A;\,A_1)^{i_1 i_3} = (A;\,B_1)^{i_1} = (A;\,C_1) = (A;\,A_1)^{-i_2}$$

also

$$i_1 i_3 = -i_2$$

ebenso findet man

$$\begin{array}{r} i_2 i_1 = -i_3, \quad i_3 i_2 = -i_1, \quad i_1 i_2 = i_3, \quad i_0 i_1 = i_2 = -i_1 i_3 \\ i_2 i_3 = i_1 \end{array} \qquad 118'.$$

Die Coordinaten eines Punktes M seien x_1, y_1, z_1 und

$$\angle\, MAC_1 = \varphi$$

Es ist

$$(A;\,M) = (AC_1)^{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}(\cos\varphi + i_4 \sin\varphi)}$$

$$= (A;\,C_1)^{z_1} (A;\,C_1)^{i_4 \sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$(A;\,M) = (A;\,A_1)^{x_1} (A;\,B)^{y_1} (A;\,C_1)^{z_1}$$
$$= (A;\,C_1)^{i_2 x_1} (A;\,C_1)^{-i_1 y_1} (A;\,C_1)^{z_1}$$

mithin

$$(A;\,C_1)^{z_1} (A;\,C_1)^{i_4 \sqrt{x_1^2+y_1^2}} = (A;\,C_1)^{z_1} (A;\,C_1)^{i_2 x_1} (A;\,C_1)^{-i_1 y_1}$$

also

$$i_4 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = i_2 x_1 - i_1 y_1 \qquad 119.$$

Verbindet man den Punkt A mit dem Punkte R_1, dessen Coordinaten $-y_1$, x_1, 0 sind, so ist

$$(A;\,R) = (A;\,C_1)^{i_4 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \qquad 119'.$$

Es sei

$M_1M = y_1$, $AM_2 = x_1$, $M_2M_1 = z_1$, AP_1 skr. AM, AP_1 skr. A_1M_1,

$$AP = 1, \quad AM_1 = w_1$$

und

$$(A;\ M) = (A;\ B)^{\frac{i}{a}\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

$$(A;\ P_1) = (A;\ B_1)^{i_5}, \quad (A_1;\ M_1) = (A;\ P_1)^{w i_4},$$

Es ist dann

$$i\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = i_1 y_1 + i_4 w_1$$

$$i_5 w_1 = i_1 x_1 + i_3 z_1$$

also

$$i\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = i_1 x_1 + i_2 y_1 + i_3 z_1$$

Setzt man

$$(A;\ M) = (A;\ M')^{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z'^2}}$$

also

$$AM' = 1$$

und sind die Coordinaten von M' : x_1', y_1', z_1', so ist

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1^2 = 1$$

$$(A;\ B)^i = (A;\ B)^{i_1x_1'+i_2y_1'+i_3z_1'}$$

und

$$(A;\ E) = (A;\ B)^{\frac{c}{a}\cos\vartheta + \frac{c}{a}\sin\vartheta i}$$

also

$$= (A;\ B)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + \sin\vartheta(i_1 x_1' + i_2 x_2' + i_3 x_3'))}$$

$$^{(A;\ B)}\log(A;\ E) = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$= \frac{c}{a}(\cos\vartheta + \sin\vartheta(i_1'x_1' + i_2 x_2' + i_3 x_3')) \qquad 120$$

Die gerade Linie, die den Ursprung der Coordinaten mit dem Punkte (x_1', x_2', x_3') verbindet, steht auf der Ebene ABE senkrecht.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned}
\frac{c}{a}\cos\vartheta &= w \\
\frac{c}{a}\sin\vartheta \,.\, x_1' &= x \\
\frac{c}{a}\sin\vartheta \,.\, y_1' &= y \\
\frac{c}{a}\sin\vartheta \,.\, z_1' &= z
\end{aligned}\right\} \qquad 120'.$$

so ist

$$^{(A;\,B)}\log(A;\,E) = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z \qquad 120'.$$

Die Quaternion ist hiermit auf eine viergliedrige Form, die Normalform, gebracht.

Die Coordinaten der Punkte B und E seien (x', y', z'), (x'', y'', z''). Es ist

$$a^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad c^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$$

$$(A;\,B) = (A;\,A_1)^{x'}(A;\,B)^{y'}(A;\,C_1)^{z'} = (A;\,A_1)^{x'+i_3 y'-i_2 z'}$$
$$= (A;\,B_1)^{-i_3 x'+y'-i_1 z'} = (A;\,C_1)^{i_2 x'-i_1 y'z'} + z_1$$

$$(A;\,E) = (A;\,A_1)^{x''+i_3 y''-z z''} = (A;\,B)_1{}^{-i_3 x''+y''+i_1 z''}$$
$$= (A;\,C_1)^{i_2 x''-i_1 y''+z''}$$

also

$$x'' + i_3 y'' - i_2 z'' = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(x, + i_3 y' - i_2 z')$$

$$i_2 x'' - i_1 y'' + z'' = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(i_2 x' - i_1 y' + z')$$

$$i_3 x'' - y'' - i_1 z'' = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(i_3 x' - y' - i_1 z')$$

Setzt man die durch die Grössen x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', i_1, i_2, i_3, w ausgerechneten Werte von a, c, $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$ ein, multiplicirt auf den rechten Seiten nach den Multiplicationsregeln der Arithmetik, beachtet die Producte der Grössen i_1, i_2, i_3, so erhält man die linken Seiten. Es gilt also das distributive Princip für das Product

$$(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)(m + i_r a + i_s p), \quad r, s = 1, 2, 3$$

Es ist jetzt leicht nachzuweisen, dass das distributive Princip für das Product'

$$(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)(m + i_1 n + i_2 p + i_3 t)$$

besteht. Der Punkt S habe die Coordinaten n, p, o, und der Punkt T habe die Coordinaten $-p$, n, o; es ist

$$(A;\ T) = (A;\ S)^{i_6},\quad (A;\ C_1)^{\sqrt{p^2 + u^2}} = (A;\ T)^{i_2'}$$

$$(A;\ B_1)^{i_2' \sqrt{p^2 + n^2}} = (A;\ S)$$

$$i_2 \sqrt{p^2 + n^2} = (i_1' p + i_2' n),\quad i_1 \sqrt{p^2 + n^2} = (i_1' n - i_2' p)$$

Für das Product

$$\left(w + \frac{i_1' n - i_2' p}{\sqrt{p^2 + n^2}} x + \frac{i_1' p + i_2' n}{\sqrt{p^2 + n^3}} y + i_3 z\right)(m + i_1' \sqrt{n^2 + p^2} + i_3 t)$$

gilt das distributive Princip und es ist gleich

$$(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)(m + i_3 t) + (w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)(i_1 n + i_2 p)$$

da für diese Glieder ebenfalls das distributive Princip besteht, so ist bewiesen, dass es für das Product von zwei Quaternionen Geltung hat. Man hat also

$$\begin{aligned}(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)&(m + i_1 n + i_2 p + i_3 t) \\ &= wm - xn - yp - zt + i_1(xm + wn + yt - zp) \\ &+ i_2(ym + wp_2 + zn - yt) + i_3(zm + wt + xp - yn) \qquad 121.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Relationen 118., den Gleichungen 119. und 120. kann man die formale Theorie der Quaternionen entwickeln. Die Zeichen i_1, i_2, i etc. kann man jetzt als Differenzvectoren oder als Drehungsfactoren auffassen. Nimmt man die Zeichen i als Differenzvectoren, so erhält man mittelst der Formeln geometrische Sätze, betrachtet man dagegen die Zeichen i als Drehungsfactoren, so kann man mittelst der Formeln geometrisch-phoronomische Sätze ableiten.

Setzt man in der Gleichung

$$m = s\cos\vartheta_1,\quad n = s\sin\vartheta_1 . x_2,\quad p = s\sin\vartheta_1 . y_2,\quad t = s\sin\vartheta_1 . z_2$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1$$

so ist

$$s = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + t^2}$$

und

$$mi_1 + pi_2 + ri_3 = s \,.\, \sin\vartheta_1 (i_1 x_2 + i_2 y_2 + i_3 z_2) = s \,.\, \sin\vartheta_1 i'$$

$$i'^2 = -1$$

und mithin

$$\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\, s(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)$$

$$= \frac{cs}{a}(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + i \,.\, i'\sin\vartheta\sin\vartheta_1 + i\sin\vartheta\cos\vartheta_1 + i'\cos\vartheta\sin\vartheta_1) \qquad 121'.$$

Wenn CL an Länge gleich CD ist und mit CD den Winkel ϑ_1 und mit CF den Winkel ϑ_2 einschliesst, so ist (nach den Gleichungen 115.)

$$(C;\ L) = (C;\ D)^{\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1}$$

$$= (A;\ B)^{(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)\left\{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}\right\}}$$

$$(C;\ L) = (C;\ F)^{(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}$$

$$= (C;\ F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta_2 + i''\sin\vartheta_2)}$$

$$= (A;\ B)^{\{(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta')(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\}\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}}$$

$$= (A;\ B)^{\frac{c\gamma'}{a\alpha'}(\cos\vartheta_2 + i''\sin\vartheta_3)}$$

$$i'^2 = -1, \quad i''^2 = -1$$

mithin

$$(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)\{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}$$

$$= (\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)\left\{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\right\}$$

$$= \{(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\}\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}$$

$$= \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}\{(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\}$$

122.

122.

$$= \cos\vartheta_1 \cos\vartheta \frac{e\gamma_1'}{q\alpha'} + i \sin\vartheta \cos\vartheta_1 \frac{e\gamma_1'}{a\alpha'}$$

$$+ i' \sin\vartheta_1 \cos\vartheta \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'} + i' i \sin\vartheta_1 \sin\vartheta \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}$$

$$= {}^{A;\,B}\log(C;\ L)$$

und hieraus für

$$c = a, \quad \vartheta = \vartheta_1 - \frac{\pi}{2}$$

$$i'\left(i\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right) - i'\left(\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right)i = (i'\,i)\frac{\gamma_1'}{\alpha_1} - \frac{\gamma_1'}{\alpha'}(i'\,i) \qquad 122'.$$

Wenn KJ' an Länge gleich CL und gleichgerichtet parallel CL ist und ferner K der Anfangspunkt einer Einheitsstrecke $\gamma k'$ ist, die parallel und gleichgerichtet der Einheitsstrecke α' ist, so ist

$$\left.\begin{aligned}(K;\ J') &= (C;\ L)^{\frac{\varkappa'}{\gamma'}} = (C;\ D)^{(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)\frac{\varkappa'}{\gamma_1'}}\\ &= (A;\ B)^{\left\{\frac{c}{a}(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right\}\frac{\varkappa'}{\gamma'_1}}\\ &= (A;\ B)^{\frac{b}{a}(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_3)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{\varkappa'}{\alpha'}}\end{aligned}\right\} \qquad 123.$$

mithin

$$\left\{\frac{c}{a}(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right\}\frac{\varkappa'}{\gamma_1'}$$

$$= \frac{c}{a}(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{\varkappa'}{\alpha'}$$

$$= \frac{c}{a}(\cos\vartheta_1 + i'\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\left(\frac{\varkappa'}{\gamma'} \cdot \frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right) \qquad 123'.$$

und

$$i\frac{\varkappa'}{\gamma_1'} = i'\frac{\varkappa'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\gamma_1'},$$

$$i'\frac{\varkappa_1'}{\gamma_1'} = i'\frac{\varkappa'}{\alpha'}\frac{\alpha'}{\gamma_1'}, \quad \left(i'i\ \frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right)\frac{\varkappa'}{\gamma_1'} = i'\,i\frac{\varkappa'}{\alpha'} = i'i\left(\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\ \frac{\varkappa'}{\gamma_1'}\right)$$

$$= \left(i'\ i\frac{\varkappa'}{\gamma_1'}\right)\frac{\gamma_1'}{\alpha'}$$

Nach den Gleichungen 16. kann man setzen

$$\frac{k'}{\gamma_1'} = \frac{\pi'}{\varrho'}$$

es ist daher

$$\left(i'\; i\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right)\frac{\pi'}{\varrho'} = \left(i'\; i\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right)\frac{k'}{\gamma_1'} = \left(i'\; i\,\frac{k'}{\gamma_1'}\right)\frac{\gamma_1'}{\sigma'}$$

$$= \left(i'\; i\,\frac{\pi'}{\varrho'}\right)\frac{\gamma_1'}{\alpha'} = (i'\; i)\,\frac{\pi'}{\varrho'}\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'} \qquad 123'.$$

Mit Benutzung der Formeln 114. — 123'. kann man die Grundrechnungsarten der Biquaternionen Unverzagt's entwickeln. Nicht jede Verbindung von zwei Biquaternionen Unverzagt's durch eine der Grundrechnungsarten führt zu einer Biquaternion Unverzagt's als Resultat der Rechnung. „Das Product von zwei Biquaternionen Unverzagt's ist wieder eine Biquaternion Unverzagt's", dagegen führt im allgemeinen die Summe oder die Differenz von zwei Biquaternionen Unverzagt's nicht zu einer Biquaternion derselben Art. Die Summe oder Differenz von zwei Biquaternionen Unverzagt's kann man a l l g e m e i n e B i q u a t e r n i o n e n nennen.

Ferner lässt sich mit Hilfe der Formeln 30. — 30'''., 120'. jede Biquaternion Unverzagt's auf verschiedene Arten in Summen zerlegen. Nach den Gleichungen 117'. und 120'. ist

$$(w + i_1 y + i_2 y + i_3 z)\left(m\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n\,\frac{\pi'}{\varrho'}\right)$$

$$= mw\,\frac{\pi'}{\varrho'} + (i_1 x + i_2 y + i_3 z)\left(m\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n\,\frac{\pi'}{\varrho'}\right)$$

Die Gleichungen 116''. und 119. liefern leicht

$$(i_1 x + i_2 y + i_3 z)\left(m\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n\,\frac{\pi'}{\varrho'}\right)$$

$$= i_1\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\,mx + i_2\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\,my + i_3\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\,mz + i_1\,\frac{\pi'}{\varrho'}\,nz + i_2\,\frac{\pi'}{\varrho'}\,ny + i_3\,\frac{\pi'}{\varrho'}\,nz$$

mithin ist

$$(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)\left(m\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n\,\frac{\pi'}{\varrho'}\right) = mw\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + nw\,\frac{\pi'}{\varrho'}$$

$$+ i_1\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\,mx + i_1\,\frac{\pi'}{\varrho'}\,nx + i_2\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\,my + i_2\,\frac{\pi'}{\varrho'}\,ny + i_3\,\frac{\gamma_1'}{\alpha'}\,mz$$

$$+ i_3\,\frac{\pi'}{\varrho'}\,nz \qquad 124.$$

Nimmt man in der Gleichung 123. statt des Winkels ϑ_1 den Winkel ϑ, liegt CL in der Ebene CFD, und ist

$$(K;\,J) = (K;\,J')^{\frac{c}{a}}$$

so hat man

$$^{(C;\,D)}\log(K;\,J) = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{\varkappa'}{\gamma_1'} = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{\eta'}{\alpha'} \qquad 125.$$

Auf der geraden Linie KC sei der Anfangspunkt der den Strecken $\varkappa'$, α', γ_1' parallelen gleichgerichteten Einheitsstrecke ε' gegeben; es ist dann

$$\frac{\varkappa'}{\gamma_1'} = \frac{m_0 + m_1\frac{\varepsilon'}{\gamma_1'}}{m_0 + m_1} = \frac{m_0 + jm_1}{m_0 + m_1} = p_0 + jp_1, \quad p_0 + p_1 = 1$$

und

$$^{(C;\,D)}\log(K;\,J) = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(p_0 + jp_1) \qquad 125'$$

Liegen die Anfangspunkte der gleichgerichteten parallelen Einheitsstrecken $\varkappa'$, γ_1', μ', ν' in einer Ebene und die Anfangspunkte der Strecken μ', ν' nicht auf der geraden Linie KC, so hat man

$$\frac{\varkappa'}{\gamma_1'} = \frac{m_0 + m_1\frac{\mu'}{\gamma_1'} + m_2\frac{\nu'}{\gamma_1'}}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_0 + m_1 j' + m_2 j''}{m_0 + m_1 + m_2}$$

$$= p_0 + p_1 j' + p_2 j''$$

$$^{(C;\,D)}\log(K;\,J) = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(p_0 + p_1 j' + p_2 j'') \qquad 125''.$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1$$

Wenn allgemein die Anfangspunkte der parallelen gleichgerichteten Strecken α', β', γ', δ' die Ecken eines Tetraeders sind, so hat man nach den Gleichungen 9., 12.

$$\frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{m_0 + m_1\frac{\beta'}{\alpha'} + m_2\frac{\gamma'}{\alpha'} + m_3\frac{\delta'}{\alpha'}}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_0 + j_1 m_1 + j_2 m_2 + j_3 m_3}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= p_0 + j_1 p_1 + j_2 p_2 + j_3 p_3$$

$$p_n = \frac{m_0 + m_1 + m_2 + m_3}{m_u}$$

und

$$(C: D)\log(K; J) = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(p_0 + p_1 j_1 + p_2 j_2 + p_3 j_3)$$
$$= (w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)(p_0 + p_1 j_1 + p_2 j_2 + p_3 j_3 \quad 125'''.$$

Für die Producte 125 — 125'''. gelten das commutative und distributive Gesetz.

Nach den Gleichungen 28. ist

$$j^2 = 2j - 1,\ j'^2 = 2j' - 1,\ \ j''^2 = 2j'' - 1,\ \ j'j'' = j' + j'' - 1$$
$$j_n j_m = j_n + j_m - 1,\ \ j_1 \cdot j_2 \cdot j_3 = j_1 + j_2 + j_3 - 2$$

Wenn man im Raume das Coordinatensystem mit den Axen AA_1, AB_1, AC_1 und ein Tetraeder, dessen Ecken die Anfangspunkte der Strecken α', β', γ', δ' sind, und ferner eine Strecke CD gegeben sind, so ist man im Stande jeden beliebigen Quotientvector mit Hilfe des Quotientvectors $(C; D)$ und den Maasszahlen, w, x, y, z, p_0, p_1, p_2, p_3 auszudrücken. Die geometrische Bedeutung der Zahlen w, x, y, z, p_0, p_1, p_2, p_3 folgt leicht aus den Gleichungen 120., 120'., 12. Man kann den Ausdruck

$$(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)(p_0 + j_1 p_1 + j_2 p_2 + j_3 p_2)$$

wo w, x, y, z, p_0, p_1, p_2, p_3 beliebige Zahlen sind, auf die Form

$$\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{\zeta'}{\alpha'}$$

bringen. Man findet

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{p_0 + j_1 p_1 + j_2 p_2 + j_3 p_3}{p_0 + p_1 + p_2 + p_3} = \frac{\zeta'}{\alpha'}\\
&w(p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = \frac{c}{a}\cos\vartheta_1\\
&(i_1 x + i_2 y + i_3 z)(p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = \frac{c}{a}\, i\sin\vartheta
\end{aligned}\right\} \quad 126.$$

und hieraus

$$(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)(p_0 + p_1 + p_2 + p_3)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

Die Zahl $\frac{c}{a}$ ist immer positiv zu nehmen.

Der Ausdruck

$$(C; D)^{a+bi+cj+dij}$$

stellt einen Quotientvector dar, wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{d}$$

ist; es ist dann

$$(C;\ D)^{a+bi+ej+dij} = (C;\ D)^{\frac{c+di}{d}(b+dj)}$$

$$= (C;\ D)^{\frac{b+d}{d} r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\frac{b+dj}{b+d}}$$

$$(b+d)r\cos\varphi = c,\quad (b+d)r\sin\varphi = d$$

Man kann also die Frage aufwerfen: Welche Bedeutung hat der Ausdruck

$$(C;\ D)^{a+bi+ej+dij}$$

wenn a, b, c, d beliebige reelle Zahlen sind? Die Hauptsätze der Quaternionentheorie dienen dazu, um diese Frage, die Unverzagt in seinen Untersuchungen offen liess, zu beantworten.

Diese Sätze der Quaternionentheorie heissen:

1. Das Product oder der Quotient zweier parallelen Vectoren ist eine reelle Zahl.

2. Das Product oder der Quotient zweier zu einander senkrechten Vectoren ist ein dritter Vector, der auf der Ebene, die den zwei zu einander senkrechten Vectoren parallel ist, senkrecht steht.

3. Das Product oder der Quotient zweier Vectoren ist eine Quaternion oder nach der Gleichung 110′. in Zeichen

$$q = \frac{[AC]}{[AB]} = \frac{b}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),\quad \frac{AC}{AB} = \frac{b}{a},\quad \vartheta = \text{Wkl. } BAC$$

Die Quaternion q ist ein Operator, der bewirkt, dass ein Vector $[MN]$ in einer der Ebene ABC parallelen Ebene durch Multiplication mit q in einen anderen Vector $[MR]$ übergeführt wird, der mit $[MN]$ den Winkel ϑ einschliesst und dessen Länge durch die Gleichung

$$MR : MN = b : a$$

gegeben ist. Die Dreiecke ACB und MNR sind ähnlich.

Wenn MR der Strecke AC gleichgerichtet parallel ist, so ist MN der Strecke AB gleichgerichtet parallel. Ist $b = a$, so ist die Quaternion ein Drehfactor.

Den beiden ersten Sätzen entsprechen in der Rechnung mit

Quotientvectoren die Erklärungen des Products von parallelen Quotientvectoren und von Quotientvectoren, die denselben Anfangspunkt haben, und dem dritten Satze ist analog der Satz:

„Das Product von zwei Quotientvectoren

$$(C;\ D)^{a+bi}\,.\,(C;\ D)^{(c+di)j} = (C;\ D)^{a+bi+cj+dij} \qquad 127.$$

ist ein Operator, der einen Quotientvector

$$(K;\ J) = (C;\ D)^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\frac{x+yj}{x+y}}$$

$$r = \frac{(x+y)(bc-ad)}{x(d\cos\varphi - c\sin\varphi) - y(b\cos\varphi - a\sin\varphi)} \qquad 127'$$

mit dem er multiplicirt wird, in den Quotientvector

$$(U;\ V) = (C;\ D)^{\frac{r}{(x+y(br-ad)}[cc-ay+(dx-by)i][bc\cos\varphi - a\sin\varphi + (d\cos\varphi - c\sin\varphi)j]} \qquad 127''.$$

überführt. Es ist $(C;\ D)^{a+bi+cj+dij}$ ein Drehungs- und Verschiebungsfactor".

Soll nämlich das Product

$$(C;\ D)^{a+bi+cj+dij}\,(C;\ D)^{r(\cos\varphi+j\sin\varphi)\frac{x+jy}{x+y}}$$

$$= (C,\ D)^{\frac{a(x+y)+rx\cos\varphi+(b(x+y)+rx\sin\varphi)i+(c(x+y)+ry\cos\varphi)j+(d+y)+ry\sin\varphi)ij}{x+y}}$$

einen Quotientvector darstellen, so muss

$$\frac{a(x+y)+rx\cos\varphi}{b(x+y)+rx\sin\varphi} = \frac{c(x+y)+ry\cos\varphi}{d(x+y)+ry\sin\varphi}$$

sein. Hieraus folgt der Wert von r. Wenn

$$ad - bc = 0, \text{ so ist } r = 0$$

und die Quotienten $(U,\ V)$, $(C;\ D)^{a+bi+c+idj}$ sind identisch. Die Anfangspunkte der beiden Quotientvectoren $(K;\ J)$ und $(U;\ V)$ liegen auf der geraden Linie C, K und zwar ist der Anfangspunkt des Quotientvectors $(U;\ V)$ durch die Gleichung

$$b \cos\varphi - a \sin\varphi + (d \cos\varphi - c \sin\varphi) \frac{\varepsilon'}{\gamma'}$$

$$= \{(b+d)\cos\varphi - (a+c)\sin\varphi\} \frac{\zeta'}{\alpha_1'}, \quad \frac{\varepsilon'}{\gamma_1'} = j$$

gegeben. Die absolute Länge von UV verhält sich zu der von CD wie

$$\frac{UV}{CD} = \frac{\{(b+d)\cos\varphi - (a+c)\sin\varphi\}\,(-1)^n}{x(d\cos\varphi - c\sin\varphi) - y(d\cos\varphi - a\sin\varphi)} \sqrt{(cx-ay)^2 + (dx-by)^2} \qquad 128.$$

die Quadratwurzel ist positiv und die Zahl n muss so gewählt werden, dass die rechte Seite positiv wird. Die grade Linie UV bildet mit der geraden Linie CD einen Winkel ψ, den man mittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} cx - ay &= (-1)^n \sqrt{(cx-ay)^2 + (dx-by)^2}\cos\psi \\ dx - by &= (-1)^n \sqrt{(cx-ay) + (dx-by)^2}\sin\psi \end{aligned}\right\} \qquad 129.$$

findet. Die gerade Linie UV liegt in einer Ebene, die den geraden Linien KJ, CC parallel ist oder kürzer $(U;\ V))$, $(K;\ J)$, $(C;\ D)$ „sind drei einer Ebene parallelen Quotientvectoren".

Ist in der Gleichung 127'. der Winkel φ gegeben und lässt man $\frac{y}{x}$ alle möglichen Werte annehmen, so erhält man eine Reihe von Quotientvectoren $(K;\ J)$ $(K_1;\ J_1)$ $(K_2;\ J_2)$ etc., die parallel sind, und eine Reihe von Quotientvectoren $(U;\ V)$, $(U_1;\ V_1)$, $(U_2;\ V_2)$ etc, die denselben Anfangspunkt haben, mithin entspricht dem Parallelstrahlenbüschel KJ, $K_1 J_1$, $K_2 J_2$ . . . das Strahlenbüschel UV, UV_1, UV_2, UV_3 . . . Wenn $\frac{y}{x}$ gegeben ist und man dem Winkel φ alle möglichen Werte gibt, so erhält man eine Reihe von Quotientvectoren $(K;\ J)$, $K;\ J^1)$, $(K;\ J^2)$ . . . , die denselben Anfangspunkt haben, und eine Reihe von Quotientvectoren $(U;\ V)$, $(U^1;\ V^1)$, $(U^2,\ V^2)$, die parallel sind, mithin entspricht dem Strahlenbüschel KJ, $KJ^1)$ KJ^2 . . . das Parallelstrahlenbüschel UV, U^1V^1, U^2V^2 . . .

Setzt man $y = -x$, so entspricht dem Quotientvector

$$(K\infty;\ J) = (C;\ D) \frac{bc-ad}{x} \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{(d+b)\cos\varphi - (a+c)\sin\varphi}(1-j)$$

dessen Anfangsqunkt auf CK im Unendlichen liegt, der Quotientvector

$$(U;\ V) = (C;\ D)^{\frac{(c+a+(d+b)i)x(b\cos\varphi-a\sin\varphi+(d\cos\varphi-c\sin\varphi)j)}{(d+b)\cos\varphi-(a+c)\sin\varphi}}$$

Ist der Quotientvector $(K;\ J)$ dem Quotientvector $(U;\ V)$ parallel, so ist

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi = \frac{dx - by}{cx - ay}$$

also die betr. geraden Linien entsprechen sich selbst, und J, V liegen im Unendlichen.

Wenn ferner

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b+d}{a+c}$$

ist, so entspricht dem Quotientvector

$$(C;\ D)^{\frac{-1}{x+y}\{cx - ay + (dx - by)i\}(1 - j)}$$

dessen Anfangspunkt auf KC im Unendlichen liegt.

Allgemein seien die Quotientvectoren

$$\left.\begin{array}{l} (P;\ Q),\ (R;\ S) = (P;\ Q)^{(iw+i_1x+i_2y+i_3z)(p_0+j_1p_1+j_2p_2+j_3p_3)} \\ \text{gegeben, und es soll ein Quotientvector} \\ (M;\ N) = (P;\ Q)^{(w'+i_1x'+i_2y'+i_3z')(p_0'+j_1p_1'+j_2p_2'+j_3p_3')} \end{array}\right\} \quad 130.$$

so bestimmt werden, dass das Product

$$(P;\ Q),\quad (R;\ S),\quad (M;\ N)$$

wieder einen Quotientvector darstellt. Es ist dann

$$\frac{wp_n + w'p_n'}{1 + wp_0 + w'p_0'} = \frac{xp_n + x'p_n'}{xp_0 + x'p_0'} = \frac{yp_n + y'p_n'}{yp_0 + y'p_0'} = \frac{zp_n + z'p_n'}{zp_0 + z'p_0'} \quad 131.$$

Hieraus folgt sofort

$$x' = lx,\quad y' = ly,\quad z' = lz \qquad 132.$$

Die drei geraden Linien PQ, RS, MN sind daher ein und derselben Ebene parallel.

Setzt man in die Bedingungsgleichungen

$$p_1' = l'p_1$$

so erhält man die Gleichungen

$$\frac{w' + w'l'}{1 + ll'} = \frac{1 + wp_0 + w_i p_0'}{p_0 + lp_0'} = \frac{wp_2 + w'p_2'}{p_2 + lp_2'} = \frac{wp_3 + w'p_3'}{p_3 + lp_3'}$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} & p_2' = l'p_2, \quad p_3' = l'p_3, \quad p_1' = lp_1 \\ & w' = lw + \frac{1 + ll'}{l'p^0 - p^{0'}} \end{aligned}\right\} \qquad 133.$$

Die Punkte P, R, M liegen mithin in einer geraden Linie.

Nimmt man an, dass

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_2 = p_0' + p_1' + p_2' + p_3' = 1$$

ist, so ist

$$w' = lw + \frac{1 + ll'}{l' - 1}. \quad p_0' = 1 - l' + l'p_0 \qquad 133'.$$

Wenn die Quotientvectoren $(P;\ Q)$, $(R,\ S)$ durch $(C;\ S)$ gegeben sind, also ist

$$\left.\begin{aligned} (P;\ Q) &= (C;\ D)^{(w_1 + i_1 x_1 + i_2 y_1 + i_3 z_1)(r\ + j_1 r_1 + j_2 r_2 + j_3 r_3)} \\ (R;\ S) &= (C;\ D)^{(w_1' + i_1 x_1' + i_2 y_1' + i_3 z_1')(r_0' + j_1 r_1' + j_2' + j_3 r_3')} \end{aligned}\right\} \qquad 134.$$

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = r_0' + r_1' + r^{2'} + r_3' = 1$$

so kann man die Zahlen w, x, y, z; p_0, p_1, p_2, p_3 derart eindeutig. bestimmen, dass ist

$$\left.\begin{aligned} & w_1' + i_1 x_1' + i_2 x_2' + i_3 x_3' = (w_4 + i_1 x_1 + i_2 y_2 + i_3 z_3)(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z) \\ & r_0' + j_1 r_1' + j_2 r_2' + j_3 r_3' = (r_0 + j_1 r_1 + j_2 r_2 + j_3 r_3 (p_0 + j_1 p_1 + j_2 p_2 + j_3 p_2) \end{aligned}\right\} \quad 134'.$$

Man findet

$$\left.\begin{aligned} & w_1 w - x_1 x - y_1 y - z_1 z = w_1', \quad r_0 p_0 - (p_1 + p_2 + p_3)(r_1 + r_2 + r_3) = r_0' \\ & x_1 w + w_1 x - z_1 y + y_1 z = x_1', \quad r_1 p_0 + (1 + r_1) p_1 + r_1 p_2 + r_1 p_3 = r_1' \\ & y_1 w + z_1 x + w_1 y - x_1 z = y_1', \quad r_2 p_0 + r_2 p_1 + (1 + r_2) p_2 + r_2 p_3 = r_2' \\ & z_1 w - y_1 x + x_1 y + w_1 z = z_1', \quad r_3 p_0 + r_3 q_1 + r_3 p_2 + (1 + r_3) p_3 = r_3' \end{aligned}\right\}$$

und hieraus 134″.

$$\left.\begin{array}{ll} N\,.\,w = w_1'w_1 + x_1'x_2 + y_1'y_1 + z_1'z_1, & p_0 = r_0' - r_0 + 1, \\ & p_n = r_n' - r_n,\ n = 1, 2, 3 \\ N\,.\,x = x_1' - w_1'x_1 - z_1'y_1 + y_1'z_1', & p_0 + p_1 p_2 + p_3 = 1 \\ N\,.\,y = y_1'w_1 + z_1'x_1 - w_1'y_1 - x_1'z_1 & \\ N\,.\,z = z_1'w_1 - y_1'x_1 + s_1' - w_1'z_1 & \\ N = w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + x_1^2 & \end{array}\right\} \quad 134''.$$

Der Ausdruck von $(R;\ S)$ ist mithin auf die Form 130. gebracht.

Das Product der drei Quotientvectoren $(P;\ Q)$, $(R;\ S)$, $(M;\ N)$ ist

135.

$$(U;\ V) = (P;\ Q)\frac{\{w + w'l' + (1 + ll')(i_1 x + i_2 y + i_3 s)\}(p_0 + p_0' l + (1 + ll')(j_1 p_1 + j_2 p_2 + j_3 p_3)\}}{1 + ll'}$$

Aus dieser Gleichung erhält man leicht die absolute Länge von UV und den Winkel, den UV mit PQ einschliesst.

Wenn der Punkt M gegeben ist, dann ist t' bekannt und man kann l so bestimmen, dass MN eine gegebene Länge hat, oder dass MN mit PQ einen gegebenen Winkel einschliesst. Wenn l gegeben ist, so kann man l' so bestimmen, dass MN eine gegebene Länge hat oder dass MN mit PQ einen gegebenen Winkel einschliesst, oder dass der Punkt M in einen gegebenen Punkt der geraden Linie PQ fällt.

Wenn der Punkt M gegeben ist, so beschreibt der Punkt N eine gerade Linie, oder wenn in den Gleichungen 127. das Verhältniss $\frac{x}{y}$ gegeben ist, so ist der Punkt K bestimmt und der Punkt J liegt auf einer festen geraden Linie. Nach den Gleichungen 127'. ist

$$(K;\ J) = (C;\ D)^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\frac{x + yj}{x + y}}$$

und

$$(K;\ J') = (C;\ D)^{r_1(\cos\varphi' + i\sin\varphi')\frac{x + yj}{x + y}}$$

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\cos\varphi'\,(dx - by) - \sin\varphi'\,(cx - ay)}{\cos\varphi\,(dx - by) - \sin\varphi\,(cx - ay)}$$

Es sei KJ^0, parallel CD, die positive Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems; es sind die Coordinaten von J

$$m = CD \,.\, r \cos \varphi, \quad n = CD \,.\, r \sin \varphi$$

und die Coordinaten von J^1

$$m_1 = CD \,.\, r_1 \cos \varphi', \quad n_1 = CD \,.\, r_1 \sin \varphi'$$

mithin

$$\frac{m - m_1}{n - n_1} = \frac{dx - by}{cx - ay}$$

Dies ist die Gleichung der geraden Linie, auf der die Punkte J^1, J^2, J^3 liegen.

Die gerade Linie J^1, J^2 . . . bildet mit der positiven Axe der x einen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dx - by}{cx - ay}$$

bestimmten Winkel und ist der sich selbst entsprechenden geraden Linie KJ^∞ parallel. Führt man in den Gleichungen 127'., 127''. den Winkel φ ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} (K;\, J) &= (C;\, D) \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\sin(\psi - \varphi)} [b\cos\psi - a\sin\psi + (d\cos\psi - c\sin\psi)j] \\ (U;\, V) &= (C;\, D) \frac{\cos\psi + i\sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)} [b\cos\varphi - a\sin\varphi + (d\cos\varphi - e\sin\varphi)j] \end{aligned}\right\} \quad 127'''.$$

Setzt man noch

$$a + bi = r'(\cos \vartheta' + \sin \vartheta'), \quad c + di = r'(\cos \vartheta'' + i \sin \vartheta'')$$

so hat man

$$\left.\begin{aligned} (K;\, J) &= (C;\, D) \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\sin(\psi - \varphi)} [r'\sin(\vartheta' - \psi) + r''j\sin(\vartheta'' - \psi)] \\ (U;\, V) &= (C;\, D) \frac{\cos\psi + i\sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)} [r'\sin(\vartheta' - \varphi) + r''j\sin(\vartheta'' - \varphi)] \end{aligned}\right\} \quad 127'''.$$

Vertauscht man in dem Ausdruck für $(K\colon J)^{-1}$ die Winkel φ und ψ, so erhält man die rechte Seite der letzten Gleichung 127'''.

Wenn das Product von n Quotientvectoren oder die Form

$$(C;\ D)^{a_0 + \sum_1^3 a_n i_n + j_1(a_4 + \sum_1^3 b_n i_n) + j_2(a_5 + \sum_1^3 c_n i_n) + j_3(a_6 + \sum_1^3 d_n i_n)} = f$$

gegeben ist, so kann man auf verschiedene Arten drei Quotientvectoren so bestimmen, dass das Product dieser $n+3$ Quotientvectoren wieder ein Quotientvector ist. Das Product von n Quotientvectoren ist gleich dem Producte der vier Quotientvectoren

$$(C:\ D)^{a_0 + \sum_1^3 a_n i_u} \cdot (C:\ D)^{j_1(a_n + \sum_1^3 b_n l_n)} \cdot (C;\ D)^{j_2(a_5 + \sum_1^3 c_n i_n}$$
$$\cdot (C;\ D)^{j_3(a_6 + \sum_1^3 d_n i_n)}$$

oder gleich dem Producte der vier Quotientvectoren

$$(C;\ D)^{a_0 + a_4 j_1 + a_5 j_2 + a_6 j_3} \cdot (C;\ D)^{i_1(a_1 + b_1 j_1 + c_1 j_2 + d_1 j_4)}$$
$$\cdot (C;\ D)^{i_2(a_2 + b_2 j_1 + c_2 j_2 + d_2 j_2)} \cdot (C;\ D)^{i_3(a_3 + b_3 j_7 + c_3 j_2 + d_3 j_3)}$$

Zu je zwei dieser Quotientvectoren kann man einen Quotientvector so bestimmen, dass das Product dieser drei Quotientvectoren wieder ein Quotientvector ist, und ferner kann man zu drei Quotientvectoren immer zwei Quotientvectoren so bestimmen, dass das Product dieser fünf Quotientvectoren auch ein Quotientvector ist.

Aus den Regeln über die Multiplication von Quotientvectoren folgen leicht die über die Quotienten von Quotientvectoren.

Die Quaternionen Hamilton's und Unverzagt's, die Unverzagt'schen und die allgemeinen Biquaternionen als Zahlen.

Die in der Ueberschrift genannten Grössen haben die Formen:

1) $a_0 + a_1 i$, 2) $a_0 + a_1 j$, 3) $a_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2$, 4) $a_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3$, 5) $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$, 6) $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij$, 7) $a_0 + a_2 i + a_2 j_1 + a_3 j_2 + a_4 i j_1 + a_5 i j_2$, 8) $a_0 + a_1 i + a_2 j_1 + a_3 j_2 + a_4 j_3 + a_5 j_1 + a_6 j_2 i + a_7 j_3 i$, 9) $a_0 + \sum_1^3 a_n i_n + a_n j + j \sum_1^3 b_n i_n$, 10) $a_0 + \sum_1^3 a_n i_n + a_4 j_1 + a_5 j_2 + a_6 j_1 i_1 + a_7 j_2 i_1 + a_8 j_1 i_2 + a_9 j_2 i_2 + a_{10} j_1 i_3 + a_{11} j_2 i_3$, 11) $a_0 + \sum_1^3 a_n i_n + a_4 j_1 + a_5 j_2 + a_6 j_3 + a_7 j_1 i_4 + a_8 j_2 i_1 + a_9 j_0 i_1 + a_{20} j_1 i_2 + a_{11} j_2 i + a_{12} j_3 i_2 + a_{13} j_1 i_8 + a_{14} j_2 i_3 + a_{15} i_0 i_3$.

Die Factoren a_m, b_n sind reelle oder auch gewöhnliche complexe Zahlen.

Diese Formen kann man als complexe Zahlen ansehen. Ein System[1]) aller aus denselben Grundzahlen e_n — Einheiten — linear abgeleiteten extensiven Grössen nennt man unter folgenden Bedingungen ein System von complexen Zahlen:

1) Das Product $e_i e_k$ von irgend zweien der Grundzahlen e_i und e_k muss wieder eine Zahl des Systems $= \Sigma e_{iks} e_s$ sein.

2) Das associative Gesetz der Multiplication

$$(ab)c = a(bc)$$

muss gelten.

3) In dem System muss eine Grösse a^0 vorhanden sein, die den beiden Gleichungen

$$a^0 x = x, \quad x a^0 = x$$

unabhängig von x genügt.

Diese Forderungen erfüllen die Formeln von 1—11.

Mit Vorteil bedient man sich, um die Multiplicationsregeln aufzustellen, der sog. Multiplicationstafeln. So ist z. B. die Multiplicationstafel für die Hamilton'schen Quaternionen, wenn man

$$e_0 = 1, \quad e_2 = i_1, \quad e_2 = i_2, \quad c_3 = i_3$$

setzt:

	e_0	e_1	c_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$=e_0$	v_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

In der Horizontalreihe e_u und in der Verticalreihe e_p steht der Wert des Products $e_n e_p$ z. B.

$$e_1 v_2 = e_3, \quad e_2 e_1 = e_3$$

Setzt man in den Formen 1—11

$e_0 = 1$, 1) $e_1 = i$, 2 $e_1 = j - 1$, 3) $e_1 = j_1 - 1$, $e_2 = j_2 - 1)$, 4) $e_n = j_n - 1$, $n = 1, 2, 3$, 5) $e_n = i_n$, 1, 2, 3, 6) $e_1 = i$, $e_2 = j - 1$,

1) E. Study, Ueber Systeme von complexen Zahlen, Nachricht. d Königl. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen. 1894, pag. 237 sq

$e_3 = e_1e_2$, 7) $e_1 = e_1$, $e_2 = j_1 - 1$, $e_3 = j_2 - 1$, 8) $e_1e_2 = e_4$, $e_1e_3 = e_5$, 9) $e_1 = i_1$, $e_2 = i_2$, $e_3 = i_3$, $e_4 = j - 1$, $e_5 = e_4e_1$, $e_6 = e_4e_2$. $e_4 = e_4e_2$, $e_7 = e_4e_3$, 10) $e_1 = i_1$, $e_2 = i_2$, $e_3 = i_3$, $e_4 = j_1 - 1$, $e_5 = j_2 - 1$, $e_6 = e_4e_1$, $e_7 = e_5e_1$, $e_8 = e_4e_2$, $e_9 = e_5e_2$, $e_{10} = e_4e_3$, $e_{11} = e_5e_3$, 11) $e_1 = i_1$, $e_2 = i_2$, $e_3 = i_3$, $e_4 = j_1 - 1$, $e_5 = j_2 - 1$, $e_6 = j_3 - 1$, $e_7 = e_4e_1$, $e_8 = e_5e_1$, $e_9 = e_6e_1$, $e_{10} = e_4e_2$, $e_{11} = e_5e_2$, $e_{12} = e_6e_2$, $e_{13} = e_4e_3$, $e_{14} = e_5e_3$, $e_{15} = e_6e_3$.

ein, so erhält man folgende Multiplicationstafeln

1)

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_0	$-e_0$

2)

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_0	0

3)

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	0	0
e_2	e_2	0	0

4)

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	0	0
e_2	e_2	0	0	0
e_3	e_3	0	0	0

5)

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

6)

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	e_3	0	0
e_3	e_3	$-e_2$	0	0

7)

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_0	e_0	e_2	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	$-e_0$	e_4	e_5	$-e_2$	$-e_3$
e_2	e_2	e_4	0	0	0	0
e_3	e_3	e_5	0	0	0	0
e_4	e_4	$-e_2$	0	0	0	0
e_5	e_5	$-e_3$	0	0	0	0

9)

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_5$	e_1	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	e_4	e_5	e_6	e_7	0	0	0	0
e_5	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$	0	0	0	0
e_6	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5	0	0	0	0
e_7	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$	0	0	0	0

10)

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
e_0	e_0	e_1	e_2	e_0	e_{11}	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	e_{10}	e_{11}	$-e_8$	$-e_{70}$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_3	e_9	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	$-e_5$	e_6	e_7
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_{10}	e_{11}	e_8	e_9	$-e_6$	$-e_7$	$-n_4$	$-e_5$
e_4	e_4	e_6	e_8	e_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0
e_5	e_5	e_7	e_9	e_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0
e_6	e_6	$-e_4$	e_{10}	$-e_8$	0	0	0	0	0	0	0	0
e_7	e_7	$-e_5$	e_{11}	$-e_9$	0	0	0	0	0	0	0	0
e_8	e_8	$-e_{10}$	$-e_4$	e_6	0	0	0	0	0	0	0	0
e_9	e_9	$-e_{11}$	$-e_5$	e_7	0	0	0	0	0	0	0	0
e_{10}	e_{10}	e_8	$-e_6$	$-e_4$	0	0	0	0	0	0	0	0
e_{11}	e_{11}	e_9	$-e_7$	$-e_5$	0	0	0	0	0	0	0	0

11)

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{15}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	c_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_7	e_8	e_9	$-e_4$	$-e_5$	$-e_6$	e_{13}	e_{14}	e_{15}	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_9	e_{11}	e_{12}	$-c_{13}$	$-e_{10}$	$-e_{15}$	$-e_4$	$-e_5$	$-e_6$	e_7	e_8	e_9
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_{10}	e_{14}	e_{15}	e_{10}	e_{11}	e_{12}	$-e_7$	$-e_8$	$-e_9$	$-e_4$	$-e_5$	$-e_6$
e_4	e_4	e_7	e_{10}	e_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0
e_5	e_5	e_8	e_{11}	e_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0
e_6	e_6	e_9	e_{12}	e_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
e_7	e_7	$-e_4$	e_{13}	$-e_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_8	e_8	$-e_5$	e_{14}	$-s_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_9	e_9	$-e_6$	e_{15}	$-e_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_{10}	e_{10}	$-e_{13}$	$-e_4$	e_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0
e_{11}	e_{11}	$-e_{14}$	$-e_5$	e_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_{32}	e_{12}	$-c_{15}$	$-e_6$	e_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_{13}	e_{13}	e_{10}	$-e_7$	$-e_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_{14}	e_{14}	e_{11}	$-e_8$	$-e_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_{15}	e_{15}	e_{12}	$-e_0$	$-e_6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Die Multiplicationstafel der Form 8) folgt leicht aus der Tafel der Form 6) bzhw. 7).

Die Multiplicationstafeln 1) — 4), 6) — 8) ändern sich nicht, wenn man die Horizontalreihen und die Verticalreihen vertauscht. Die Multiplication dieser Systeme ist commutativ. Vertauscht man in den Tafeln 5), 9), 10), 11) die Horizontal- und Verticalreihen, so erhält man Multiplicationstafeln die aus den gegebenen Tafeln durch folgende Substitutionen:

5) $\bar{e}_0 = e_0$, $\bar{e}_n = -e_n$, $n = 1, 2, 3$, 9) $\bar{e}_0 = e_0$, $\bar{e}_n = -e_n$, $n = 1, 2, 3$, $\bar{e}_4 = -e_4$, $\bar{e}_p = -e_p$, $p = 5, 6, 7$, 10) $\bar{e}_0 = e_0$, $\bar{e}_n = -e_n$, $n = 1, 2, 3$, $\bar{e}_4 = e_4$, $\bar{e}_5 = e_5$, $\bar{e}_p = -e_p$, $p = 6, 7, 8, 9, 10, 11$. 11) $\bar{e}_0 = e_0$, $\bar{e}_n = -e_n$, $n = 1, 2, 3$, $\bar{e}_r = e_r$, $r = 4, 5, 6$, $\bar{e}_p = -e_p$ $p = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$

hervorgehen, wenn man in den Tafeln die übergesetzten Striche fortlässt. Durche diese Subsitutionen geht das System mit den Grundzahlen e_n in sein reciprokes System mit den Grundzahlen $\bar{e}_n$ über. Die Systeme 1) — 4), 6) — 8) sind zu sich selbst reciprok.

Zusatz.

Jede complexe Zahl von den Formen 1) — 11) kann man mit Hilfe von Punkten, Strecken: Vectoren, wie man sagt, darstellen.

Ist z. B. $i[MN]$ der um einen rechten Winkel gedrehte Vector $[MN]$, so stellt $(a_0 + a_1 i)[MN]$ einen Vector der Ebene der Vectoren $[MN]$ und $i[MN]$ dar; derselbe ist gleich der Summe der Vectoren $a_0[MN]$ und $a_1 i[MN]$. Man kann aber auch $(M; N)^i$ als einen Quotientvector auffassen, dessen Anfangspunkt M und dessen Endpunkt R eine gerade Linie festlegen, die mit MN einen rechten Winkel einschliesst und dieselbe Länge wie MN hat; es ist dann

$$(M; N)^{a_0 + a_1 i} = (M; S)$$

ebenfalls ein Quotientvector und zwar ist der Vector $[MS]$ gleich der Summe der Vectoren $a_0[MN]$ und $a_1[MR]$.

Wenn man in der Form $a_0 + a_1 j$ die Grösse j als Repräsentant des Quotienten von zwei parallelen Einheitsstrecken $\frac{\beta'}{\alpha'}$ nimmt, so ist $a_0 + a_1 \frac{\beta'}{\alpha'}$ der Stellvertreter des Quotienten der parallelen Strecken

$a_0 \alpha' + a_1 \beta'$ und α'. Ist $j\alpha'$ die um eine Länge AB parallel verschobene Strecke β', so stellt $(a_0 + a_1 j)\alpha'$ eine Strecke dar, die gleich der Summe der parallelen Strecken $a_0\alpha'$ und $a_1 j\alpha'$ ist. Nimmt man an, dass $(M; N)^j$ der um eine Länge AB parallel verschobene Quotientvector $(M; N)$ ist, so ist $(M; N)^{a_0 + a_1 j}$ gleich dem Product der Quotientvectoren $(M; N)^{a_0}$, $(M; N)^{a_1 j}$ und nach den Gleichungen 93) wieder ein Quotientvector.

Darmstadt, im Januar 1896.

IV.

Ueber Radical-Kreise.

Von

Juan J. Durán Loriga,

Spanischem Artillerie-Major.

Es ist bekannt, dass der geometrische Ort von denjenigen Punkten, deren Potenzen mit Bezug auf zwei feste Kreise das Verhältniss m/n bewahren, ein Kreis ist; setzt man

$$m = -n$$

so ist diese Linie zu gleicher Zeit der Ort derjenigen Punkte, welche mit Bezug auf zwei andere Kreise gleiche Potenzen und verschiedene Vorzeichen haben; der Analogie wegen wollen wir diese Kreise „Radical-Kreise“ [1]) der ersterwähnten nennen; mit Leichtigkeit lässt sich das Centrum und der Radius dieser Kreise bestimmen.

Bezeichnet man die Potenzen eines Punktes P auf der Ebene mit Bezug auf die Kreise 0 und 0' mit P_0 und P_0' (Fig. 1.), so ist

$$P_0 = -P_0'$$

oder was dasselbe ist, wenn man mit l und l' die Abstände des Punktes P von den Centren und mit d den Abstand 00' bezeichnet so erhält man

---

1) Manche Schriftsteller, besonders die englischen, nennen „Radicalcircle“ einen Kreis, welcher rechtwinklig drei andre Kreise schneidet; passender scheint es uns indessen, hierfür die Bezeichnung „orthotomischer Kreis“ zu wählen und für die gegenwärtige Abhandlung die Ueberschrift „Radical-Kreis“ beizubehalten.

$$l^2 - R^2 = R'^2 - l'^2 \quad \text{d. h.} \quad l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2$$

Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist folglich die Mitte von OO' und sein Radius

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}$$

Um einen Radical-Kreis entstehen zu lassen, ist erforderlich

$$d < \sqrt{2(R^2 + R'^2)}$$

diese Bedingung wird immer erfüllt, wenn die Kreise sich berühren (ausserhalb oder innerhalb), wenn sie sich schneiden, oder wenn sie sich einschliessen; wenn sie sich dagegen ausschliessen, kann je nach Umständen ein Radical-Kreis entstehen oder nicht.

Unter der Voraussetzung, dass die Kreise sich schneiden, muss der Radicalkreis notwendigerweise durch die zwei Schnittpunkte (weil diese die Potenz null haben) gehen und lässt sich unmittelbar construiren. Wenn sie sich ausserhalb berühren, wird der Radical-Kreis den grösseren Kreis innerhalb berühren und zwar in dem Berührungspunkte der gegebenen Kreise (da dieser Punkt die Potenz null mit Bezug auf beide Kreise hat), und da sein Centrum in jedem Falle die Mitte der Linie der Centren ist, ist seine Construction gleichfalls unmittelbar gegeben. Will man seinen Radius numerisch bestimmen, ohne auf die eben erwähnten Erwägungen einzugehen, so setzt man

$$d = R + R'$$

in dem Werte von ϱ und erhält demgemäss

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(R - R')$$

Wenn die Kreise sich innerhalb berühren, so wird der Radical-Kreis gleichfalls die gegebenen Kreise berühren, und sein Radius ist

$$\varrho = \tfrac{1}{4}(R + R')$$

Wenn die Kreise concentrisch sind, so ist es auch mit Bezug auf sie der Radical-Kreis, und man erhält seinen Radius, wenn man in den Wert von ϱ setzt $d = 0$, so dass sich ergiebt

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2)}$$

Für die Construction des Radical-Kreises von zwei Kreisen, die sich ausschliessen (beim Vorhandensein eines solchen Radical-Kreises), oder zwei solchen, die sich einschliessen, sind nachstehende Betrachtungen von Wert. Es seien drei Kreise

0, 0' und 0'' gegeben, deren Radical-Kreise wir mit π_{00}' für 0 und 0' und π_{00}'', für 0 und 0'' bezeichnen wollen; wenn diese Kreise sich schneiden, so ist in den Durchschnittspunkten

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = -P_0' \\ P_0 = -P_0'' \end{array}\right. \quad \text{folglich} \quad P_0' = P_0''$$

d. h. die Radical-Axe von 0' und 0'' ist zugleich die von π_{06}' und π_{00}''. Wenn die Radical-Kreise sich nicht schneiden, ist der geometrische Beweis gleichfalls leicht, und noch einfacher ist der analytische Beweis, wie weiter unten gezeigt werden wird.

Diese Bemerkungen vorausgeschickt, ist es leicht, den Radical-Kreis von zwei Kreisen, die sich ausschliessen (beim Vorhandensein eines solchen Radical-Kreises) und zwei solchen, die sich einschliessen 0 und 0' zu finden. Man schneidet beide Kreise durch einen dritten 0'', bestimmt den Radical Kreis von 0 und 0'', sowie die Radical-Axe von 0' und 0'' und erhält so einen oder zwei Punkte des zu bestimmenden Kreises, dessen Centrum bekannt ist. Der Kreis 0'' muss richtig gewählt werden, damit die Radical-Axe und der Radicalkreis sich schneiden. Für den Fall, dass die gegebenen Kreise sich ausschliessen (und dies ist der einzige Fall, wo ein Radical-Kreis unter Umständen nicht existiren kann) kann man vermöge der nachfolgenden Construction ermitteln, ob der Radical-Kreis existirt. Man errichtet auf dem Ende des Radius $0A$ (Fig. 1.) die Perpendiculäre AB gleich dem Radius R' des anderen Kreises, verbindet 0 mit B, zieht die Perpendiculäre

$$BC = 0B$$

und beschreibt mit dem Radius $0C$ einen Kreis: wenn dieser Kreis das Centrum 0' einschliesst, ist der Radical-Kreis vorhanden. Die Einfachheit dieser Construction macht weitere Erörterungen überflüssig.

Wenn zwei Kreise orthogonal sind, so erhellt, dass der Radical-Kreis durch ihre Centren geht, wie sich auch aus dem Werte von ϱ ergiebt; denn wenn

$$R^2 + R'^2 = \overline{00'}^2, \quad \text{so ist} \quad \varrho = \tfrac{1}{2}00'$$

Es ist auch ersichtlich, dass die umgekehrte Schlussfolgerung leicht zu ziehen ist.

Die Betrachtungen über Radical-Kreise führen unmittelbar zur Lösung des nachfolgenden Problems.

Zwei Kreise berühren sich beispielsweise innerhalb 0 und 0′ (Fig. 2.) mit den Radien R und R'; durch den Berührungspunkt p zieht man Secanten z. B. pam, welche man im entgegengesetzten Sinne verlängert

$$am' = am$$

Welches ist der geometrische Ort des Punktes m'?

Man zieht den Kreis 0″, der als Radical-Kreis 0′ hat mit Bezug auf 0; dann hat man als absoluten Wert

$$ap \,.\, am = ap \,.\, am'$$

und deshalb

$$am' = am$$

der gesuchte Ort ist folglich der Kreis 0″; um seinen Radius x zu bestimmen, wollen wir bemerken, dass

$$R' = \tfrac{1}{2}(R - x)$$

woraus sich ergiebt

$$x = R - 2R'$$

Der gefundene Kreis berührt den Kreis 0 ausser- oder innerhalb, je nachdem $R - 2R' \gtrless 0$. Wenn der Kreis 0′ durch den Punkt 0 geht, so wird der geometrische Ort auf den Punkt p beschränkt, wie ersichtlich ist.

Hat man drei Kreise 0, 0′ und 0″, und bestimmt man z. B. die Radical-Kreise von zwei Gruppen 00′ und 00″, so ist, wie oben erwähnt, die Radical-Axe dieser Radical-Kreise dieselbe wie die der Kreise der dritten Gruppe. Hiernach lässt sich mit Leichtigkeit beweisen, dass die Kreise, welche über den Medianen eines Dreiecks als Durchmessern beschrieben sind, paarweise die Höhen des erwähnten Dreiecks zu Radical-Axen haben. Wenn man über den Seiten eines Dreiecks als Durchmessern Kreise beschreibt, so beobachtet man in der Tat, dass die Radical-Kreise derselben die über den Medianen beschriebenen sind (so z. B. ist der Radical-Kreis, der den um b und c beschriebenen Kreisen entspricht, derjenige, der als Durchmesser die der Seite a entsprechende Mediane hat); dementsprechend müssen also die Radical-Axen dieser letzterwähnten Radical-Kreise dieselben sein wie diejenigen, die den ersterwähnten Kreisen entsprechen, d. h. sie müssen die Höhen des Dreiecks sein. Man hat also sechs Kreise, die als gemeinsames Radical-Centrum das Orthocentrum des gegebenen Dreiecks haben.

Betrachtet man jetzt die Kreise, die um die Mitten der Dreiecks-Seiten als Centren geschlagen sind mit einem Radius, der den

entsprechenden Medianen gleich ist, — Kreise, die wir Potential-Kreise genannt haben aus gewissen Gründen (vergl. unsere Note in „Progreso Matematico", Bd. V, Seite 7_0) — so ist ersichtlich, dass die erwähnten Kreise dieselben sind, wie die, die man beschreibt, wenn man als Durchmesser die Medianen des anticomplementären Dreiecks nimmt; aber andrerseits, entsprechend dem vorher Ausgeführten, sind diese Kreise die Radicalen der über den Seiten des letzteren Dreiecks beschriebenen: folglich kann man sagen, „dass die „Kreise, die um die Eckpunkte eines Dreiecks als Centren be-„schrieben werden mit Radien, die den entgegengesetzten Seiten „gleich sind, zu Radical-Kreisen die Potential-Kreise dieses Drei-„ecks haben, und dass folglich ihr Radical-Centrum das Orthocentrum „des anticomplementären Dreiecks ist."

Wir haben also eine zweite Gruppe von sechs Kreisen, welche dasselbe Radical-Centrum besitzen.

Wenn zwei Kreise orthogonal sind, so hat, wie erwähnt, der Radical-Kreis als Durchmesser die Linie der Centren, und da der Longchamp'sche Kreis orthotomisch ist zu denjenigen, welche um die Endpunkte eines Dreiecks mit den entgegesetzten Seiten als Radien beschrieben werden, so ergiebt sich, dass diejenigen Kreise, deren Durchmesser die Geraden sind, welche die Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Orthocentrum des anticomplementären Dreiecks verbinden, die Radicalen des Longchamp'schen Kreises sind und der obenerwähnten drei anderen Kreise.

Dasselbe Kriterium kann auch dazu dienen, die Radical-Kreise einiger andern Kreise des Dreiecks zu finden, unbeschadet des Umstandes, dass man in jedem Falle die analytische Geometrie zu Hilfe nehmen kann; es ist in der Tat ersichtlich, dass, wenn

$$C = 0 \quad \text{und} \quad C' = 0$$

die Gleichungen zweier Kreise sind, die des Radical-Kreises

$$C + C' = 0$$

sein muss, möge es sich um cartesinische oder trilineare Coordinaten handeln; so ist der Radical-Kreis der Kreise, die durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0$$

dargestellt werden, der folgende:

$$x^2 + y^2 + (A + A')x + (B + B')y + \tfrac{1}{2}(C + C') = 0$$

und wenn man insbesondere als Axe der X die Linie der Centren nimmt, und einer dieser Kreise sein Centrum in dem Coordinatenursprung hat (ein rechtwinkliges System angenommen); so ist der Radical-Kreis

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+y^2=\frac{2(R^2+R'^2)-\alpha^2}{4}$$

ein Resultat, welches unsere früheren Ausführungen bekräftigt, nämlich dass die Distanz der Centren kleiner sein muss als $\sqrt{2(R^2+R'^2)}$, damit der Radical-Kreis existirt. Wenn die Distanz $\sqrt{2(R^2+R'^2)}$ ist, so beschränkt sich der Kreis auf einen Punkt, welcher auf der Linie der Centren liegt, und zwar innerhalb des Kreises mit dem grösseren Durchmesser und in einer Distanz von seinem Centrum, die der vorher erwähnten radicalen Grösse gleich ist, dividirt durch zwei.

Wenn es sich um barycentrische Coordinaten handelt, und die gegebenen Kreise sind

$$\Sigma\alpha x\,\Sigma u\,\alpha - \Sigma a^2\beta y = 0$$
$$\Sigma\alpha x\,\Sigma u'\alpha - \Sigma a^2\beta z = 0$$

so ist der Radical-Kreis

$$\Sigma\alpha\;\Sigma(u+u')\alpha - 2\Sigma a^2\beta y - 0$$

Es ist sehr leicht, analytisch eine Behauptung zu beweisen, wie wir sie oben aufgestellt haben, nämlich dass, wenn man drei Kreise 0, 0′ und 0″ hat und sie paarweise gruppirt, die Radical-Axe der Radical-Kreise von zwei Gruppen zugleich die der dritten Gruppe ist. Man hat in der Tat, wenn man

$$C=0,\quad C'=0,\quad C''=0$$

nennt, die Gleichungen der drei gegebenen Kreise.

Der Radical-Kreis von $\begin{cases} C=0 \\ C'=0 \end{cases}$ ist $C+C'=0$

Radical-Axe von $\begin{cases} C+C'=0 \\ C+C''=0 \end{cases}$ ist $C'-C''=0$

Der Radical-Kreis von $\begin{cases} C=0 \\ C''=0 \end{cases}$ ist $C+C''=0$

Radical Axe von $\begin{cases} C'=0 \\ C''=0 \end{cases}$ ist $C'-C''=0$

Wenn man die Radical-Kreise von drei gegebenen Kreisen gefunden hat und fortfährt in derselben Weise (soweit dies möglich ist) zu operiren mit denjenigen, die man nach und nach erhält, so können dreifache Reihen von Kreisen entstehen, die gewissen interessanten Beziehungen unterworfen sind.

Die Betrachtung von Radical-Kreisen in der Geometrie des Dreiecks kann höchst wahrscheinlich neue Resultate herbeiführen, wenn man die Radical-Kreise von bemerkenswerten Kreisen des Dreiecks mit anderen Kreisen, Geraden und Punkten vergleicht, die mit dem Dreieck im Zusammenhang stehen; wir behalten uns vor die Ideen, die wir hier nur angedeutet haben, an andrer Stelle noch ausführlicher zu entwickeln.

Coruña, April 1896.

V.

Zur analytischen Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

Eine Programmarbeit von Huth über die Curven constanter Steigung auf gegebenen Flächen macht es sich zur Aufgabe, diese Curven für einige specielle Flächen (sämtlich 2. Grades) entwickelt darzustellen. Damit ist ein Anfang gemacht, ein zu den Principien der Curventheorie gehöriges Problem in Untersuchung zu nehmen, ein Anfang der sich nach 2 Seiten hin fortsetzen lässt.

Die Bestimmung einer Curve im Raume hängt von 2 Functionen ab, von deren Complication man das Problem ihrer Darstellung befreien kann, indem man das Bogenelement zwischen ihren Gleichungen eliminirt. So nämlich teilt sich das Problem in 2 einfachere, deren jedes nur eine Gleichung zu befriedigen hat. Die Lösung des ersten Teilproblems ergibt eine Classe von Curven, der die gesuchte Curve angehört; das zweite sucht nur den Ausdruck des Bogenelements, nach dessen Ermittelung die Coordinaten schon in Quadraturen bekannt sind. Jede Classe wird nur durch Relationen von Richtungen, unabhängig von den unendlich kleinen Strecken, in wechen die Richtungen verfolgt werden, also unabhängig von allen Lineardehnungen, charakterisirt; ihr Normalausdruck ist das Tangentensystem.

Da Richtungen nur relativ unter sich Bedeutung haben, so können als Urvariable nur solche eingeführt werden, die von der Lage der Curve im Raume unabhängig sind. Es gibt deren 4 von hervorragender Rolle in allen bisher aufgestellten Theoremen. Seien $\partial\tau$, $\partial\vartheta$, $\partial\sigma$ die Coincidenzwinkel der 3 begleitenden Axen, d. i. der

Tangente, Binormale, Hauptnormale. Dann sind die Integrale, τ, ϑ, σ (von A. Serret die Indicatricen der Tangente, Binormale, Hauptnormale genannt) die ersten 3, und, wenn man $\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \operatorname{tg}\lambda$ setzt, λ das vierte jener fundamentalen Variabeln. Sie stehen in folgender geometrischen Beziehung. Durch ϑ, τ als rechtwinklige Coordinaten in einer festen Ebene wird ein Punkt bestimmt, der eine ebene Linie, die Torsionslinie σ, erzeugt: τ und ϑ heissen der Krümmungswinkel und Torsionswinkel, σ der Torsionsbogen, λ, d. i. der Winkel zwischen der Tangente an σ und der τ Axe, die Krümmungsbreite.

Eine Gleichung zwischen τ und ϑ (die specifische Gleichung) bestimmt dann einerseits die Curvenclasse, andererseits die Torsionslinie. Wir nehmen daher die Torsionslinie zum Merkmal der Curvenclasse. Es ist dann die Aufgabe, die Curvenclasse durch expliciten Ausdruck der Richtungscosinus der Tangente entwickelt darzustellen. Allgemein reducirt sie sich auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Für einige Torsionslinien ist sie gelöst, von denen wir nur die 2 einfachsten in Betracht ziehen wollen.

I. Gerade Torsionslinie.

Ihre Gleichung lautet:

$$\vartheta = \tau \operatorname{tg}\lambda, \quad \lambda \text{ constant}$$

Die Curven dieser Classe haben die Eigenschaft, dass die Hauptnormale beständig normal zu einer festen Geraden ist. Letztere sei x Axe und vertical zu denken, die yz Ebene als Horizont betrachtet. Dann ist jede solche Curve eine Curve constanter Steigung, von der Huth handelt, von manchen Mathematikern „Helix“ genannt. Die Richtungscosinus der Tangente sind:

$$f = \sin\lambda; \quad g = \cos\lambda\cos\sigma; \quad h = \cos\lambda\sin\sigma \tag{1}$$

und λ ihr Steigungswinkel.

II. Kreis als Torsionslinie.

Die Gleichung lautet:

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \cot^2\alpha$$

und zwar ist

$$\tau = \cot\alpha\sin\lambda; \quad \vartheta = \cot\alpha\cos\lambda$$

Die Curven dieser Classe haben die Eigenschaft, dass die Haupt-

normale mit einer festen Geraden (der verticalen x Axe) einen constanten Winkel $R - \alpha$ bildet. Die Richtungscosinus der Tangente sind:

$$f = \cos\alpha \sin\lambda; \quad g = \cos\lambda \cos\frac{\lambda}{\sin\alpha} + \sin\alpha\sin\lambda\sin\frac{\lambda}{\sin\alpha} \tag{2}$$

$$h = \cos\lambda \sin\frac{\lambda}{\sin\alpha} - \sin\alpha\sin\lambda\cos\frac{\lambda}{\sin\alpha}$$

Zur vollständigen Bestimmung einer Curve, deren Tangentensystem bekannt ist, gehört nun bloss noch der Ausdruck des Bogenelements ∂s. Ist dieser gegeben, so sind die Gleichungen der Curve:

$$x = \int f\,\partial s; \quad y = \int g\,\partial s; \quad z = \int h\,\partial s \tag{3}$$

Ist ∂s durch Bedingungen bestimmt, so bleibt eine Gleichung oder ein System solcher zu lösen, worin jedoch s einzige Unbekannte ist.

Das Bogenelement kann nun u. a. bestimmt werden durch eine, in bestimmter relativer Lage zum Tangentensystem gegebene Fläche, auf welcher die Curve s liegen soll. Diesen Fall ziehe ich, wie Huth es getan, allein in Betracht. Die Aufgabe, aus dieser Bedingung das Bogenelement zu finden, habe ich in Crelle J. Bd. LXIII. allgemein gelöst. Hier will ich mich auf den Fall beschränken, wo die Fläche eine Kugelfläche vom Radius c ist. Die Lösung lautet dann:

$$\partial s = c\,\partial\tau \cos\vartheta \tag{4}$$

Dieser Wert in die Gl. (3) eingesetzt gibt somit die Gleichung aller sphärischen Curven, deren specifische Gleichung gelöst ist, in Quadraturen.

In Anwendung auf die Curven constanter Steigung I., wo

$$\tau = \vartheta \cot\lambda; \quad \sigma = \frac{\vartheta}{\sin\lambda} \tag{5}$$

erhält man nach den Gl. (1):

$$x = c\cos\lambda \int \partial\vartheta \cos\vartheta = c\cos\lambda\sin\vartheta \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= c\cot\lambda\cos\lambda \int \cos\vartheta\cos\frac{\vartheta}{\sin\lambda}\,\partial\vartheta \\ &= c(\sin\sigma\cos\vartheta - \sin\lambda\cos\sigma\sin\vartheta) \\ z &= c\cot\lambda\cos\lambda \int \cos\vartheta\sin\frac{\vartheta}{\sin\lambda}\,\partial\vartheta \\ &= -c(\cos\sigma\cos\vartheta + \sin\lambda\sin\sigma\sin\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Werte die auch sichtlich die Flächengleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

erfüllen.

Aus geometrischer Betrachtung erhellt sogleich, dass in der Nähe der Pole eine Curve von der Steigung λ unmöglich ist, weil von den Polen aus jede Curve mit der Steigung null beginnt. Dies bestätigt auch die Formel; denn Gl (6) zeigt, dass x zwischen $\pm c \cos\lambda$ variirt, dass also die Curve ganz auf der so begrenzten Zone verläuft.

Ferner geht sowol durch Figurbetrachtung als auch aus der Formel hervor, dass an der Grenze der Zone die Curve nur in der Meridianrichtung eine Steigung $= \lambda$ haben kann; denn hier ist für $\cos\vartheta = 0$ nach Gl. (1) (7)

$$\frac{h}{g} = \frac{z}{y}$$

folglich berührt die Curve den Meridian und hat hier einen Rückkehrpunkt, von dem an ihre Steigung in eine Senkung übergeht. Nach Gl. (4) ist der Krümmungsradius daselbst $= 0$.

Wir wenden nun das Bogenelement (4) auf die Classe II. an, setzen also in Gl. (3) die Werte (4) (2) ein. Die Integration ist für x ausführbar; denn man hat:

$$\partial\tau = \partial\vartheta \cot\lambda; \quad \cos\lambda = \vartheta \operatorname{tg}\alpha$$

also:

$$x = -c \sin\alpha \int \vartheta\partial\vartheta \cos\vartheta$$
$$= -c \sin\alpha(\cos\vartheta + \vartheta \sin\vartheta) \tag{8}$$

Von den 2 anderen Integrationen ist wenigstens die eine für die Specialwerte

$$\sin\alpha = \frac{1}{n} \; (n = 2, 3, 4, 5, \ldots) \quad \text{also}$$
$$\tau^2 + \vartheta^2 = a^2 - 1 = 3, 8, 15, 24, \ldots$$

ausführbar. Es wird

$$y = -\frac{c}{\sqrt{n^2-1}} \int \vartheta\partial\vartheta \cos\vartheta \left(\cot\lambda\cos n\lambda + \frac{1}{n}\sin n\lambda\right) \tag{9}$$

$$z = -\frac{c}{\sqrt{n^2-1}} \int \vartheta\partial\vartheta \cos\vartheta \left(\cot\lambda\sin n\lambda - \frac{1}{n}\cos n\lambda\right) \tag{10}$$

daher für $n = 2$

$$z = -c\sqrt{\tfrac{1}{3}} \int \vartheta\partial\vartheta \cos\vartheta (2\cos^2\lambda - \tfrac{1}{2}\cos 2\lambda)$$
$$= c\sqrt{3}\{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\vartheta^2)\cos\vartheta + (\tfrac{1}{2}\vartheta - \tfrac{1}{3}\vartheta^3)\sin\vartheta\}$$

für $n = 3$

$$z = -\frac{c}{48\sqrt{2}}\int \vartheta^5 \partial\vartheta \cos\vartheta$$

$$= -\frac{5c}{2\sqrt{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\vartheta^2+\frac{1}{24}\vartheta^4\right)\cos\vartheta+\left(\vartheta-\frac{1}{6}\vartheta^3+\frac{1}{120}\vartheta^5\right)\sin\vartheta\right\}$$

u. s. w.

Nachdem nun x und z gefunden sind, ergibt sich auch

$$y = \sqrt{c^2 - x^2 - z^2}$$

Diese Gleichung zeigt zugleich, dass die 2 Integrale in Gl. (9) sich auf einander reduciren lassen, was unmittelbar nicht ersichtlich ist.

VI.

Die Secanten und Tangenten des Folium Cartesii.

(M. 1 Figur.)

Von

Oberlehrer Dr. **A. Himstedt.**

---

§ 1. Der Erfinder der analytischen Geometrie, René Descartes (od. Cartesius), führt in seinen Briefen eine Curve III. Ordnung an, welche der Gleichung

$$(1) \ldots x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

entspricht und die wegen ihrer blattähnlichen Gestalt den Namen Folium bekommen hat. Die in dieser Gleichung vorkommende Constante a können wir unbeschadet der Allgemeinheit als positiv voraussetzen; denn wäre $a < 0$, so könnten wir durch Vertauschung der positiven Halbachsen mit den negativen die Gleichung so umformen, dass die Constante $a > 0$ wird.

Setzen wir

$$y = tx$$

so folgt aus obiger Gleichung

$$(2) \ldots x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

ein System, welches den Vorzug hat, die Rechnungen in vielen Fällen zu vereinfachen.

§ 2. Um die Lage der Curve zu den Achsen zu bestimmen, erteilen wir dem Parameter t alle Werte von

$$t = -\infty \text{ bis } t = +\infty$$

Wächst derselbe von

$$t = 0 \text{ bis } t = 1$$

so wächst die Abscisse von

$$x = 0 \text{ bis } x = \tfrac{3}{2}a$$

und ebenso die Ordinate von

$$y = 0 \text{ bis } y = \tfrac{3}{2}a$$

Wächst der Parameter von

$$t = 1 \text{ bis } t = \infty$$

so nehmen x und y gleichzeitig ab von $\frac{3}{2}a$ bis null. Folglich besitzt die Curve im ersten Quadranten einen geschlossenen Zug, das eigentliche Folium, welches vom Anfangspunkte ausgeht und über den Punkt

$$x = y = \tfrac{3}{2}a$$

die Spitze des Folium, dorthin zurückkehrt.

Nimmt der Parameter ab von

$$t = 0 \text{ bis } t = -1$$

so ist die Abscisse x stets negativ und nimmt ab von

$$x = 0 \text{ bis } x = -\infty$$

während die Ordinaten positiv sind und von

$$y = 0 \text{ bis } y = \infty$$

wachsen. Die Curve besitzt also einen unendlichen Ast, welcher ganz im zweiten Quadranten liegt und vom Anfangspunkt sich in's Unendliche erstreckt.

Wenn endlich der Parameter von

$$t = -1 \text{ bis } t = -\infty$$

abnimmt, so ist die Abscisse stets positiv und nimmt von

$$x = +\infty \text{ bis } x = 0$$

ab, während die Ordinaten stets negativ sind und von

$$y = -\infty \text{ bis } y = 0$$

zunehmen, d. h. die Curve hat einen zweiten unendlichen Ast, welcher ganz im vierten Quadranten gelegen ist und aus dem Unendlichen zum Anfangspunkt zurückkehrt. Aus Allem ergiebt sich, dass kein Teil der Curve im dritten Quadranten liegt.

§ 3. Da die Gleichung (1) symmetrisch in Bezug auf x und y ist, so muss die Halbirungslinie der positiven (od. negativen) Halbachsen eine Symmetrieachse der Curve sein und diese in zwei congruente Hälften teilen. In der Tat, drehen wir das Coordinatensystem um 45⁰, indem wir

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(\xi - \eta), \quad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(\xi + \eta)$$

setzen, so geht (1) über in

$$(3) \;.\;.\;.\; \xi^3 + 3\xi\eta^2 - 3c(\xi^2 - \eta^2) = 0, \quad c^2 = \tfrac{1}{2}a^2$$

und da diese Gleichung nur gerade Potenzen von η enthält, so entsprechen jedem ξ zwei entgegengesetzt gleiche Werte des η.

§ 4. Die Gleichung (1) enthält weder ein absolutes Glied noch Glieder erster Dimension. Daraus folgt, dass die Curve im Anfangspunkte einen Doppelpunkt besitzt. Da nun alle Curven III. O. mit einem Doppelpunkte rationale Curven sind, so ist auch das Folium eine rationale Curve, und in der Tat haben wir gesehen, dass sich die Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes rational mit Hilfe eines Parameters darstellen lassen.

Das Tangentenpaar des Doppelpunktes ist durch die Gleichung

$$xy = 0$$

gegeben. Die beiden Tangenten fallen demnach mit den Coordinatenachsen zusammen, und der Doppelpunkt ist ein solcher, in welchem sich zwei verschiedene Zweige der Curve durchschneiden.

§ 5. Das Folium Cartesii hat, wie jede Curve III. O., drei Asymptotenrichtungen, welche wir dadurch bestimmen können, dass wir die Glieder höchster Dimension gleich null setzen und dann die linke Seite dieser Gleichung in lineare Factoren zerlegen. Dies giebt:

$$x^3 + y^3 = 0, \quad \text{oder:}$$

$$(x + y) \,.\, [2x - y\,(1 + i\,\sqrt{3})] \,.\, [2x - y(1 - i\,\sqrt{3})] = 0$$

Unsere Curve hat demnach eine reelle und zwei imaginäre Asymptotenrichtungen. Um die reelle Asymptote zu finden, setzen wir:

$$x + y + h = 0$$

und bestimmen die Grösse h derart, dass diese Gerade mit der Curve mindestens zwei Punkte im Unendlichen gemein hat. Durch Elimination von y aus dieser Gleichung und (1) finden wir:

$$(4) \ldots (a-h)x^2 + h(a-h)x - \frac{h^3}{a} = 0$$

Setzen wir also $h = 0$, so erniedrigt sich der Grad der Curvengleichung um 3 Einheiten, d. h. die Gerade

$$(5) \ldots x + y + a = 0$$

schneidet die Curve dreimal im Unendlichen und ist also eine Asymptote. Letztere ist zugleich Wendetangente und der im Unendlichen gelegene Berührungspunkt ein Wendepunkt der Curve. Hieraus folgt noch, dass die Curve ihrer ganzen Ausdehnung nach auf einer und derselben Seite ihrer Asymptote liegt.

§ 6. Eine durch den Anfangspunkt gezogene Gerade schneidet die Curve in 3 Punkten, von denen zwei mit dem Anfangspunkte zusammenfallen. Denn eliminirt man aus

$$y = tx$$

und (1) eine Unbekannte. z. B. y, so folgt:

$$x^2[(1+t^3)x - 3at] = 0$$

eine Gleichung, welche offenbar zwei gleiche Wurzeln $x = 0$ hat. Die dritte Wurzel hat den Wert:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}$$

Ist also der Richtungswinkel der Geraden ein spitzer ($t > 0$), so liegt der dritte Schnittpunkt auf dem Folium selbst. (Vergl. § 2.). Ist jener Winkel stumpf ($t < 0$), so liegt der dritte Schnittpunkt auf einem der unendlichen Aeste. Für $t = 1$ sind die Coordinaten des dritten Schnittpunktes:

$$x = \tfrac{3}{2}a, \quad y = \tfrac{3}{2}a$$

Die Gerade fällt dann mit der Symmetrieachse der Curve zusammen. Der Abstand des Anfangspunktes von der Spitze des Folium hat den Wert $\frac{3}{2}a\sqrt{2}$.

§ 7. Eine Parallele zur y-Achse, $x = h$, schneidet die Curve in drei Punkten, deren Parameter wir aus der Gleichung

$$h = \frac{3at}{1+t^3}, \text{ oder}$$

(6) . . . $t^3 - 3\frac{a}{h}t + 1 = 0$

entnehmen. In dieser Gleichung fehlt das mit t^2 behaftete Glied. Bezeichnen wir demnach die Wurzeln der Gleichung (6) mit $t_1 t_2$ und t_3, so haben wir die Relation

(7) . . . $t_1 + t_2 + t_3 = 0$

d. h. schneidet eine zur y-Achse parallel laufende Gerade die Curve in drei Punkten, so ist die Summe der Parameter dieser Punkte identisch gleich null. Ferner folgt aus (6), dass

(8) . . . $t_1 t_2 . t_3 = -1$

Demnach sind von den Wurzeln der Gleichung (6) zwei positiv und die dritte negativ, woraus mit Rücksicht auf § 2. folgt, dass von den 3 Schnittpunkten 2 auf dem Folium selbst, der dritte auf einem der unendlichen Aeste liegt.

Um nun die Beschaffenheit der 3 Wurzeln noch genauer zu untersuchen, berechnen wir die Discriminante der Gleichung (6). Dies giebt:

(9) . . . $\Delta = \frac{1}{4} - \frac{a^3}{h^3}$

Nun hat eine reducirte kubische Gleichung drei reelle Wurzeln, wenn ihre Discriminante Δ negativ ist, dagegen eine reelle und zwei imaginäre, wenn Δ positiv ist, und endlich zwei gleiche Wurzeln, wenn $\Delta = 0$ ist. Wenden wir dies auf den vorliegenden Fall an, so ergiebt sich Folgendes. Ist $h < 0$, so ist $\Delta > 0$, d. h. jede Parallele zur y-Achse, welche links von dieser Achse liegt, schneidet die Curve in einem reellen und zwei imaginären Punkten. Ist ferner $a\sqrt[3]{4} > h > 0$, so ist $\Delta < 0$, und die Gerade hat unter dieser Bedingung drei reelle Schnittpunkte mit der Curve gemein. Ist endlich $h > a\sqrt[3]{4}$, so ist Δ wieder positiv, so dass die Gerade dann wieder einen rellen und zwei imaginäre Schnittpunkte liefert. In dem Grenzfalle

$$h = a\sqrt[3]{4} \text{ ist } \Delta = 0$$

d. h. die Gerade

(10) . . . $x = a\sqrt[3]{4}$

ist eine Tangente der Curve. Diese Tangente schneidet die Curve in 3 Punkten, deren Parameter sich aus

$$t^3 - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2} + 1 = 0, \quad \text{oder}$$

(11) . . . $(t - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}})^2 \cdot (t + 2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}) = 0$

ergeben. Der Berührungspunkt dieser Tangente entspricht demnach dem Parameter

$$t = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

und liegt also auf dem eigentlichen Folium, während der sog. Tangentialpunkt dem Parameter

$$t = -2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

entspricht und folglich auf einem der unendlichen Aeste liegt. — Wir wollen noch den andern Grenzfall $h = 0$ erwähnen, welcher der y-Achse selbst entspricht. Hier folgt unmittelbar aus Gleichung (1), dass die Gerade $x = 0$ drei zusammenfallende Punkte mit der Curve gemein hat. Die y-Achse ist die Tangente des Doppelpunktes.

Analoge Resultate ergeben sich, wenn wir die Schnittpunkte der Curve mit einer Parallelen zur x-Achse $y = h$ untersuchen, deren Parameter offenbar aus der Gleichung

$$t^3 - 3\frac{a}{h}t^2 + 1 = 0$$

entnommen werden können. Diese Gleichung können wir durch die Substitution

$$t = \frac{1}{\lambda}$$

leicht auf die reducirte Form bringen, und dann gestaltet sich die Discussion genau so wie bei (6).

§ 8. Eine Parallele zur Asymptote der Curve hat die Gleichung:

(12) . . . $x + y + h = 0$

Um die Schnittpunkte dieser Geraden zu bestimmen, setzen wir für x und y die Werte (2) in vorstehende Gleichung ein und erhalten dann:

$$ht^3 + 3at^2 + 3at + h = 0, \quad \text{oder}$$
$$(t+1)[ht^2 + (3a - h)t + h] = 0$$

Die eine Wurzel dieser Gleichung ist also

$$t = -1$$

für welchen Wert die Coordinaten x und y unendlich gross werden, (cfr. § 2.) d. h. jede Parallele zur Asymptote schneidet die Curve, wie vorauszusehen war, einmal im Unendlichen.

Die beiden andern Wurzeln der obigen Gleichung sind:

$$(13) \ldots t = \frac{h - 3a \pm \sqrt{3(3a + h)(a - h)}}{2h}$$

Dieselben sind einander gleich, entweder, wenn $a = h$ ist, welcher Fall der Asymptote selbst entspricht, oder wenn

$$h = -3a$$

ist. Die Gerade

$$x + y - 3a = 0$$

ist demnach eine Tangente der Curve, deren Berührungspunkt, wie leicht zu zeigen ist, mit der Spitze des Folium zusammenfällt. Ferner folgt aus (13), dass die beiden Wurzeln nur dann reell sind, wenn

$$a > h > -3a$$

ist., d. h. wenn die Gerade (12) zwischen der Asymptote und der Tangente in der Spitze des Folium liegt. In jedem andern Falle hat jene Gerade mit der Curve ausser dem unendlich fernen Punkte noch zwei imaginäre Punkte gemein.

§ 9. Wir wollen jetzt auf der Curve einen Punkt M_0 annehmen, etwa

$$x_0 = \frac{3at_0}{1 + t_0^3}, \quad y_0 = \frac{3at_0^2}{1 + t_0^3}$$

und durch ihn eine beliebige Gerade

$$(14) \ldots y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

legen. Die Substitution von t und t_0 ergiebt:

$$\frac{3at^2}{1 + t^3} - \frac{3at_0^2}{1 + t_0^3} = \lambda\left(\frac{3at}{1 + t^3} - \frac{3at_0}{1 + t_0^3}\right)$$

woraus nach einigen Umformungen folgt:

$$(t - t_0)\left[t_0(\lambda - t_0)t^2 + (1 + \lambda t_0^2)t - (\lambda - t_0)\right] = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist

$$t = t_0$$

wie vorauszusehen war; die beiden andern sind:

$$(15) \ldots t = \frac{(1 + \lambda t_0^2) \pm \sqrt{(1 + \lambda t_0)^2 + 4t_0(t_0 - \lambda)^2}}{2t_0(t_0 - \lambda)}$$

Wie man sieht, sind diese beide Wurzeln für jedes positive t_0 reell. Folglich hat jede Gerade, welche durch einen auf dem eigentlichen Folium gelegenen Punkt gezogen wird, drei reelle Punkte mit der Curve gemein. Dies lässt sich auch auf geometrischem Wege zeigen. Denn eine Gerade, welche einen geschlossenen Linienzug einmal durchschneidet, muss denselben notwendig nochmals durchschneiden; und eine Gerade, welche eine Curve III. O. in zwei reellen Punkten durchschneidet, hat mit ihr stets noch einen dritten reellen Punkt gemein. Dieser dritte Schnittpunkt muss nun, da er auf dem Folium selbst offenbar nicht liegen kann, notwendig einem der unendlichen Aeste angehören. In der Tat haben die beiden Wurzeln (15) für ein positives t_0 verschiedene Vorzeichen, woraus sich nach § 2. das Gesagte ergiebt. — Ist umgekehrt $t_0 < 0$, so können die beiden Wurzeln (15) ebenso gut reell wie imaginär sein; d. h. zieht man durch einen Punkt, welcher auf einem der unendlichen Aeste liegt, eine Gerade, so hat dieselbe mit der Curve ausser jenem Punkte noch zwei weitere Punkte gemein, welche entweder reell oder imaginär sind.

§ 10. Es seien zwei Curvenpunkte M_0 und M_1 gegeben: dann ist die Gleichung der Geraden $M_0 M_1$

$$x(y_0 - y_1) - y(x_0 - x_1) + (x_0 y_1 - x_1 y_0) = 0$$

oder, wenn wir die Parameter t_0 und t_1 der beiden Punkte M_0 und M_1 einführen:

$$x(t_0^2 - t_1^2 + t_0^2 t_1^3 - t_1^2 t_0^3) - y(t_0 - t_1 + t_0 t_1^3 - t_0^3 t_1) - 3a t_0 t_1 (t_0 - t_1) = 0$$

Diese Gleichung lässt sich durch $(t_0 - t_1)$ dividiren; es resultirt

$$(16) \ldots x(t_0 + t_1 - t_0^2 t_1^2) - y(1 - t_0^2 t_1 - t_0 t_1^2) - 3a t_0 t_1 = 0$$

Dies ist die Gleichung der Secante $M_0 M_1$. Um ihre Schnittpunkte mit der Curve zu bestimmen, substituiren wir für x und y die Werte (2) und erhalten dann:

$$t_0 t_1 t^3 + (1 - t_0 t_1^2 - t_0^2 t_1) t^2 + (t_0^2 t_1^2 - t_1 - t_0) t + t_0 t_1 = 0$$

oder

$$(17) \ldots (t - t_0)(t - t_1)(t_0 t_1 t + 1) = 0$$

Jene Secante durchschneidet also die Curve in drei Punkten, von denen zwei, wie zu erwarten war, mit M_0 und M_1 zusammenfallen, nämlich

$$t = t_0 \quad \text{und} \quad t = t_1$$

Der dritte Schnittpunkt entspricht dem Parameter:

$$(18) \ldots t = -\frac{1}{t_0 t_1}$$

Demnach ist dieser Parameter positiv oder negativ, je nachdem t_0 und t_1 ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben, d. h. eine Gerade, welche das eigentliche Folium zweimal durchschneidet, hat ihren dritten Schnittpunkt auf einem der unendlichen Aeste, und eine Gerade, welche die unendlichen Aeste 2 mal durchschneidet, schneidet dieselben auch noch zum dritten Male. Dagegen muss eine Gerade, welche einen Punkt des eigentlichen Folium mit einem Punkte der unendlichen Aeste verbindet, ihren dritten Schnittpunkt auf dem eigentlichen Folium haben. Alle diese Sätze sind auch geometrisch evident.

§ 11. Wir wollen jetzt annehmen, dass die beiden Curvenpunkte M_0 und M_1 zusammenfallen, so dass die Secante $M_0 M_1$ in die Tangente übergeht. Die Gleichung dieser Tangente leiten wir aus (16) ab, indem wir

$$t_1 = t_0$$

setzen. Wir erhalten dann

$$(19) \ldots x(2t_0 - t_0^4) - y(1 - 2t_0^3) - 3at_0^2 = 0$$

als Gleichung derjenigen Tangente, welche die Curve im Punkte t_0 berührt. Die Gleichung (17) geht über in

$$(20) \ldots (t - t_0)^2 (t_0^2 t + 1) = 0$$

und demnach ist

$$(21) \ldots t = -\frac{1}{t_0^2}$$

der Parameter des sog. Tangentialpunktes. Dieser liegt daher stets auf einem der unendlichen Aeste, wo immer auch der Berührungspunkt liegen mag. Auch dieser Satz kann leicht geometrisch bewiesen werden.

Aus (19) erhalten wir den Richtungscoefficienten der Tangente im Punkte t_5, nämlich

$$(22) \ldots p = \frac{2l_0 - t_0^4}{1 - 2t_0^3}$$

den wir in einfacher Weise auch mit Hilfe der Differentialrechnung aus den beiden Gleichungen (2) hätten ableiten können. Aus (22) ergiebt sich nun folgendes: Die Tangente ist der x-Achse parallel, wenn $p = 0$ ist, d. h. also für

$$t_0 = 0 \quad \text{und für} \quad t_0 = \sqrt[3]{2}$$

Dem ersten Werte entspricht der Anfangspunkt, dem zweiten ein auf dem eigentlichen Folium gelegener Punkt, dessen Coordinaten

$$x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}$$

sind. Ferner steht die Tangente senkrecht zur x-Achse, wenn $p = \infty$ ist, d. h. also für

$$t_0 = \infty \quad \text{und für} \quad t_0 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

Dem ersten Werte entspricht wieder der Anfangspunkt (cfr. § 2.), dem zweiten ein auf dem eigentlichen Folium gelegener Punkt, dessen Coordinaten

$$x = a\sqrt[3]{4}, \quad y = a\sqrt[3]{2}$$

sind, (cfr. § 7.). Die Tangente ist der Asymptote parallel, wenn

$$p = -1$$

ist, also wenn

$$t_0^4 + 2t_0^3 - 2t_0 - 1 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(t_0 + 1)^3 (t_0 - 1) = 0$$

Hieraus folgt entweder

$$t_0 = -1$$

in welchem Falle wir die Asymptote selbst haben, oder

$$t_0 = 1$$

und diesem Werte entspricht der Scheitel des Folium, in welchem Punkte die Tangente, wie wir bereits früher gesehen haben (§ 8.), in der Tat der Asymptote parallel läuft. Endlich bestimmen wir die Punkte, wo die Tangente der Symmetrieachse parallel läuft. Dann muss

$$p = +1$$

sein, also

$$t_0^4 - 2t_0^3 - 2t_0 + 1 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\left(t_0^2 + \frac{2t_0}{\sqrt{3}+1} + 1\right) \cdot \left(t_0^2 - \frac{2t_0}{\sqrt{3}-1} + 1\right) = 0$$

Der erste Factor, gleich null gesetzt, liefert für t_0 zwei imaginäre Werte. Dagegen folgt aus

$$t_0^2 - \frac{9t_0}{\sqrt{3}-1} + 1 = 0 \quad \text{der Wert:}$$

$$t_0 = \frac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt[4]{12}}{2}$$

Es giebt also zwei (reelle) Punkte, in welchen die Tangente parallel der Symmetrieachse ist. Beide Punkte liegen auf dem eigentlichen Folium, da die obigen Wurzelwerte beide positiv sind.

§ 12. Ersetzen wir in der Gleichung der Tangente die laufenden Coordinaten durch $\xi\eta$ und bezeichnen den Parameter des Berührungspunktes mit t, so ist

$$(23) \ldots \xi(2t - t^4) - \eta(1 - 2t^3) - 3at^2 = 0$$

die Gleichung der Tangente, wofür wir auch, wenn wir die Gleichungen (1) und (2) beachten,

$$(24) \ldots (x^2 - ay)\xi + (y^2 - ax)\eta - axy = 0$$

schreiben können. In dieser letztern Gleichung sind dann xy die Coordinaten des Berührungspunktes. Soll nun diese Tangente durch einen festen Punkt $x_0 y_0$ gehen, so haben wir die Bedingung:

$$(25) \ldots (x^2 - ay)x_0 + (y^2 - ax)y_0 - axy = 0$$

Betrachten wir in dieser Gleichung die Coordinaten des Berührungspunktes xy als veränderlich, so repräsentirt (25) einen Kegelschnitt, den sog. Polarkegelschnitt. Auf ihm müssen die Berührungspunkte aller derjenigen Tangenten liegen, welche sich von dem Pole $x_0 y_0$ an unsere Curve legen lassen. Da diese Berührungspunkte selbstverständlich auch auf dem Folium liegen, so sind es die Durchschnittspunkte der beiden Curven (25) und (1). Nun hat ein Kegelschnitt mit einer Curve III. O bekanntlich 6 Punkte gemeinschaftlich. Da nun der Kegelschnitt (25) durch den Anfangspunkt geht und dieser ein Doppelpunkt des Folium ist, so fallen zwei jener 6 Schnittpunkte mit dem Anfangspunkte zusammen. Diejenige Gerade aber, welche einen Doppelpunkt der Curve mit dem Pole $x_0 y_0$ verbindet, ist im allgemeinen keine eigentliche Tangente. Daraus folgt, dass sich von einem festen Punkte nur 4 Tangenten an die Curve legen lassen, d. h. das Folium ist eine Curve vierter Classe (wie jede Curve III. O. mit einem Doppelpunkte.). Es lässt sich dies auch noch auf anderm Wege zeigen. Wenn wir in die Gleichung des Polarkegelschnitts für x und y die in (2) gegebenen Werte einsetzen, so folgt

$$(26) \quad x_0 t^4 - 2y_0 t^3 + 3at^2 - 2x_0 t + y_0 = 0$$

eine Gleichung vierten Grades in t, deren 4 Wurzeln die Parameter derjenigen Punkte sind, in welchen die Curve von den durch $x_0 y_0$ gezogenen Tangenten berührt wird.

§ 13. Liegt der Pol $x_0 y_0$ auf der Curve selbst, so genügen seine Coordinaten der Gleichung der Curve, und es ist

$$x_0 = \frac{3at_0}{1+t_0^2}, \quad y_0 = \frac{3at_0^2}{1+t_0^2}$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung (26) ein, so folgt:

$$t_0 t^4 - 2t_0^2 t^3 + (1 + t_0^3)t^2 - 2t_0 t + t_0^2 = 0 \quad \text{oder:}$$

$$(t - t_0)^2 \cdot (t_0 t^2 + 1) = 0$$

Zwei Wurzeln dieser Gleichung sind $= t_0$, d. h. diejenige Tangente, deren Berührungspunkt der Punkt t_0 ist, ist doppelt zu zählen. Die Berührungspunkte der beiden andern Tangenten sind:

$$t = \pm\sqrt{-\frac{1}{t_0}}$$

Dieselben sind also nur dann reell, wenn $t_0 < 0$ ist. Wir haben also den Satz: Durch einen Punkt, welcher auf dem eigentlichen Folium liegt, lässt sich nur eine (doppelt zu zählende) Tangente ziehen, deren Berührungspunkt eben jener Pol ist. Liegt aber der Pol auf einem der unendlichen Aeste, so lassen sich 4 reelle Tangenten durch ihn ziehen. Davon fallen zwei zusammen und berühren die Curve im Pol selbst. Die Berührungspunkte der beiden andern entsprechen entgegengesetzt gleichen Parametern, d. h liegt der eine auf dem Folium selbst, so liegt der andere auf einem der unendlichen Aeste.

§ 14. Wir wollen ferner annehmen, dass der Pol auf der Asymptote liegt. Dann haben wir die Bedingung

$$x_0 + y_0 + a = 0$$

und die Gleichung (26) geht, wenn wir y_0 eliminiren, über in

$$x_0 t^4 + 2(a + x_0)t^3 + 3at^2 - 2x_0 t - (a + x_0) = 0 \quad \text{oder}$$

$$(t + 1)^2 \cdot (x_0 t^2 + 2at - a - x_0) = 0$$

Wir haben also wieder zwei gleiche Wurzeln

$$t = -1$$

Da diesem Werte des Parameters der unendlich ferne Punkt der Curve entspricht, so folgt, dass zwei der Tangenten mit der Asymptote selbst zusammenfallen. Die beiden andern Wurzeln der obigen Gleichung sind

$$(27) \ldots t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + ax_0 + x_0^2}}{x_0} = \frac{-a \pm \sqrt{(a+x_0)^2 - ax_0}}{x_0}$$

Da diese beiden Wurzeln stets reell sind, so lassen sich also von jedem Punkte der Asymptote 4 reelle Tangenten an die Curve legen. Bezeichnen wir ferner die beiden Wurzeln (27) mit t_1 und t_2, so lassen sich folgende Fälle unterscheiden: Ist $x_0 > 0$, so ist $t_1 > 0$ und $t_2 < 0$. Ist aber

$$x_0 = -a\lambda, \quad 1 > \lambda > 0$$

so ist

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \lambda(1-\lambda)}}{-\lambda} > 0$$

$$t_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \lambda(1-\lambda)}}{-\lambda} > 0$$

Ist endlich

$$x_0 = -a\lambda, \quad \lambda > 1$$

so folgt:

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + \lambda(\lambda - 1)}}{-\lambda} < 0$$

$$t_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + \lambda(\lambda - 1)}}{-\lambda} > 0$$

Wir können somit folgenden Satz aufstellen: Liegt der Pol auf der Asymptote und im III. Quadranten, so lassen sich von ihm 2 Tangenten ziehen, welche beide das eigentliche Folium berühren. Liegt aber der Pol auf der Asymptote und im II. oder IV. Quadranten, so lassen sich von ihm zwei Tangenten ziehen, von denen die eine das Folium selbst, die andere einen der unendlichen Aeste berührt.

§ 15. Liegt der Pol auf einer der Coordinatenachsen, z. B. auf der x-Achse, so ist $y_0 = 0$ und die Gleichung (26) geht über in

$$x_0 t^4 + 3at^2 - 2x_0 t = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $t = 0$, d. h. von den 4 Tangenten welche durch den Pol gezogen werden können, berührt eine die Curve im Anfangspunkte und fällt daher mit der x-Achse zusammen.

Die Berührungspunkte der übrigen 3 Tangenten erhalten wir aus der kubischen Gleichung

$$(28) \ldots t^3 + 3\frac{a}{x_0}t - 2 = 0$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist

$$\varDelta = \frac{a^3 + x_0^3}{x_0^3}$$

Ist $x_0 > 0$, so ist auch $\varDelta > 0$ und die Gleichung (28) hat dann nur eine reelle Wurzel, welche offenbar positiv sein muss. Daraus folgt der Satz: Liegt der Pol auf der positiven x-Achse, so lassen sich von ihm 2 Tangenten an die Curve ziehen, von denen die eine mit der x-Achse zusammenfällt, die andere das eigentliche Folium berührt. — Ist ferner $0 > x_0 > -a$, so ist $\varDelta < 0$ und die Gleichung (28) hat dann drei reelle Wurzeln, und zwar eine positive und zwei negative, weil das absolute Glied dieser Gleichung negativ und das mit t^2 behaftete Glied gleich null ist. Es folgt daraus der Satz: Liegt der Pol auf der negativen x-Achse und zwar zwischen Anfangspunkt und Asymptote, so lassen sich von ihm 4 Tangenten an die Curve ziehen, von denen eine mit der x-Achse zusammenfällt, die zweite das eigentliche Folium und die beiden andern je einen der unendlichen Aeste berühren. — Ist endlich $x_0 < -a$, so ist $\varDelta > 0$, und die Gleichung (28) hat dann wieder nur eine reelle Wurzel, welche jedenfalls positiv sein muss, da das absolute Glied der Gleichung negativ ist. Also: Liegt der Pol auf der negativen x-Achse und zwar so, dass die Asymptote zwischen ihm und dem Anfangspunkte liegt, so lassen sich von ihm nur zwei reelle Tangenten an die Curve ziehen, von denen die eine mit der x-Achse zusammenfällt, die andere das eigentliche Folium berührt. Liegt der Pol auf der x-Achse, so haben wir genau dieselben Sätze. — Schliesslich können wir noch den Fall betrachten, wo der Pol in den Anfangspunkt fällt. Dann ist

$$x_0 = y_0 = 0$$

Hier ist leicht zu sehen, dass die Gleichung (26) zwei gleiche Wurzeln $t = 0$ und zwei andere gleiche Wurzeln $t = \infty$ liefert. Jedem dieser Werte entspricht der Anfangspunkt selbst, und wir schliessen daraus, dass sich durch diesen Punkt 4 reelle Tangenten an die Curve legen lassen, welche paarweise mit den beiden Tangenten des Doppelpunktes zusammenfallen.

§ 16. In dem besondern Falle, wo der Pol auf der Symmetrieachse der Curve liegt, ist

$$x_0 = y_0$$

Die Gleichung (28) geht dann in die reciproke

$$(29) \ldots t^4 - 2t^3 + 3\frac{a}{x_0}t^2 - 2t + 1 = 0$$

über. Dividiren wir diese Gleichung durch t^2 und setzen dann

$$t + \frac{1}{t} = z$$

so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2z + 3\frac{a}{x_0} - 2 = 0$$

und hieraus folgt:

$$z = 1 \pm p; \quad p = +\sqrt{3 \cdot \frac{x_0 - a}{x_0}}$$

Demnach sind die vier Wurzeln der Gleichung:

$$t_1 = \tfrac{1}{2}(1 + p + \sqrt{(1+p)^2 - 4}, \quad t_2 = \frac{1}{t_1}$$

$$t_3 = \tfrac{1}{2}(1 - p + \sqrt{(1-p)^2 - 4}, \quad t_4 = \frac{1}{t_3}$$

Die Discussion dieser Wurzeln gestaltet sich folgendermassen:

1) Ist $x_0 > \frac{3}{2}a$, so ist $\sqrt{3} > p > 1$, folglich sind t_1 und t_2 reell, dagegen t_3 und t_4 imaginär. Ferner sind t_1 und t_2 beide positiv.

2) Ist $\frac{3}{2}a > x_0 > 0$, so sind alle 4 Wurzeln imaginär.

3) Ist $0 > x_0 > -\frac{a}{2}$, so ist $p > 3$, folglich sind alle 4 Wurzeln reell, und zwar t_1 und t_2 positiv, t_3 und t_4 negativ.

4) Ist $-\frac{a}{2} > x_0$, so ist $3 > p > \sqrt{3}$, folglich sind t_1 und t_2 reell und zwar positiv, dagegen t_3 und t_4 imaginär.

Diese Resultate lassen sich leicht in Worte fassen.

Liegt der Pol auf der Symmetrieachse, so dass die Spitze des Folium zwischen Anfangspunkt und Pol liegt, so lassen sich 2 reelle

Tangenten ziehen, welche das eigentliche Folium berühren. (Dasselbe gilt offenbar von jedem Punkte, welcher im I. Quadranten und ausserhalb des Folium liegt.) Wenn der Pol auf der Symmetrieachse innerhalb des Folium liegt, so lassen sich durch ihn überhaupt keine reellen Tangenten ziehen. (Dasselbe gilt von jedem innerhalb des eigentlichen Folium gelegenen Punkte.) Liegt der Pol auf der Symmetrieachse zwischen Anfangspunkt und Asymptote, so lassen sich 4 reelle Tangenten an die Curve ziehen, von denen 2 das eigentliche Folium, die beiden andern die unendlichen Aeste berühren. (Dasselbe gilt von jedem Punkte innerhalb des von den Coordinatenachsen und der Asymptote gebildeten Dreiecks.) Liegt endlich der Pol auf der Symmetrieachse so, dass die Asymptote zwischen Anfangspunkt und Pol liegt, so lassen sich wieder nur 2 reelle Tangenten durch den Pol ziehen, welche beide das eigentliche Folium berühren. (Dasselbe gilt von jedem Punkte des III. Quadranten, welcher ausserhalb des erwähnten Dreiecks liegt.)

§ 17. Zum Schluss stellen wir die Resultate der letzten 4 Paragraphen zusammen:

1) Der Pol liegt im I. Quadranten, innerhalb des Folium. Keine reelle Tangenten.

2) Der Pol liegt im I. Quadranten, auf dem Umfange des Folium. Zwei reelle zusammenfallende Tangenten, deren Berührungspunkt der Pol selbst ist.

3) Der Pol liegt im I. Quadranten, ausserhalb des Folium. Zwei reelle Tangenten, welche das Folium selbst berühren.

4) Der Pol liegt auf der positiven y-Achse. Zwei reelle Tangenten, von denen die eine das eigentliche Folium berührt, die andere durch den Doppelpunkt geht.

5) Der Pol liegt im II. Quadranten und zwar die Curve zwischen Pol und Asymptote. Zwei reelle Tangenten, von denen die eine das Folium selbst, die andere einen unendlichen Ast berührt.

6) Der Pol liegt im II. Quadranten auf dem unendlichen Aste. Vier reelle Tangenten. Davon fallen 2 zusammen und berühren die Curve im Pol selbst. Von den beiden andern berührt eine das Folium, die andere den unendlichen Ast (im IV. Quadranten.)

7) Der Pol liegt liegt im II. Quadranten zwischen Curve und

Asymptote. Vier reelle Tangenten. Davon berührt eine das Folium, die andern 3 aber die unendlichen Aeste.

8) Der Pol liegt im II. Quadranten auf der Asymptote. Vier reelle Tangenten. Davon fallen 2 in der Asymptote zusammen; von den beiden andern berührt eine das Folium, die andere einen unendlichen Ast.

9) Der Pol liegt im II. Quadranten, und die Asymptote zwischen Pol und Curve. Zwei reelle Tangenten, von denen die eine das Folium, die andere einen unendlichen Ast berührt.

10) Der Pol liegt im III. Quadranten, und zwar die Asymptote zwischen Pol und Curve. Zwei reelle Tangenten, welche beide das Folium berühren.

11) Der Pol liegt im III. Quadranten, auf der Asymptote. Vier reelle Tangenten; davon fallen 2 mit der Asymptote zusammen, während die beiden andern das Folium berühren.

12) Der Pol liegt im III. Quadranten, zwischen Asymptote und Curve. Vier reelle Tangenten, von denen 2 das Folium, die beiden andern die unendlichen Aeste berühren.

Liegt der Pol im IV. Quadranten, so haben wir dieselben Fälle wie im II. Quadranten.

Aus Allem ersehen wir, dass 4 reelle (nicht zusammenfallende) Tangenten existiren, wenn der Pol zwischen der Asymptote und den unendlichen Aesten liegt, dagegen gar keine, wenn er innerhalb des Folium liegt.

Marienburg, Westpr. December 1895.

VII.

Die Krümmung der Raumcurven in singulären Punkten derselben.

Von

Dr. **Ernst Wölffing,**

Privatdocent an der K. Technischen Hochschule in Stuttgart.

Für die Krümmungen der Raumcurven in singulären Punkten derselben existirt bereits eine Tabelle, welche von Schell[1]) herrührt. Dieselbe beschränkt sich jedoch auf Singularitäten mit einfachen Rückkehrelementen und mit Combinationen von solchen und gibt auch für diese nur die Radien der absoluten Krümmung, der Torsion und der sog. ganzen Krümmung. Ausserdem ist aus dem Text nicht zu ersehen, wie der Verfasser zu seinen Resultaten gelangt ist.

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, wie für die Werte der Krümmungsradien im wesentlichen die Anfangsexponenten und -coefficienten der Raumcurvenentwicklungen massgebend sind, so dass diese Werte für jede beliebige Singularität leicht berechnet werden können. Dabei wird die Untersuchung auch auf die Radien der sphärischen Krümmung und Torsion ausgedehnt. Um die Verteilung der Anfangsexponenten, welche resp. unendlich kleine, endliche und unendlich grosse Werte der Krümmungsradien liefern, zu

---

1) Schell, W., Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in geometrischer Darstellung. Leipzig 1859. S. 25. Vgl. auch Laska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Braunschweig 1888—94. S. 544.

übersehen, wird eine geometrische Darstellung benutzt, die namentlich in complicirteren Fällen gute Dienste leistet.

1. Der singuläre Raumcurvenpunkt wird in den Coordinatenursprung verlegt, die Tangente zur x-Axe und die Schmiegungsebene zur z-Ebene gewählt. Ist dann

$$\left\{\begin{aligned} x &= \lambda\varepsilon^{\alpha} + \lambda'\varepsilon^{\alpha+1} + \ldots \\ y &= \mu\varepsilon^{\beta} + \mu'\varepsilon^{\beta+1} + \ldots \\ z &= \nu\varepsilon^{\gamma} + \nu'\varepsilon^{\gamma+1} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

die Parameterdarstellung der Raumcurve in der Nähe des Ursprungs, so gilt für die Anfangsexponenten („Indices“ nach Björling, „Zeichen“ nach Mehmke) α, β, γ:

$$\alpha < \beta < \gamma \tag{2}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} dx &= (\lambda\alpha\varepsilon^{\alpha-1} + \lambda'(\alpha+1)\varepsilon^{\alpha} + \ldots)d\varepsilon \\ dy &= (\mu\beta\varepsilon^{\beta-1} + \mu'(\beta+1)\varepsilon^{\beta} + \ldots)d\varepsilon \\ dz &= (\nu\gamma\varepsilon^{\gamma-1} + \ldots\ldots\ldots)d\varepsilon \end{aligned}$$

daher:

$$ds = \lambda\alpha\varepsilon^{\alpha-1}\left(1+\frac{\lambda'}{\lambda}\,\frac{\alpha+1}{\alpha}\,\varepsilon + \ldots + \frac{\mu^2\beta^2}{2\lambda^2\alpha^2}\,\varepsilon^{2(\beta-\alpha)} + \ldots\right)d\varepsilon$$

$$\frac{dx}{ds} = \left(1-\frac{\mu^2\beta^2}{2\lambda^2\alpha^2}\,\varepsilon^{2\beta-2\alpha} - \ldots\right)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\mu\beta}{\lambda\alpha}\,\varepsilon^{\beta-\alpha}\left(1+\left(\frac{\mu'(\beta+1)}{\mu\beta} - \frac{\lambda'(\alpha+1)}{\lambda\alpha}\right)\varepsilon + \ldots\right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\nu\gamma}{\lambda\alpha}\,\varepsilon^{\gamma-\alpha} + \ldots$$

somit:

$$d\,\frac{dx}{ds} = \left(-\frac{\mu^2\beta^2}{\lambda^2\alpha^2}(\beta-\alpha)\varepsilon^{2\beta-2\alpha-1} + \ldots\right)d\varepsilon$$

$$d\,\frac{dy}{ds} = \left(\frac{\mu\beta}{\lambda\alpha}(\beta-\alpha)\varepsilon^{\beta-\alpha-1} + \frac{\mu\beta}{\lambda\alpha}\left(\frac{\mu'(\beta+1)}{\mu\beta} - \frac{\lambda'(\alpha+1)}{\lambda\alpha}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot(\beta-\alpha+1)\varepsilon^{\beta-\alpha} + \ldots\right)d\varepsilon$$

$$d\,\frac{dz}{ds} = \left(\frac{\nu\gamma}{\lambda\alpha}(\gamma-\alpha)\varepsilon^{\gamma-\alpha-1} + \ldots\right)d\varepsilon$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}=\frac{\mu\beta}{\lambda\alpha}(\beta-\alpha)\varepsilon^{\beta-\alpha-1}\,.$$

$$.\left(1+\frac{\beta-\alpha+1}{\beta-\alpha}\left(\frac{\mu(\beta+1)}{\mu\beta}-\frac{\lambda'(\alpha+1)}{\lambda\alpha}\right)\varepsilon+\ldots\right)d\varepsilon$$

Damit ergibt sich der Radius der absoluten Krümmung [1])

$$\varrho=\frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}=\frac{\lambda^2\alpha^2\varepsilon^{2\alpha-\beta}}{\mu\beta(\beta-\alpha)}\,.$$

$$.\left(1-\frac{\alpha+1}{(\beta-\alpha)\alpha}\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{(\beta-\alpha+1)(\beta+1)}{(\beta-\alpha)\beta}\frac{\mu'}{\mu}\right)\varepsilon+\ldots\Big)d\varepsilon \qquad (3)$$

Derselbe ist $\left\{\begin{matrix}\text{unendlich klein}\\ \text{endlich}\\ \text{unendlich gross}\end{matrix}\right\}$ je nachdem $2\alpha \gtreqless \beta$ [2]) (4)

2. Die Verteilung der unendlich kleinen, endlichen und unendich grossen Werte von ϱ, wie sie durch (4) gegeben ist, lässt sich in folgender Weise geometrisch veranschaulichen. Man betrachte $\alpha : \beta : \gamma$ als homogene Coordinaten eines Punkts in einem rechtwinkligen Coordinatensystem, so bilden sich wegen (2) alle zulässigen Wertesysteme der Indices ab im Innern eines Dreiecks, das von den Geraden

$$x=0;\quad x=y;\quad y=1$$

begrenzt wird und daher die Ecken

$$A=(0:0:1);\quad B=(0:1:1);\quad C=(1:1:1)$$

besitzt. (Fig. 1). In diesem Dreieck setzen wegen (4) diejenigen Punkte, deren zugehörige Indices auf endliche Werte von ϱ führen, eine unendliche Punktmenge zusammen, welche sich auf der Geraden

$$2x=y$$

befindet und daselbst sich vom Punkt A bis zum Punkt

$$D=(1:2:2)$$

erstreckt. Diese Punktmenge ist discret, weil nur diejenigen Punkte der Geraden ihr angehören, welche rationale Coordinaten besitzen; sie ist von der zweiten Gattung im Sinne der Mengen-

1) Salmon-Fiedler, Analytische Raumgeometrie II. S, 160.

2) Diese Formel gilt auch für den Krümmungsradius bei ebenen Curven, vrgl. Mehmke „Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems in einer Ebene". Zeitschr. für Math. Physik. Jahrg. 35. S. 5.

lehre [1]) und zwar „überall dicht“, weil sie in jedem ihrer Punkte eine **Häufungsstelle** besitzt; aus diesem Grunde erscheint die Linie AD in Fig. 1 ausgezogen. Links unterhalb dieser Linie ist das Gebiet der unendlich grossen (∞) und rechts oberhalb das Gebiet der unendlich kleinen (0) Werte von ϱ. Selbstverständlich kommen auch hier nur die Punkte mit rationalen Coordinaten in Betracht.

3. Zur Berechnung des Torsionsradius r hat man ferner:

$$d^2x = (\lambda\alpha(\alpha - 1)\varepsilon^{\alpha-2} + \ldots)(d\varepsilon)^2 + (\lambda\alpha\varepsilon^{\alpha-1} + \ldots)d^2\varepsilon$$
$$d^2y = (\mu\beta(\beta - 1)\varepsilon^{\beta-2} + \ldots)(d\varepsilon)^2 + (\mu\beta\varepsilon^{\beta-2} + \ldots)d^2\varepsilon$$
$$d^2z = (\nu\gamma(\gamma - 1)\varepsilon^{\gamma-2} + \ldots)(d\varepsilon)^2 + (\nu\gamma\varepsilon^{\gamma-1} + \ldots)d^2\varepsilon$$

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y = (\mu\nu\,\beta\gamma(\gamma - \beta)\varepsilon^{\beta+\gamma-3} + \ldots)(d\varepsilon)^3$$
$$Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z = (\nu\lambda\,\gamma\alpha(\alpha - \gamma)\varepsilon^{\gamma+\alpha-3} + \ldots)(d\varepsilon)^3$$
$$Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x = (\lambda\mu\,\alpha\beta(\beta - \alpha)\varepsilon^{\alpha+\beta-3} + \ldots)(d\varepsilon)^3$$

$$d^3x = (\lambda\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\varepsilon^{\alpha-3} + \ldots)(d\varepsilon)^3 + (3\lambda\alpha(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-2} + \ldots)\,d^2\varepsilon\,.\,d\varepsilon + (\lambda\alpha\varepsilon^{\alpha-1} + \ldots)d^3\varepsilon$$

$$d^3y = (\mu\beta(\beta-1)(\beta-2)\varepsilon^{\beta-4} + \ldots)(d\varepsilon)^3 + (3\mu\beta(\beta-1)\varepsilon^{\beta-2} + \ldots)\varepsilon\,d^2\varepsilon\,.\,d\varepsilon + (\mu\beta\varepsilon^{\beta-1} + \ldots)d^3\varepsilon$$

$$d^3z = (\nu\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\varepsilon^{\gamma-3} + \ldots)(d\varepsilon)^3 + (3\nu\gamma(\gamma-1)\varepsilon^{\gamma-2} + \ldots)\,d^2\varepsilon\,.\,d\varepsilon + (\nu\gamma\varepsilon^{\gamma-1} + \ldots)d^3$$

$$M = Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z = (-\lambda\mu\nu\,\alpha\beta\gamma(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)\varepsilon^{\alpha+\beta+\gamma-6} + \ldots)(d\varepsilon)^6$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (\lambda^2\mu^2\alpha^2\beta^2(\beta-\alpha)^2\varepsilon^{2(\alpha+\beta-3)} + \ldots)(d\varepsilon)^6$$

somit der Radius der Torsion [2])

$$r = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{M} = \frac{\lambda\mu\,\alpha\beta}{\nu\gamma}\,\frac{\beta - \alpha}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}\,\varepsilon^{\alpha+\beta-\gamma} + \ldots \quad (5)$$

Derselbe ist $\left\{\begin{array}{l}\text{unendlich klein}\\ \text{endlich}\\ \text{unendlich gross}\end{array}\right\}$ je nachdem $\alpha + \beta \gtreqless \gamma$ (6)

---

1) Dini, U., „Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse“. Deutsch von Lüroth und Schepp. Leipzig 1892. S. 21—24.

2) Salmon-Fiedler a. a. O S. 163 f.

Die Punkte, für deren zugehörige Indices r endlich ist, bilden auf der Geraden

$$x + g = 1$$

zwischen den Punkten B und

$$D = (1 : 1 : 2)$$

eine discrete Punktmenge zweiter Gattung, welche das Gebiet der unendlich grossen Werte (links oben) von demjenigen der unendlich kleinen (rechts unten) trennt. (Fig 2.)

4. Der Radius der ganzen Krümmung R ergibt sich vermittelst des sog. Lancret'schen Theorems aus der Formel [1]):

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2} \tag{7}$$

es ist also

$$R = \frac{\varrho r}{\sqrt{\varrho^2 + r^2}} \tag{8}$$

Daher ist R unendlich klein, wenn ϱ oder r unendlich klein; endlich, wenn ϱ und r endlich oder eine dieser Grössen endlich, die andere unendlich gross; unendlich gross, wenn ϱ und r unendlich gross sind. Die Werteverteilung von λ ergibt sich daher durch Combination der Fig. 1 und 2: die discrete Punktmenge zweiter Gattung, deren zugehörigen Indices endliche Werte von R entsprechen, liegt auf der gebrochenen Linie von B über

$$D = (1 : 2 : 3)$$

nach A; links ist das Gebiet der unendlich grossen, rechts dasjenige der unendlich kleinen Werte von R. (Fig. 3).

5. Der Radius der sphärischen Krümmung [2]) ergibt sich aus der Formel

$$R^* = \sqrt{\varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2} \tag{9}$$

Es sei zunächst $2\alpha \gtrless \beta$; dann ist

---

1) Schell a. e. O. S. 23.

2) Salmon-Fiedler a. a. O. S. 172.

$$d\varrho = \left(\frac{\lambda^2\alpha^2(2\alpha - \beta)}{\mu\beta(\beta - \alpha)}\varepsilon^{2\alpha-\beta-1)} + \dots\right)d\varepsilon$$

also

$$\frac{r\,d\varrho}{ds} = \frac{\lambda^2\alpha^2(\lambda\alpha - \beta)}{\alpha\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}\varepsilon^{2\alpha-\gamma} + \dots$$

$$\left(\frac{r\,d\varrho}{ds}\right)^2 = \frac{\lambda^4\alpha^4(2\alpha - \beta)^2}{\nu^2\gamma^2(\gamma - \alpha)^2(\gamma - \beta)^2}\varepsilon^{4\alpha-2\gamma} + \dots$$

$$\varrho^2 = \frac{\lambda^4\alpha^4}{\mu^2\beta^2(\beta - \alpha)^2}\varepsilon^{4\alpha-2\beta} + \dots$$

Demgemäss ist in (9) das erste Glied unter dem Wurzelzeichen von höherer Ordnung in ε als das zweite, letzteres also massgebend, und man hat:

$$R^* = \frac{\lambda^2\alpha^2}{\nu\gamma}\,\frac{2\alpha - \beta}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}\varepsilon^{2\alpha-\gamma} + \dots \tag{10}$$

$$\text{Daher ist } R^* \begin{Bmatrix}\text{unendlich klein}\\ \text{endlich}\\ \text{unendlich gross}\end{Bmatrix} \text{ je nachdem } 2\alpha \begin{matrix}>\\ =\\ <\end{matrix} \gamma \tag{11}$$

Die Punkte, deren Indices endliche Werte von R^* liefern, bilden somit eine discrete Punktmenge zweiter Gattung auf der Geraden

$$2x = 1$$

zwischen den Punkten

$$D = (1 : 1 : 2) \quad \text{und} \quad E = (1 : 2 : 2)$$

Links ist das Gebiet der unendlich grossen, rechts das Gebiet der unendlich kleinen Werte von R^*.

6 Aber die Formeln (10) und (11) sind ungültig, wenn

$$2\alpha = \beta$$

ist. Denn alsdann fällt das erste Glied von $d\varrho$ weg und das zweite Glied ist

$$d\varrho = \left\{\left(-\frac{\alpha+1}{2\alpha^2}\,\frac{\lambda\lambda'}{\mu} - \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{2\alpha^2}\,\frac{\lambda^2\mu'}{\mu^2}\right) + \dots\right\}d\varepsilon$$

$$\frac{r\,d\varrho}{ds} = \frac{(\alpha+1)\lambda}{\nu\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-2\alpha)}\left\{\lambda' + \frac{(2\alpha+1)\lambda\mu'}{\mu}\right\}\varepsilon^{2\alpha-\gamma+1} + \dots$$

Ist nun $\gamma > 2\alpha + 1$, so ist dieses Glied massgebend, und es wird

$$R^* = \frac{(\alpha+1)\lambda}{\nu\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-2\alpha)}\left\{\lambda' + \frac{2(\alpha+1)\lambda\mu'}{\mu}\right\}\varepsilon^{2\alpha-\gamma+1} + \ldots \tag{12}$$

also unendlich gross.

Ist dagegen

$$\gamma = 2\alpha + 1$$

so sind beide Glieder unter dem Wurzelzeichen von (9) endlich, daher

$$R^* = \sqrt{\frac{\lambda^4}{4\mu^2} + \frac{\lambda^2}{\nu^2(2\alpha+1)^2}\left\{\lambda' + (2\alpha+1)\frac{\lambda\mu'}{\mu}\right\}^2} + \ldots \tag{13}$$

also endlich.

Es existirt somit noch eine zweite unendliche Punktmenge, deren zugehörige Indices auf endliche Werte von R^* führen. Dieselbe ist ebenfalls discret, befindet sich auf der Geraden

$$2x = y$$

und umfasst die Punkte

$F = (1:2:3)$; $(2:4:5)$; $(3:6:7)$; $(4:8:9)\ldots$
$(r:2r:2r+1)\ldots$ (cf. Fig. 4)

Sie besitzt die einzige Häufungsstelle

$$E = (1:2:2)$$

und ist daher von der ersten Gattung; sie erstreckt sich von der Häufungsstelle ausgehend in das Gebiet der unendlich grossen Werte von R^*. Die nicht der Punktmenge angehörenden, rationale Coordinaten besitzenden Punkte der Geraden FE gehören Indices an, welche nach (12) unendliche Werte von R^* liefern.

7. Für den Radius der sphärischen Torsion S ergibt sich durch Combination verschiedener von Schell[1]) angegebener Formeln die Gleichung

$$S = \frac{R^*}{\sqrt{1+\left(\frac{\varrho}{r}\frac{dr^*}{d\varrho}\right)^2}} \tag{14}$$

Unter dem Wurzelzeichen ist das zweite Glied in E von der Ordnung $2(\alpha-\beta)$ also massgebend gegenüber dem ersten, so dass die Ordnung von S in ε von dem Ausdruck $r\frac{R^*\,d\varrho}{\varrho\,dR^*}$ abhängt. Die

1) a. a. O. S. 45—48.

Wertverteilung zeigt Fig. 5. Die Punkte $(\alpha : \beta : \gamma)$, welche endlichen Werten von S entsprechen, bilden:

a) eine Punktmenge zweiter Gattung auf der Geraden

$$x + y = 1$$

zwischen den Punkten B und

$$D = (1 : 1 : 2)$$

(Links oben ist das Gebiet der unendlich grossen, rechts unten dasjenige der unendlich kleinen Werte).

b) eine Punktmenge erster Gattung auf der Geraden

$$2x = 1$$

welche aus den Punkten

$$E = (2 : 3 : 4);\quad (3 : 4 : 6);\quad (4 : 5\ 8);\quad (5 : 6 : 10) \ldots$$
$$(r : r + 1 : 2r) \ldots$$

besteht und von der Häufungsstelle

$$D = (1 : 1 : 2)$$

aus in das Gebiet der unendlich kleinen Werte hineindringt.

c) eine Punktmenge erster Gattung auf der Geraden

$$2x = y$$

welche aus den Punkten

$$F = (1 : 2 : 4);\quad (2 : 4 : 7);\quad (3 : 6 : 10);\quad (4 : 8 : 13) \ldots$$
$$(r : 2r : 3r + 1) \ldots$$

besteht, und von der auf der Geraden BD gelegenen Häufungsstelle

$$G = (1 : 2 : 3)$$

aus in das Gebiet der unendlich grossen Werte hineinragt.

8. Für die Curve der Schmiegungskugelmittelpunkte ist ferner: der Radius der absoluten Krümmung[1])

$$\varrho_k = \frac{R^* dR^*}{d\varrho} \tag{15}$$

Die Wertverteilung ist in Fig. 6 angegeben. Die endlichen Werte von ϱ_k bilden eine Punktmenge zweiter Gattung auf der Geraden

---

1) Schell a. a O. S. 48.

$$2x + y = 2$$

zwischen den Punkten

$$D = (1:2:2) \quad \text{und} \quad E = (2:2:3)$$

ferner zwei Punktmengen erster Gattung, die eine auf der Geraden

$$2x = 1$$

bestehend aus den Punkten

$$F = (2:3:4); \quad (3:5:6); \quad (4:7:8); \quad (5:9:10)\ldots$$
$$(r:2r-1:2r)\ldots$$

die andere auf der Geraden

$$2x = y$$

bestehend aus den Punkten

$$G = (1:2:3); \quad (2:4:5); \quad (3:6:7); \quad (4:8:9)\ldots$$
$$(r:2r:2r+1)\ldots$$

Beide erstrecken sich von der Häufungsstelle D aus in das Gebiet der unendlich grossen Werte von ϱ_k hinein

Der Torsionsradius derselben Curve ist

$$r_k = \frac{R^*\varrho}{r}\,\frac{dR^*}{d\varrho} \tag{16}$$

Die Wertverteilung siehe Fig. 7. Man hat für die endlichen Werte von r_k eine Punktmenge zweiter Gattung auf der Geraden

$$2x = y + 1$$

zwischen den Punkten

$$D = (2:3:3) \quad \text{und} \quad E = (1:1:2)$$

ferner eine Punktmenge erster Gattung auf der Geraden

$$2x = 1$$

welche aus den Punkten

$$F = (2:3:4); \quad (3:4:6); \quad (4:5:8); \quad (5:6:10)\ldots$$
$$r:r+1:2r\ldots$$

besteht und von der Häufungsstelle E aus in das Gebiet der unendlich grossen Werte hineinragt; endlich den in demselben Gebiet gelegenen discreten Punkt

$$G = (1:2:3)$$

In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen bei Raumcurven vorkommenden Krümmungsradien behandeln. Dabei ist zu beachten,

dass der Punkt (1 : 2 : 3), weil derselbe einem nicht singulären Raumcurvenpunkt entspricht, bei jeder Art von Krümmungsradius dem Gebiet der endlichen Werte angehören muss.

Auch die Raumcurvenpunkte mit den Indices $r : 2r : 3r$ haben lauter endliche Krümmungsradien.

9. Das angegebene Verfahren eignet sich auch zur Berechnung des sog. Krümmungswinkels, welcher von Mehmke [1]) eingeführt wurde. Derselbe bezeichnet diejenige Ebene durch einen Raumcurvenpunkt, welche mit drei auf einander folgenden Schmiegungsebenen denselben Winkel k bildet, als Krümmungsebene, den Winkel k selbst als Krümmungswinkel.

Es sei

$$ax + by + cz = 0$$

die Gleichung der Krümmungsebene; dabei sei

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Die Schmiegungsebene ist:

$$(\mu\nu\,\beta\gamma(\beta-\gamma)\varepsilon^{\beta+\gamma-\varepsilon} + \dots)x + (\lambda\nu\,\alpha\gamma(\alpha-\gamma)\varepsilon^{\alpha+\gamma-3} + \dots)y$$
$$+ (\lambda\mu\,\alpha\beta(\beta-\alpha)\varepsilon^{\alpha+\beta-3} + \dots)z = 0$$

Damit erhält man für den Krümmungswinkel k:

$$\cos k = \frac{\begin{array}{r}a(\mu\nu\beta\gamma(\gamma-\beta)\varepsilon^{\beta+\gamma-3} + \dots) + b(\lambda\nu\alpha\gamma)(\alpha-\gamma)\varepsilon^{\alpha+\gamma-3} + \dots) \\ + c(\lambda\mu\alpha\beta(\beta-\alpha)^{\alpha+\beta-3} + \dots)\end{array}}{\sqrt{\begin{array}{r}(\mu\nu\beta\gamma(\gamma-\beta)\varepsilon^{\beta+\beta-3} + \dots)^2 + (\lambda\nu\alpha\gamma(\alpha-\gamma)\varepsilon^{\alpha+\gamma-3} + \,.)^2 \\ + (\lambda\mu\alpha\beta(\beta-\alpha)\varepsilon^{\alpha+\beta-3} + \dots)^2\end{array}}}$$

$$= a\left(\frac{\nu\gamma(\gamma-\beta)}{\lambda\alpha(\beta-\alpha)}\varepsilon^{\gamma-\alpha} + \dots\right) + b\left(\frac{\nu\gamma(\alpha-\gamma)}{\mu\beta(\beta-\alpha)}\varepsilon^{\gamma-\beta} + \dots\right)$$
$$+ c\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\nu^2\gamma^2(\alpha-\gamma)^2}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2}\varepsilon^{2\gamma-2\beta} + \dots\right) \qquad (17)$$

Soll die Krümmungsebene diesen Winkel auch mit den den beiden nächst folgenden Schmiegungsebenen einschliessen, so muss $\frac{d\cos k}{d\varepsilon}$ und $\frac{d^2\cos k}{d\varepsilon^2}$ verschwinden. Hieraus folgt:

---

1) „Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen", Zeitschr. für Math. u Phys. Jahrg. 36, S. 56. Nr. 3.

$$a:b:c = \left\| \begin{matrix} \frac{\nu\gamma(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}{\lambda\alpha(\beta-\alpha)}\varepsilon^{\gamma-\alpha-1}+\ldots; & \frac{\nu\gamma(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)}{\mu\beta(\beta-\alpha)}\varepsilon^{\gamma-\beta-1}+\ldots \\ & \frac{-\nu^2\gamma^2(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\beta)}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2}\varepsilon^{2\gamma-2\beta-1}+\ldots \\ \frac{\nu\gamma(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha-1)}{\lambda\alpha(\beta-\alpha)}\varepsilon^{\gamma-\alpha-2}+\ldots & \\ \frac{\nu\gamma(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)(\gamma-\beta-1)}{\mu\beta(\beta-\alpha)}\varepsilon^{\gamma-\beta-2}+\ldots & \\ \frac{-\nu^2\gamma^2(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\beta)(2\gamma-2\beta-1)}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2}\varepsilon^{2\gamma-2\beta-2}+\ldots & \end{matrix} \right\|$$

$$= \frac{\nu\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\mu^2\beta^2(\beta-n)}\varepsilon^{3\gamma-3\beta-3}+\ldots:$$

$$\frac{\nu\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)}{\lambda\mu\,\alpha\beta(\beta-\alpha)}\varepsilon^{3\gamma-2\beta-\alpha-3}+\ldots:$$

$$\frac{\beta-\alpha}{\lambda\alpha}\varepsilon^{2\gamma-\alpha-\beta-3}+\ldots \tag{18}$$

Nun sind 3 Fälle möglich, je nachdem

$$\gamma+\alpha-2\beta \gtreqless 0 \tag{19}$$

a) $\gamma+\alpha-2\beta>0$; dann wird

$$a = \frac{\lambda\nu\,\alpha\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2}\varepsilon^{\gamma+\alpha-2\beta}+\ldots$$

$$b = \frac{\nu\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)}{\mu\beta(\beta-\alpha)^2}\varepsilon^{\gamma-\beta}+\ldots;\quad c=1+\ldots$$

$$\cos k = 1+\ldots;\quad \cos k\,\Big|_{\varepsilon=0}=1;\quad \operatorname{tg} k\,\Big|_{\varepsilon=0}=0$$

Die Krümmungsebene fällt mit der Schmiegungsebene zusammen

b) $\gamma+\alpha-2\beta=0$; dann wird

$$a = \frac{2\lambda\nu\alpha(2\beta-\alpha)}{\sqrt{4\lambda^2\nu^2\alpha^2(2\beta-\alpha)^2+\mu^2\beta^4}}+\ldots;\quad b=0\,.\,\varepsilon^{\beta-\alpha}+\ldots$$

$$c = \frac{\mu^2\beta^2}{\sqrt{4\lambda^2\nu^2(2\beta-\alpha)^2+\mu^4\beta^4}}+\ldots$$

$$\cos k = \frac{\mu^2\beta^2}{\sqrt{4\lambda^2\nu^2\alpha^2(2\beta-\alpha)^2+\mu^4\beta^4}}+\ldots \tag{20}$$

$$\operatorname{tg} k = \frac{2\lambda\nu\alpha(2\beta-\alpha)}{\mu^2\beta^2} + \ldots \tag{20}$$

$$\operatorname{tg} k \,\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{2\lambda\nu\alpha(2\beta-\alpha)}{\mu^2\beta^2}$$

die Krümmungsebene bildet mit der Schmiegungsebene einen Winkel zwischen 0° und 90° und schneidet dieselbe in der Hauptnormale.

c) $\gamma + \alpha - 2\beta < 0$; dann wird

$$a = 1 + \ldots; \quad b = \frac{-\mu\beta(2\beta-\gamma-\alpha)}{\lambda\alpha(\gamma-\beta)}\varepsilon^{\beta-\alpha} + \ldots$$

$$c = \frac{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2}{\lambda\nu\,\alpha\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\varepsilon^{2\beta-\gamma-\alpha} + \ldots$$

also

$$\cos k = 0 + \ldots \cos k \,\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \operatorname{tg} k \,\Big|_{\varepsilon=0} = \infty$$

Die Krümmungsebene steht auf der Schmiegungsebene senkrecht und fällt mit der Normalebene zusammen.

Der allgemeine Ausdruck für $\operatorname{tg} k$ (ohne Rücksicht auf (9)) ist:

$$\operatorname{tg} k = \frac{\lambda\nu\,\alpha\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2}\varepsilon^{\gamma+\alpha-2\beta} + \ldots \tag{21}$$

Zu dem gegebenen Punkt mit den Indices (α, β, γ) ist ein anderer Raumcurvenpunkt reciprok mit den Indices $(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma)$; derselbe hat nach Björling[1]) die Entwicklungen:

$$x = \frac{\gamma(\alpha-\gamma)\nu}{\beta(\beta-\alpha)\mu}\varepsilon^{\gamma-\beta} + \ldots$$

$$y = \frac{\gamma(\gamma-\beta)\nu}{\alpha(\beta-\alpha)\lambda}\varepsilon^{\gamma-\alpha} + \ldots$$

$$z = \frac{(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)\gamma}{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma} + \ldots$$

Berechnet man für diesen Punkt den Radius der absoluten Krümmung vermittelst (3), so erhält man denselben Wert, welchen Gleichung (21) für Tangente k liefert. Hieraus folgt, dass die Tangens des Krümmungswinkels zum Radius der absoluten Krümmung reciprok ist (cf. Mehmke a. a. O.).

---

1) „Ueber Raumcurvensingularitäten". Archiv der Math. u. Physik. II. Reihe. Band 8. S. 83.

10. In der folgenden Tabelle sind die Werte von ϱ, r, R, R^* S, ϱ_k, r_k, $\operatorname{tg} k$ für einige einfache Indicessysteme zusammengestell (Dabei bedeutet 0 unendlich kleine, *e* endliche, ∞ unendlich gross Werte).

Indices	ϱ	r	R	R^*	S	ϱ_k	r_k	$\operatorname{tg} k$
123	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*
124	*e*	∞	*e*	∞	*e*	∞	∞	0
125	*e*	∞	*e*	∞	∞	∞	∞	0
126	*e*	∞	*e*	∞	∞	∞	∞	0
127	*e*	∞	*e*	∞	∞	∞	∞	0
134	∞	*e*	*e*	∞	*e*	∞	∞	∞
135	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	*e*
136	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
137	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
145	∞	*e*	*e*	∞	*e*	∞	∞	∞
146	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
147	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	*e*
156	∞	*e*	*e*	∞	*e*	∞	∞	∞
157	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
167	∞	*e*	*e*	∞	*e*	∞	∞	∞
234	0	0	0	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*
235	0	*e*	0	∞	*e*	∞	∞	0
236	0	∞	0	∞	∞	∞	∞	0
237	0	∞	0	∞	∞	∞	∞	0
245	*e*	0	0	*e*	0	*e*	∞	∞
246	*e*	*e*	*e*	∞	*e*	*e*	*e*	*e*
247	*e*	∞	*e*	∞	*e*	∞	∞	0
256	∞	0	0	∞	0	∞	∞	∞
257	∞	*e*	*e*	∞	*e*	∞	∞	∞
267	∞	0	0	∞	0	∞	∞	∞
345	0	0	0	0	0	*e*	*e*	*e*
346	0	0	0	*e*	*e*	∞	*e*	0
347	0	*e*	0	∞	*e*	∞	∞	0
356	0	0	0	*e*	0	*e*	∞	∞
357	0	0	0	∞	0	∞	∞	*e*
367	*e*	0	0	*e*	0	*e*	∞	∞
456	0	0	0	0	0	0	0	*e*
457	0	0	0	0	0	∞	*e*	0
467	0	0	0	0	0	*e*	∞	∞
567	0	0	0	0	0	0	0	*e*

Stuttgart, April 1896.

VIII.

Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique.

Par

V. Sikstel.

Kasan typographie de l'Université Impériale. 1892.

Traduit du russe, du „Bulletin de la société physico-mathématique de Kasan". Deuxième série. Tome II. N. 2.

Les nombreuses et infructueuses tentatives de prouver l'admission géométrique formulée par le onzième axiome d'Euclide, au premier coup d'oeil indubitable, eurent, comme on le sait, pour conséquence la critique sévère du système d'Euclide.

Mais encore à présent les admissions géométriques d'Euclide provoquent des questions pénibles, qui peuvent émotionner profondément le théoricien, comme elles l'ont fait dans les temps du grand fondateur de la science appelée la géométrie.

J. Bolyai et l'illustre géomètre russe N. J. Lobatchevsky n'admettaient pas le onzième axiome d'Euclide, mais ils considéraient comme indubitable l'admission de la ligne droite et de la surface plane; actuellement on considère aussi l'idée de la ligne droite d'Euclide (de la ligne complètement définie par deux points pris sur elle arbitrairement) comme une idée préconçue, c'est-à-dire admise sans raisons suffisantes. C'est la caracteristique de la thèse principale de la géométrie d'Euclide que nous donne par exemple le professeur Souvoroff dans l'introduction de son ouvrage connu sous le titre: „Des caractéristiques des systèmes des trois dimensions."

Si l'idée de la ligne droite d'Euclide est admise sans raisons suffisantes, il en est de même de l'idée de la surface plane d'Euclide. Le célèbre Kant considérait ces idées comme intuitives, c'est-à-dire perçues par une mystérieuse vue intérieure qui nous fait comprendre avec justesse la vraie nature des choses. Malgré l'autorité de l'illustre philosophe nous osons croire que la vérité se trouve dans l'opinion du professeur Souvoroff. Et en effet nous pouvons comprendre cette opinion parce qu'il n'est pas difficile d'indiquer les faits qui ont servi de base nécessaire quoique pas assez suffisante pour les axiomes d'Euclide. Il est permis de croire que ces faits ont été donnés par les observations des lignes horizontales. Effectivement — voici ce que les observations nous donnent: sur de petites surfaces horizontales, par exemple sur les surfaces des tables, sur lesquelles nous nous occupons, ainsi que sur les énormes surfaces des mers calmes, — sur des distances mésurées par pouces et par milliers de verstes, — on peut tracer une ligne complètement définie par deux points, c'est-à-dire une telle ligne qui peut être seule tracée entre deux points; cet ligne est l'arc du grand cercle du globe terrestre. Il est bien probable que cette observation précisément ait fait naître l'idée de la ligne infinie ne servant pas de borne à l'espace et complêtement définie par deux points pris sur elle arbitrairement. Les observations ci-dessus ne sont pas suffisantes pour une pareille conclusion, parce que ce ne sont pas tous les deux points sur l'arc du grand cercle qui définissent la position de cet arc sur la surface de la sphère: par deux points de la surface sphérique diamétralement opposés on peut mener une quantité innombrable d'arcs de grands cercles.

Si c'est l'observation insuffisante qui a fait naître l'idée de la ligne droite d'Euclide, il est bien naturel de considérer cette idée comme préconçue, et par conséquent on peut nous permettre de vouloir la verifier. C'est ce que nous avons pour but de notre remarque.

Si par rapport à la ligne servant aux constructions géométriques nous faisons une admission qui ne soit pas en contradiction avec la propriété principale de la droite d'Euclide, et qui laisserait irrésolue la question de l'existence de cette dernière, et si prenant en considération cette admission et les autres faites par Euclide, nous trouvons, ayant recours aux procédés appliqués aussi dans la géométrie d'Euclide, que la droite en question n'existe pas, nous serons bien obligés ëvidemment de nous réconcilier avec cette déduction. Les admissions nécessaires pour notre but doivent être

contenues dans les caractéristiques suivantes de la surface et de la ligne qui se complètent mutuellement.

I. Nous admettons l'existence d'une surface dont chaque partie peut y être superposée jusqu' à une coïncidence complète. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la superposition seront indiquées plus bas.

II. Nous admettons l'existence sur cette surface des lignes ayant les propriétés suivantes:

a) Si nous déplaçons une pareille ligne, prise sur la surface, en y déplaçant deux points pris arbitrairement, à chaque moment du déplacement toute la ligne peut être amenée à cöincider avec la surface et par conséquent peut continuellement dans toutes ses positions cöincider avec la surface.

Ces lignes peuvent être superposées jusqu' à une cöincidence complète; les conditions nécessaires et suffisantes pour la superposition seront indiquées plus bas.

b) Si AB est une pareille ligne, nous attribuons à chacune de ses portions, par exemple à la ligne AC, comme propriété nécessaire la faculté d' être superposée sur chaque partie de la ligne AB, considérant, qu' en dépendance de la place de la superposition ou toute la portion AC, ou bientôt l'une de ses parties, cöincidera avec la partie AB et des portions AB et AC se formera une ligne ayant les mêmes propriétés que la ligne AB. De là nous concluons: 1) que la portion de la ligne en question peut être prolongée de ses deux bouts infiniment et 2) les portions de pareilles lignes peuvent être comparées.

Si nous traçons une ligne, qui a les propriétés indiquées, entre A et B — deux points pris sur la surface, la possibilité de comparer ses portions nous permet d' y trouver le point qui la partage en deux portions inégales. Soit C l'un de ces points et soit $AC < CB$. La ligne AC peut être prise comme unité pour mésurer les portions de la ligne AB et de celles qui sont plus grandes que AB et qui peuvent être obtenues par le prolongement de AB des deux côtés. Ayant ainsi choisi l'unité linéaire, nous posons la condition suivante comme nécessaire et suffisante pour la superposition des lignes, dont il est question, prenant cette unité pour échelle dans toutes nos recherches:

c) „Si nous faisons cöincider deux points pris arbitrairement „sur la portion de l'une de nos lignes, égale à l'unité linéaire que

„nous avons choisie, avec deux points de l'autre, quand nous dé-„placerons sur la surface l'une de ces lignes ou toutes les deux, „elles cöincideront dans toute leur longueur et formeront une ligne „pareille à celles-ci."

Il peut arriver que les surfaces et les lignes ayant les propriétés indiquées soient des surfaces planes et des lignes droites d'Euclide, mais il peut arriver aussi, qu'elles ne le soient pas, c'est pourquoi nous avons l'intention de leur donner des noms particuliers, et nous voulons les appeler: surface géométrique et ligne géométrique.

„Maintenant nous pouvons formuler nettement la condition „nécessaire et suffisante pour la superposition des parties d'une „surface géométrique sur la surface elle-même. Si nous déplaçons „une partie d'une surface géométrique de manière, qu'en tout mo-„ment du déplacement trois points de la partie déplacée, qui ne se „trouvent pas sur la même ligne géométrique, soient sur la surface „géométrique, la partie que nous déplacons aura en tout moment „du déplacement tous ses points sur la surface géométrique."

III. Nous admettons que les lignes et les figures ne changent pendant le déplacement.

IV. Nous supposons qu'entre tous les deux points on peut tracer une ligne géométrique.

V. Nous admettons que la ligne géométrique peut être prolongée de ses deux bouts dans une seule direction.

En comparant toutes ces admissions avec les admissions faites dans la géométrie d'Euclide, nous trouvons qu'aucune d'elles ne s'oppose aux bases d'Euclide et que par conséquent elles présentent toutes ensemble le total des conditions qui correspondent au but de vérifier la principale géométrique admission d'Euclide au sujet de la ligne droite. Maintenant, nous basant sur ces admissions, nous pouvons chercher la réponse à la question suivante :

„Existe-t-il une ligne géométrique complètement définie par „deux points pris sur elle arbitrairement".

Les admissions, que nous avons faites, permettent jusqu' à présent de laisser la question irrésolue, ce qui est nécessaire pour la vérification que nous avons en vue.

D'après les thèses admisses on démontre comme dans la géométrie d'Euclide, c'est-à-dire avec les mêmes procédés les théorèmes suivants:

e) La ligne géométrique peut être prolongée infiniment des deux côtés.

f) Le théorème au sujet de l'égalité des angles droits, comme il est démontré dans les cours de géométrie, composés dans l'esprit d'Euclide, quoique Euclide lui-même nous donne cette vérité comme axiome.

Corollaires de ce théorème:

g) „Il n'existe pas sur la surface géométrique de lignes géomé-„triques, qui ayant un point commun soient disposées de telle façon „que l'une se trouve toute entière d'un seul côté de l'autre.“

Voici la démonstration de ce théorème. Si AOB et COD sont des lignes géométriques qui ont ce point commun, nous imaginant OM perpendiculaire à AB (voir fig. 1), nous trouverons que la perpendiculaire élevée du point O vers CD doit prendre une des trois positions: OM, OM_1 ou OM_2. Toutes ces positions sont également impossibles, parce que, prenant l'une des trois pour réelle, nous trouverons que les angles droits ne sont pas égaux. Par exemple, supposant

$$OM \perp AB \quad \text{et} \quad OM_1 \perp CD$$

nous trouverons que l'angle droit

$$\angle AOM > \angle COM_1$$

— qui est aussi droit. Voyant que ces déductions sont absurdes et admettant la possibilité de tracer une perpendiculaire du point O vers la ligne CD, nous devons conclure que „l'absurdité de notre „conclusion n'a lieu que parce que nous avons supposé la possibi-„lité de l'existence de lignes géométriques dont il est question dans „le théorème.“

h) Autres conséquences du théorème sur l'égalité des angles droits: des angles adjacents, de la somme de tous les angles successifs ayant le même sommet sur la ligne géométrique et disposés d'un côté de cette ligne; de la somme de tous les angles successifs disposés autour du même point et ayant ce point pour sommet, enfin des angles opposés par le sommet.

Tous ces fondements nous permettent de démontrer les théorèmes nécessaires pour la vérification de l'admission principale d'Euclide au sujet de la ligne droite. C'est de ces derniers que nous allons nous occuper maintenant.

Théorème I. On peut faire tourner la ligne géométrique autour de chacun de ses points, sur la surface géométrique, laissant le centre de la rotation immobile, en commençant par une position quelconque, du côté où l'on veut, jusqu' à sa première position.

Soit *AB* une ligne géométrique infinie sur une surface géométrique. Soit *OC* l'unité linéaire. (admission II, (b)). Faisons tourner la portion *OC* autour du point *O* de manière qu'il soit continuellement sur la surface [admission II, (a)]. Alors d'après l'admission II (c), la portion *OC* n'occupera jamais une position pareille à *OC'* (v. fig. 2), c'est à dire en aucun moment de la rotation *OC* n'aura avec *AB* d'autre point cöincidant que *O*. Nous pouvons donc affirmer que la portion *OC*, étant en rotation, occupera successisement toutes les positions par rapport à *AB*, avec le changement de l'anglo de son inclinaison vers *AB* dans les limites de *O* jusqu' â $4d$. Rien ne nous empêche d'imaginer que toute la ligne infinie *AB* tourne avec la portion *OC*, et occupe par rapport à sa direction primitive toutes les positions formant avec elle des angles de 0 jusqu' á $4d$.

Théorème II. La ligne géométrique représentant une sécante par rapport à une autre pareille ligne donnée, étant en rotation sur la surface géométrique autour de l'un de ses points en tout moment de la rotation a un point commun avec la ligne donnée.*

---

*) Le second théorème a été examiné sous un point de vue général par le géomètre italien Battaglini (Giornale di Mat. vol. A 1867). Sulla Geometria Immaginaria. Dans ce mémoire Battaglini examine la possibilité du retour du point d'intersection de la ligne donnée avec une autre sécante, qui est en rotation autour d'un point pris hors de la première ligne, après un tour complet de la sécante, dans sa position primitive de trois façons: 1) quand la sécante fait un tour complet, le point de l'intèrsection reste toujours à une distance finie de sa position primitive (géométrie sphérique); 2) le point de l'intersection retrouve sa position primitive passant par un point infiniment éloigné (la géométrie plane d'Euclide) et 3) le point passe à travers deux points infiniment éloignés et à travers une série de points imaginés qui les séparent (la géométrie pseudo-sphérique de Lobatchevsky)

Dans son ouvrage, l'auteur ne distingue pas ces trois cas, il se borne au premier. Cette circonstance d'après moi provient de ce que l'auteur, pour démontrer le théorème qui n'est juste que dans le cas, où les lignes, dont il est question, peuvent être prolongées des deux côtés du point commun, servant de base à la perpendiculaire. Mais si nous avons pour point cöincident un point infiniment éloigné, le prolongement des lignes de l'autre côté du point devient impossible et le théorème (g) n'est d'aucune importance. C'est la même

Soit AB la ligne géométrique donnée; CDE — comme sa sécante (v. fig. 3). On peut toujours tracer du point donné une sécante pour la ligne géométrique donnée d'après l'admission IV et le théorème (g).

Quand la sécante CDE sera en rotation autour du point C, il peut se faire que les portions de la sécante: CD, CF, CM, etc., soient égales entre eux; alors évidemment AB sera une ligne fermée. Si au contraire ces portions ne sont pas égales, les points différents de la sécante cöincideront avec la ligne AB et puis passeront de son autre côté.

Il est évident que la sécante ne peut se trouver toute entière du côté de la ligne AB, où se trouve le centre de la rotation, qu' étant donnée une de ces trois conditions:

1) Si la sécante est finie, nous pouvons admettre enfin pour elle une telle position dans la quelle son dernier point viendra se placer sur la ligne AB et, en continuant ensuite la rotation, nous pouvons croire que toute la sécante se trouvera du même côté de la ligne AB, où se trouve le centre de la rotation. 2) Si la sécante occupe la position CMB, c'est à dire si elle a avec la ligne donnée pour partie commune MB, on peut de nouveau, en continuant la rotation, admettre la transition complète de la sécante. 3) Si la sécante occupe la position CNK, c'est-à-dire la position de tangente à la ligne AB. Mais: 1) La sécante est infinie et par conséquent son dernier point ne sera jamais sur la ligne AB.

2) La sécante ne peut pas occuper la position CMB, d'après l'admission V.

3) La sécante ne peut pas occuper la position CNK, d'après le théorème (g).

Ainsi la transition complète de la sécante (de tous ses points) du côté de la ligne géométrique donnée, où se trouve le centre de la rotation, est impossible, et par conséquent la sécante dans toutes les positions, c'est-à-dire quel angle qu'elle ne forme avec sa première position, se trouvera située de part de la ligne géométrique

---

cas que nous trouvons dans la géométrie d'Euclide Ainsi les recherches de l'auteur ne manquant jamais d'intérêt, se bornent à la géométrie sphérique. Th. Souvoroff.

donnée et par conséquent aura toujours avec elle un point commun, De là nous concluons:

1) „Sur la surface géométrique, d'un point donné, on ne peut „pas tracer une ligne géométrique parallèle à la ligne donnée."

2) „Deux perpendiculaires à la même ligne géométrique se „rencontrent" (toutes les lignes sont prises sur la surface).

Plus bas nous allons toujours prendre des lignes géométriques sur des surfaces géométriques et au lieu des expressions: surface géométrique, ligne géométrique, tout simplement nous dirons souvent surface, ligne.

Théorème III. Deux lignes perpendiculaires pour la même troisième se rencontrent dans deux points.

1) Admettant d'après le corollaire II du théorème précédent que les lignes AC et AD — perpendiculaires à la ligne AB, se rencontrent dans le point O (v. f. 4), superposons $\triangle ABO$ sur une partie de la surface $ABD'C'$ (par le glissement du triangle ABD sur la surface par ses points A, B et O), de manière que la ligne AB cöincide avec BA; alors les lignes AO et BO prendront respectivement la direction des lignes BD' et AC', puisque

$$\angle BAO = \angle ABD' = d = \angle ABO = \angle BAC'$$

D' ici on voit que le point O, dans la nouvelle position du $\triangle ABO$ se trouvera de l'autre côté de la ligne AB, sur le prolongement des lignes CA et DB et occupera la position O', par exemple. Ainsi il est évident que les lignes CC' et DD' se rencontrent dans deux points étant perpendiculaires à la ligne AB.

2) „Les points O et O' peuvent-ils cöincider?" Admettant que les points O et O' cöincident dans le point O (v. f. 5), nous trouverons que les lignes AC et BD auront respectivement les positions suivantes: $C'''CAC'C''$ et $D'''DBD'D''$. Faisant tourner la seconde ligne sur la surface autour du point O (pour quoi il est suffisant de tourner, sa portion, égale à l'unité linéaire, autour du point O; soit cette portion par exemple OD), nous trouverons d'après l'admission III que l'angle DOD' ne changera pas à cause de cela; également ne changera pas $\angle COC'$; mais si nous faisons tourner la ligne, par exemple dans la direction indiquée par la flèche, $\angle DOC$ changera et $\angle D'OC'$ changera également, mais la somme de ces deux angles restera toujours la même et égale ($\angle COC' - \angle DOD'$) — à la différence des angles constants pour

le cas donné. Quand le point D viendra se placer sur la ligne OC, $\angle DOC$ se transformera en 0 (zéro) parce que les lignes coïncideront complètement dans ce cas (admission II, (c)), — et $\angle D'OC'$ se transformera aussi en zéro, et par conséquent

$$\angle COC' - \angle DOD' = 0$$

c'est-à-dire les lignes CAC' et DBD' — coïncident, ce qui est en contradiction avec ce que nous avons proposé. Cette contradiction n'a pu avoir lieu qu' à cause de la supposition que les points O et O' coïncident en un seul, et par conséquent ces points sont différents.

Ainsi: „Deux lignes perpendiculaires à une même troisième se „rencontrent dans deux points diffêrents.“

Théorème IV. Deux lignes géométriques prises arbitrairement sur la surface se rencontrent toujours dans deux points (différents).

Soient DD' et NN' (v f. 6) deux lignes prises arbitrairement sur la surface. Abaissant du point A par exemple, de la ligne NN' la perpendiculaire AB sur la ligne DD' et en menant MM' perpendiculaire pour AB, nous trouverons, d'après ce que nous avons démontré que MM' et DD' se rencontreront dans deux points O et O'. Nous pouvons considérer la ligne MAM' comme l'une des positions de la sécante ABC par rapport à la ligne DD' et, comme nous voyons à présent, AM et AM' — deux branches de la sécante ont chacune un point commun (O et O') avec la ligne DD'. En faisant tourner la sécante en commençant par la position MAM autour du point A, nous devons conclure, comme lorsque nous avons démontré le théorème II, qu'aucune de ses branches, ni AMO, ni $AM'O'$, comme sécantes de la ligne DD', ne peuvent passer avec tous leurs points de l'autre côte de la ligne DD', où se trouve le point A (le centre de la rotation), et par consequent, la sécante, en tout moment de la rotation, aura la ligne DD' deux points d'intersection. Comme, en faisant tourner la sécante, on peut toujours parvenir à la coïncidence de NAN' avec une direction quelconque de la sécante (théorème I), nous avons bien le droit de confirmer que NAN', suffisamment continuée, coupera DD' dans deux points, Ces points doivent être différents, ce que nous pouvons voir, ayant recours aux mêmes raisonnements, que nous avons appliqués dans un pareil cas, voulant démontrer le théorème III.

Pour développer plus loin le nouveau système géométrique, fondé sur les bases indiqués ci-dessus, nous croyons devoir admettre ce sixième „Postulat: Deux lignes géométriques non cöincidentes, „qui se trouvent sur la surface géométrique, ne peuvent pas avoir „plus de deux points communs.“

Remarque. Nous considérons tous les points cöincidents comme un seul.

Théorème V. Les parties de deux lignes perpendiculaires l'une pour l'autre, comprises entre les points de l'intersection de ces lignes, sont égales (v. f. 7).

Soit $ACBM$ une ligne et que $BDAy$ soit perpendiculaire. Ces lignes outre le point commun donné B, doivent avoir, d'après ce que nous avons démontré, un autre point commun; soit A cet autre point. Comme

$$\angle CBD = \angle ABM = d$$

on peut superposer le fuseau $ACBDA$ sur $\angle DBM$ de manière que le côté BCA prenne la direction de la ligne BDA; alors BDA — côtè du fuseau prendra la direction BM — côté de $\angle DBM$, à cause de l'égalité des angles au point B Alors le sommet A du fuseau doit évidemment prendre place quelque part sur la ligne BDA. Ayant admis que K, nouvelle position du point A, diffère de la première, nous trouverons que la ligne $ACBMK$ a avec la ligue BDA trois points communs: A, B et K, ce qui est en contradiction avec l'admission VI. Ainsi quand nous superposons BCA sur la ligne BDA — en commençant par le point B — le point A doit coïncider avec sa première position, et par conséquent la ligne

$$BCA = BDA$$

Théorèmer VI. Deux lignes perpendiculaires se rencontrent pour la seconde fois aussi sous un angle droit. (v. f. 8, des. 1, 2, 3 et 4ème).

Soit la ligne BDA perpendiculaire à la ligne

$$ACBM \text{ et } \angle CBD = d \text{ (v. des. I)}$$

Retournant le fuseau que nous voyons sur le dessin I, le faisant glisser sur la surface, donnons lui la position qu'il a sur le dessin 2. Prenant $\angle CAD \gtrless d$, superposons le II (second) fuseau sur le I (premier), de manière que le sommet A — du II (second) coïncide avec le sommet -- B du I (premier) et que le côté ACB du (second) II prenne la direction du côté BDA du I (premier). D'aprés

cela le sommet *B* du II (second) coïncidera avec le sommet *A* du I (premier) à cause de l'égalité des lignes *ACB* et *BDA*, comme

$$\angle CAD \gtrless d \text{ et } \angle CBD = d$$

le côté *ADB* du II fuseau coupera absolument *ACB* — côté du I (premier) dans quelque point *K*, qui se trouve sur la ligne *ACB* entre les points *A* et *B*. (Le dessin 3 se rapporte au cas où $\angle CAD < d$. Le dessin 4 se rapporte au cas où $\angle CAD > d$) Mais alors nous trouverons que les lignes *ACB* et *AKB* se rencontrent tout au moins dans trois points *A*, *K* et *B*, ce qui ne s'accorde pas avec l'admission VI. Cette contradiction n'a pu avoir lieu qu'à cause de la supposition que $\angle CAD \gtrless d$, et par conséquent

$$\angle CAD = d$$

Théorème VII. Toutes les lignes géométriques sur la surface sont des lignes fermées et par conséquent elles sont toutes égales entre elles.

Soit la ligne *CA* perpendiculaire à la ligne *BCD* (v. f. 9).

En continuant la ligne *BCD* jusqu'à son second point d'intersection avec la ligne *CA* et prenant en considération que *CB* coupera *CA* une seconde fois dans le point *A*, nous démontrerons par la superposition, comme nous avons démontré le théorème V, que le prolongement de *CD* passera aussi par le point *A*. Maintenant d'après le théorème VI, nous concluons que

$$\angle BAC = \angle CAD = d$$

et par conséquent (d'après le théorème réciproque au théorème des angles adjacents, démontré, comme dans la géométrie d'Euclide), les lignes *AD* et *AB* forment une seule ligne géométrique. D'ici il est évident que la ligne *ABCDA* présente une ligne infinie et par conséquent toute ligne prise toute entière est une ligne fermée. Comme les lignes peuvent être superposées l'une sur l'autre jusqu'à une coïncidence complète, la circonstance qu'elles sont fermées nous prouve qu'elles sont égales. „D'après ce théorème nous concluons „encore que la ligne géométrique est infinie dans le sens que sa por- „tion peut être continuée jusqu'à l'infini et passer par le point de „départ la quantité de fois suffisante."

Théorème VIII. Les deux lignes géométriques sur la surface se partagent en deux parties égales.

Soient $ACBNA$ et $ADBMA$ deux lignes qui se rencontrent dans les points A et B (v. f. 10). Les angles CAD et NAM sont opposés et par conséquent égaux (corollaire du théorème de l'égalité des angles droits). Cela nous permet de superposer le fuseau $ACBDA$ sur le fuseau $ANBMA$ en faisant glisser l'un des deux sur la surface et de parvenir â ce que ACB prenne la direction de ANB et que ADB passe sur AMB. Alors le sommet B d'un fuseau cöincidera avec le même sommet d'autre, car, si nous supposons que sommet B du premier fuseau prend place en dehors ou au-dedans de l'autre (pas sur les point B), nous trouverons que la ligne peut être prolongée d'un côté dans deux directions (ce qui est en contradiction avec l'admission V). Ainsi en superposant ACB et ADB sur ANB et AMB, nous trouverons que les derniers points des lignes superposées cöincident, et par conséquent

$$ACB = ANB \quad \text{et} \quad ADB = AMB$$

c'est-à-dire les lignes $ACBNA$ et $ADBMA$ se partagent mutuellement en deux parties égales.

Corollaire. Comme par chaque point de la ligne géométrique donnée sur la surface, on peut tracer sur cette surface une quantité infinie d'autres pareilles lignes, nous pouvons affirmer d'après le théorème VIII, qu'elles passeront toutes par un autre point constant sur la surface, qui sera également éloigné du point donné, servant de commencement aux lignes tracées, en prenant ces distances des deux côtés sur chaque ligne géométrique. D'ici nous concluons, que „par deux points sur la surface géométrique, „présentant les milieux de quelques lignes géométriques, on peut „tracer une quantité infinie d'autres lignes géométriques".

Les corollaires du théorème II, le théoréme III et le théorème IV de notre recherche, obtenus au moyen des mêmes principes sur les quels est basé le système géométrique d'Euclide, permettent, il nous semble, d'avoir la conviction que les idées fondamentales de la géométrie d'Euclide sont préconçues, car nous pouvons dire maintenant: 1) il n'y a pas de ligne géométrique complètement définie par deux points pris sur elle arbitrairement et 2) il n'y a pas de surface géométrique, sur laquelle on puisse tracer du point donné une ligne géométrique parallèle à la ligne donnée.

Remarque. Les théorèmes démontrés dans notre recherche peuvent être largement appliqués sur la sphère pour les arcs des grands cercles. Il fallait s'y attendre ayant en considération le caractère des admissions prises pour base de la recherche. En

comparant ces admissions avec les positions géométriques qui caractérisent la surface sphérique, nous trouvons: L'admission I peut être appliquée aussi sur la sphère. L'admission II peut être également appliquée sur la sphère: „deux points de la circonférence d'un grand cercle définissent complètement la position de cette circonférence sur le surface sphérique si la distance entre eux est plus petite que la moitié de la circonférence (ou plus grande que la moitié de la circonférence) [1]). Dans notre admission II nous avons la possibilité d'une coïncidence complète des lignes géométriques, si l'unité linéaire est choisi ainsi: traçant entre deux points choisis la ligne géométrique AB, définissons sur elle le point C de manière à obtenir l'inégalité: $AC < CB$ et ensuite prenons

$$AC = 1$$

en la prenant pour échelle constante. AB sera-t-elle pour la surface sphérique plus petite que la circonférence du grand cercle ou égale à elle, nous obtiendrons toujours que $AC < \frac{1}{2}$ de la circonférenec. Si $AB <$ que la circonfèrence, il est évident que comme

$$AC + CB = AB$$

et $AC < CB$, $2AC <$ que la circonféreuce et $AC < \frac{1}{2}$ de la circonférence; si $AB =$ à la circonférence, alors dans les mêmes conditions: $2AC <$ que la circonférence et $AC < \frac{1}{2}$ de la circonférence. Tous les autres théorèmes et toutes les autres admissions, qui y sont basés, peuvent être appliqués aussi sur la surface sphérique.

---

1) Si la distance entre deux points de la surface sphérique est plus grande que la moitié de la circonférence du grand cercle, la discance entre les mêmes points, prise dans la direction opposée, et plus petite que la moitié de la circonférence.

Orembourg, 31 mai 1892.

IX.

Relationen bei regulären, dem Kreise ein- und umbeschriebenen Polygonen.

Von

Prof. **E. Doležal,**

Constructeur an der k. k. technischen Hochschule zu Wien.

Einleitung.

Der symbolischen Bezeichnung wegen, welche in folgender Untersuchung eingehalten wurde, wollen wir vorausschicken:

$$s = \overline{AB}$$

sei die Seite eines dem Kreise mit dem Radius

$$\varrho = \overline{AC} = \overline{BC}$$

einbeschriebenen, regelmässigen n-Eckes;

$$S = \overline{GH}$$

die Seite des demselben Kreise umschriebenen regulären Polygones mit n Seiten;

$$t = \overline{AF} = \overline{FB}$$

sei die Länge der Tangente in den Punkten A resp. B;

$$D = \overline{FD}, \quad d = \overline{FE}$$

die Entfernung des Tangentenschnittpunktes F von den Seiten s bzhw. S;

---

1) Die entsprechende Figur kann sich der Leser ohne Schwierigkeit entwerfen.

$$h = \overline{DE}$$

sei die Pfeilhöhe oder der Abstand der Seiten s und S;

$$r = \overline{CD}$$

sei der Radius jenes Kreises, der dem Polygone mit den Seiten s eingeschrieben ist, hingegen

$$R = \overline{CG}$$

der Radius des dem regulären Polygone mit den Seiten S umschriebenen Kreises;

$$\omega = \frac{360^0}{n}$$

der zum n-Eck zugehörige Centriwinkel.

Weiters sei

$$\overline{AE} = s_{2n}, \quad \overline{JK} = S_{2n}$$

die zu dem halben Bogen gehörige Sehne bzhw. Tangente, welche die Seite des einbeschriebenen resp. umbeschriebenen $2n$ Eckes darstellen.

Alle Symbole, welche sich auf das n-Eck beziehen, tragen der Einfachheit halber keinen Index, während die Polygone mit doppelter, vierfacher u. s. w. Seitenzahl die entsprechenden Indices besitzen. So haben wir:

für das $2n$-Eck: $s_{2n}, \quad S_{2n}, \quad t_{2n}, \quad h_{2n}, \quad k_{2n} \ldots$

„ „ 2^2n-Eck: $s_{2^2n}, \quad S_{2^2n}, \quad t_{2^2n}, \quad h_{2^2n}, \quad k_{2^2n} \ldots$

⋮

für das $2^m n$-Eck: $s_{2^m n}, \quad S_{2^m n}, \quad t_{2^m n}, \quad h_{2^m n}, \quad k_{2^m n} \ldots$

I.

Der Seitenabstand des dem Kreise ein- resp. umschriebenen, regulären n-Eckes

$$\overline{DD} = h$$

der nach einem terminus technikus Pfeilhöhe bezeichnet werden möge, bildet einen aliquoten Teil des Abstandes

$$\overline{FD} = D$$

der allgemein in der Relation

$$h = \frac{D}{k} \qquad 1)$$

seinen Ausdruck findet. Hierbei bedeutet k eine Zahl, welche, wie wir später sehen werden, 2 zu ihrem Minimum und 3 als Maximum hat, und welche wir mit dem Namen Teilfactor belegen wollen.

Nun ist

$$D = t \sin\frac{180}{n} = \varrho\,\frac{\sin^2\frac{180}{n}}{\cos\frac{180}{n}}$$

und

$$h = \varrho\left(1 - \cos\frac{180}{n}\right) \qquad 2)$$

Werden diese Werte in die Gleichung 1) eingesetzt, so folgt für den Teilfactor:

$$k = \frac{t \sin\frac{180}{n}}{\varrho\left(1 - \cos\frac{180}{n}\right)}$$

was entsprechend umgeformt den Ausdruck giebt:

$$k = 1 + \frac{1}{\cos\frac{180}{n}} \qquad 3)$$

oder aber nach Einführung des Wertes für die trigonometrische Function:

$$k = 1 + \frac{2t}{s} \qquad 4)$$

Mittels des Teilfactors lassen sich alle anderen Längen des Curvenstückes AEB des Kreises ausdrücken und in einfache, schönen Bau zeigende Formeln kleiden.

Zuerst erhalten wir für die trigonometrischen Functionen des halben Centriwinkels die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{180}{n} &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1}\\
\cos\frac{180}{n} &= \frac{1}{k-1}\\
\operatorname{tg}\frac{180}{n} &= \sqrt{k(k-2)}\\
\operatorname{cotg}\frac{180}{n} &= \frac{1}{\sqrt{k(k-2)}} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-2)}
\end{aligned} \qquad 5)$$

Für die folgenden Längen von Strecken stellen wir je drei Formeln auf, jenachdem wir dieselben als Functionen von t, s oder ϱ betrachten, und erhalten, wie leicht aus der Figur abzulesen ist, und zwar für die Tangente:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{s}{2\cos\frac{180}{n}} = \frac{k-1}{2}\,s \\ &= \varrho \operatorname{tg}\frac{180}{n} = \sqrt{k(k-2)}\,\varrho \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

für die Sehne:

$$\left.\begin{aligned} s &= 2t\cos\frac{180}{n} = \frac{2}{k-1}\,t \\ &= 2\varrho\sin\frac{180}{n} = \frac{2\sqrt{k(k-2)}}{k-1}\,\varrho \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

für den Radius t

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= t\operatorname{cotg}\frac{180}{n} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-2)}\,t \\ &= \tfrac{1}{2}s\operatorname{cotg}\frac{180}{n} = \frac{(k-1)\sqrt{k(k-2)}}{2k(k-2)}\,s \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

für die Länge

$$\left.\begin{aligned} D &= t\sin\frac{180}{n} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1}\,t \\ &= \tfrac{1}{2}s\operatorname{tg}\frac{180}{n} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{2}\,s \\ &= \varrho\operatorname{tg}\frac{180}{n}\sin\frac{180}{n} = \frac{k(k-2)}{k-1}\,\varrho \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

für die Pfeilhöhe:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{D}{k} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)}\,t \\ &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{2k}\,s \\ &= \frac{k-2}{k-1}\,\varrho \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

für den Abstand

$$\left.\begin{aligned} d = D - h &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k}\, t \\ &= \frac{(k-1)\sqrt{k(k-2)}}{2k}\, s \\ &= (k-2)\varrho \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Die Länge des Bogens l über der Sehne s berechnet sich nach der bekannten Formel:

$$l = 2\varrho \frac{\widehat{180}}{n} \quad 12)$$

wobei

$$\frac{\widehat{180}}{n} = \arcsin \frac{s}{2\varrho} \quad 13)$$

ist, da nämlich

$$m\beta = \frac{s}{2\varrho}$$

gleichkommt.

Setzen wir statt des arcsin die Reihe, so haben wir:

$$\arcsin \frac{s}{2\varrho} = \frac{s}{2\varrho} + \frac{1}{6}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^5 + \ldots$$

Nach Einführung dieses Wertes in 13) geht diese Gleichung über in:

$$l = 2\varrho\left[\frac{s}{2\varrho} + \frac{1}{6}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^5 + \ldots\right]$$

oder annähernd:

$$l = 2\varrho\left[\frac{s}{2\varrho} + \frac{1}{6}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^3\right]$$

was sich reducirt auf

$$l = s + \frac{s}{6}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2 + \ldots \quad 14)$$

Der hiebei begangene Fehler, entstanden durch Weglassung der nach dem zweiten Summanden der Arcus-Reihe folgenden Glieder, lautet:

$$\begin{aligned} f &= 2\varrho\left[\frac{3}{40}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^5 + \frac{5}{112}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^7 + \frac{35}{1152}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^9 + \ldots\right] \\ &= \varrho\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^5\left[\frac{3}{20} + \frac{5}{56}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2 + \frac{35}{576}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^4 + \ldots\right] \end{aligned} \quad 15)$$

Wird hierin für $\frac{s}{2\varrho}$ der Wert aus 14) eingeführt, nämlich

$$\left(\frac{s}{2\varrho}\right) = 6\,\frac{l-s}{s} = 6\left(\frac{l}{s}-1\right)$$

wobei $\frac{l}{s} > 1$ ist, so ergiebt sich für den Fehler:

$$f = 6^5\varrho\left(\frac{l}{s}-1\right)^5\left[\frac{3}{20}+\frac{5}{56}\,6^2\left(\frac{l}{s}-1\right)^2+\frac{35}{576}\left(\frac{l}{s}-1\right)^4+\ldots\right] \qquad 16)$$

Nach Formel 15) kann die Grösse des Fehlers jederzeit ermittelt werden, und wir besitzen ein Mittel zu beurteilen, ob der Bestimmung des Bogens jene Genauigkeit innewohnt, deren wir bedürfen.

Formel 14 lässt sich noch vereinfachen; denn es ist:

$$\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2 = 1 - \left(\frac{s}{2t}\right)^2 = \frac{(2t+s)\,(2t-s)}{4t^2}$$

somit kann auch die Näherungsformel 14) geschrieben werden nach Einführung dieses Wertes:

$$l = s + \frac{2t-s}{3}\;\frac{s(2t+s)}{8t^2} \qquad 17)$$

Selbst dieser Ausdruck lässt noch eine Vereinfachung zu; denn setzen wir, oder wird in einem gegebenen Falle

$$\frac{s(2t+s)}{8t^2} = 1$$

was dann eintritt, wenn

$$s = 2t$$

wird, so erhalten wir für den Bogen den Ausdruck

$$l = s + \frac{2t-s}{3} \qquad 18)$$

der eine rasche Berechnung des Bogens gestattet. In diesem Falle erhielten wir für den Centriwinkel auch

$$\cos\frac{180}{n} = \frac{s}{2t} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{180}{n} = 0$$

was dann eintreten würde, wenn $n = \infty$ wäre, d. h. für ein Polygon mit unendlich vielen Seiten würde die Formel 18) volle Giltigkeit besitzen.

Der Fehler f_1, den wir begehen, indem wir statt 17) die Formel 18) benutzen, hat den Wert:

$$f_1 = s + \frac{2t - s}{3} \frac{s(2t + s)}{8t^2} - \left[s + \frac{2t - s}{3}\right]$$

$$= \frac{2t - s}{3} \frac{s(2t + s) - 8t^2}{8t^2} \qquad 12)$$

Dieser Fehler kann auf zweifache Art der Nulle gleich werden und zwar:

a) wenn $2t - s = 0$, oder

b) wenn $s(2t + s) - 8t^2 = 0$ wird.

Der Fall a) ist oben besprochen und tritt ein bei einem Polygon mit unendlich vielen Seiten;

der Fall b) hat zur Bedingung eine quadratische Gleichung, welche nach t oder s geordnet werden kann, und lautet:

$$\left.\begin{aligned} t^2 - \frac{s}{4} t &= \frac{s^2}{8} \\ s^2 + 2ts &= 8t^2 \end{aligned}\right\}$$

welche aufgelöst geben:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{s}{2} \\ t_2 &= -\frac{s}{4} \end{aligned}\right\} \text{ resp. } \left\{\begin{aligned} s_1 &= 2t \\ s_2 &= -4t \end{aligned}\right.$$

was gleichfalls nie eintreten kann.

Formen wir die Gleichung 18) mit Hilfe der vorher abgeleiteten Ausdrücke um, so erhalten wir für den Bogen:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{2}{3} \frac{k + 1}{k - 1} t \\ &= \frac{1}{3} (k + 1) s \\ &= \frac{2}{3} \frac{(k + 1) \sqrt{k(k - 2)}}{k - 1} \varrho \end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

Für die Seite des dem Kreise einbeschriebenen $2n$-Eckes gilt die Formel:

$$s_{2n} = \tfrac{1}{2} \sqrt{s^2 + 4h^2}$$

welche Gleichung nach Einführung der Werte für s und h übergeht in

$$\left.\begin{aligned} s_{2n} &= \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{k(k-1)}\, t \\ &= \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{2k}\, s \\ &= \frac{\sqrt{(k-2)(2k-2)}}{k-1}\, \varrho \end{aligned}\right\} \qquad 21)$$

der zugehörige Centriwinkel ist $\frac{180}{n}$ resp. $\frac{18)}{2n}$,

Für die Seite des dem Kreise umschriebenen n-Eckes erhalten wir aus der Proportion:

$$S : s = \varrho : (\varrho - h)$$

$$S = \frac{\varrho - h}{\varrho}\, s$$

Da nun

$$\left.\begin{aligned} \varrho - h &= \frac{1}{k-1}\, \varrho \\ &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)(k-2)}\, t \\ &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{2k(k-2)}\, s \end{aligned}\right\}$$

ist, so geht die obige Formel für S über in

$$\left.\begin{aligned} S &= (k-1)\, s \\ &= 2\, t \\ &= 2\sqrt{k(k-2)}\, \varrho \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Die Seite des dem Kreise umschriebenen $2n$-Eckes ergiebt sich einfach; dieselbe ist, wie aus der Figur abzulesen ist:

$$\left.\begin{aligned} S_{2n} = 2\overline{AJ} &= \frac{2}{k}\, t \\ &= \frac{k-1}{k}\, s \\ &= \frac{2\sqrt{k(k-2)}}{k}\, \varrho \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

Für das Tangentenstück

$$\overline{JF} = \overline{FK} = \tau$$

lassen sich gleichfalls einfache Formeln aufstellen, welche wir der Vollständigkeit halber anführen wollen. Es ist nämlich

$$2\tau = S - S_{2n}$$

welche Gleichung nach ausgeführter Substitution übergeht in

$$\left.\begin{aligned}\tau &= \frac{k-1}{k}\,t \\ &= \frac{(k-1)^2}{2k}\,s \\ &= \frac{k-1}{k}\sqrt{k(k-2)}\,\varrho\end{aligned}\right\} \qquad 24)$$

Die Seite des umschriebenen 2n-Eckes lässt sich ausdrücken durch die Seite des eingeschriebenen $2n$-Eckes auf Grund der leicht zu findenden Proportion:

$$S_{2n} : s_{2n} = \varrho : (\varrho - h_{2n})$$

wobei h_{2n} den Abstand der Polygonseiten S_{2n} und s_{2n} bezeichnet. Dieser Abstand lässt sich, wie folgt, finden: Es ist

$$S_{2n} = \frac{\varrho}{\varrho - h_{3n}}\,s_{2n}$$

und nach Formel 23) auch

$$S_{2n} = \frac{k-1}{k}\,s$$

Drücken wir nun in der ersten Formel s_{2n} durch s aus, so erhalten wir:

$$S_{2n} = \frac{\varrho}{\varrho - h_{2n}}\,\frac{\sqrt{k(2k-2)}}{2k}\,s$$

und durch Gleichsetzung folgt:

$$\frac{k-1}{k} = \frac{\varrho}{\varrho - h_{2n}}\,\frac{\sqrt{k(2k-2)}}{2k}$$

woraus die gewünschte Differenz folgt:

$$\left.\begin{aligned}\varrho - h_{\lambda n} &= \frac{\sqrt{k(zk-2)}}{2(k-1)}\,\varrho \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2(k-1)(k-2)}}{k-2}\,s \\ &= \frac{\sqrt{2(k-1)(k-2)}}{2(k-1)(k-2)}\,t\end{aligned}\right\}$$

welche, in obenstehende Formel für S_{2n} substituirt, liefert:

$$S_{2n} = \frac{2(k-1)}{\sqrt{k(2k-2)}} s_{2n} \qquad 24')$$

Der Abstand h_{2n}, die Pfeilhöhe des $2n$-Eckes, stellt sich dar in der Form:

$$h_{2n} = \varrho \left[1 - \sqrt{\frac{k}{2(k-1)}}\right]$$

jener der Polygonseiten S und s

$$h = \varrho \left[1 - \frac{1}{k-1}\right]$$

Setzen wir

$$\frac{1}{k-1} = \alpha$$

und conform

$$\sqrt{\frac{k}{2(k-1)}} = \alpha_{2n}$$

so folgt hieraus die Relation:

$$\alpha_{2n}^2 = \frac{k}{2}\alpha$$

und man kann die obigen Ausdrücke für die Pfeilhöhen auch schreiben

$$\left.\begin{aligned} h &= \varrho \left[1 - \alpha\right] = \varrho \left[1 - \frac{2}{k}\alpha_{2n}^2\right] \\ h_{2n} &= \varrho \left[1 - \alpha_{2n}\right] = \varrho \left[1 - \sqrt{\frac{k\alpha}{2}}\right] \end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

Der Abstand h_{2n} lässt sich nun durch h ausdrücken; die Division obiger Ausdrücke giebt;

$$h_{2n} = \frac{1-\alpha_{2n}}{1-\alpha} h = \sqrt{\frac{k-1}{2}} \frac{\sqrt{2(k-1)} - \sqrt{k}}{k-2} h \qquad 26)$$

Aus der Figur erhalten wir:

$$\frac{s^2}{4} = h(2\varrho - h) = 2\varrho h - h^2$$

in welcher Gleichung die Pfeilhöhe h als Wurzel einer gemischt quadratischen Gleichung auftritt:

$$h^2 - 2\varrho h = -\frac{s^2}{4}$$

woraus ist

$$h = \varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - \frac{s^2}{4}}$$

Das obere Zeichen des Wurzelausdruckes hat in vorstehender Auflösung keinen Sinn, da h nie grösser werden kann als ϱ, es gilt daher bloss das untere Operationszeichen; es wird dann

$$h = \varrho - \sqrt{\varrho^2 - \frac{s^2}{4}} = \varrho \left[1 - \left[1 - \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2\right]^{1/2}\right]$$

Entwickeln wir den Subtrahenden dieser Differenz nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe, so folgt:

$$h = \varrho\left[1 - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^6 - \frac{5}{128}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^8\right]\right] - \ldots$$

oder reducirt:

$$h = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^4 + \ldots\right]$$

Indem wir

$$h = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2 = \frac{s^2}{8\varrho} = h_n \qquad 27)$$

setzen, erhalten wir für die Pfeilhöhe h nur einen Näherungswert, weshalb wir das Symbol h_n setzen, und begehen einen Fehler und zwar

$$\delta = \frac{1}{8}\left(\frac{s}{2\sigma}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^6 + \frac{5}{128}\left(\frac{s}{2\frac{1}{2}}\right)^8 + \ldots$$

welcher der Summe einer unendlichen Reihe gleichkommt. Lassen wir die Glieder derselben vom zweiten an weg, so hat diese Vernachlässigung einen geringen Einfluss auf die Grösse des Fehlers selbst; derselbe wird hinlänglich genau bestimmt sein durch

$$\delta = \frac{\varrho}{8}\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^4 = \frac{1}{128}\left(\frac{s}{\varrho}\right)^3 s \qquad 28)$$

Substituiren wir in Formel 27) die abgeleiteten Werte für s und ϱ, so folgt

$$\left.\begin{aligned} h_n &= \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{(k-1)^2}\,t \\ &= \tfrac{1}{4}\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1}\,s \\ &= \tfrac{1}{2}\,k(k-2)\,\varrho \end{aligned}\right\} \qquad 29)$$

wobei wir nochmals bemerken, dass dies nur Näherungsformeln sind, während die Gleichungen 10) die strengen Werte für h darstellen. Auch die folgenden Gleichungen für

$$\left.\begin{aligned}\delta &= \tfrac{1}{8}\,\frac{k(k-2)\sqrt{k(k-2)}}{(k-1)^4}\,t\\ &= \tfrac{1}{8}\,\frac{k(k-2)\sqrt{k(k-2)}}{(k-1)^3}\,s\\ &= \tfrac{1}{8}\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1}\,\varrho\end{aligned}\right\} \qquad 30)$$

stellen nur angenähert den Fehler in der Pfeilhöhe dar.

Den wahren Fehler $\varDelta$ in der Pfeilhöhe h erhielten wir durch Bildung der Differenz aus 10) und 27), nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta = h - h_n &= \tfrac{1}{2}\,\frac{(k-2)\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)^2}\,t\\ &= \tfrac{1}{2}\,\frac{(k-2)\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)}\,s\\ &= \tfrac{1}{2}\,\frac{(k-2)\,[2-k\,(k-2)]}{k-1}\,\varrho\end{aligned}\right\} \qquad 31)$$

Wir haben diese Berechnung von h, sowie dessen Fehlers hier eingeschaltet, weil in der Ingenieur-Praxis bei der Bogenabsteckung nach gemessene s und t h darnach berechnet wird, und weil auf die obige Formel 27), für h_n nämlich,

$$h_n = \frac{s^2}{8\varrho}$$

sich eine Bogenabsteckung stützt, die sogenannte Viertels-Methode.

Die Pfeilhöhe

$$\overline{LK} = h_{2n}$$

der zum $2n$-Ecke gehörigen Seite wird bei der praktischen Bogenabsteckung als der vierte Teil von der früheren, der Pfeilhöhe des n-Eckes, angenommen, also:

$$h_{2n} = \frac{h}{4}$$

Die theoretische Begründung hiefür ist die folgende: die Sehne

$$\overline{AC} = s_{2n}$$

ist fast die Hälfte von s_n, da in dem mathematischen Ausdrucke derselben

$$s_{2n} = \sqrt{\frac{s^2}{4} + h^2}$$

h^2 seiner Kleinheit wegen vernachlässigt werden kann, somit kann man setzen:

$$s_{2n} = \frac{s}{2}$$

Die Pfeilhöhe h_{2n} wird nach obiger Näherungsformel

$$h_{2n} = \frac{s_{2n}}{8\varrho^2}$$

substituiren wir hierin den Wert für s_{2n} und berücksichtigen die Formel 27), so folgt:

$$h_{2n} = \frac{s_n^2}{32\varrho} = \frac{1}{4}\frac{s^2}{8\varrho} = \frac{h}{4} \qquad 32)$$

Analog verfährt man weiter in der Berechnung der Pfeilhöhen des $2^2{}_n$, $2^3{}_n$, . . . $2^m{}_n$-Eckes, wofür sich ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} h_{2^2 n} &= \frac{h_{2n}}{4} = \frac{h}{4^2} \\ h_{2^3 n} &= \frac{h_{2^2 n}}{4} = \frac{h^3}{4^3} \\ h_{3^m n} &= \frac{h_{2^m n}}{4} = \frac{h}{4^m} \end{aligned}\right\} \qquad 33)$$

Indem wir die Gleichung 32) mit 26) vergleichen, erhalten wir die Beziehung:

$$\sqrt{\frac{k-1}{2}}\,\frac{\sqrt{2(k-2)} - \sqrt{k}}{k-2} = \tfrac{1}{4}$$

welche nach Befreiung der Wurzeln nachstehende Gleichung vierten Grades liefert:

$$17k^4 - 120k^3 + 312k^2 - 352k + 144 = 0 \qquad 34)$$

Diese Gleichung lässt sich unschwer in nachstehende Factoren zerlegen

$$(k-2)^3(17k-18) = 0$$

Es sind daher

$$k_1 = k_2 = k_3 = 2$$

drei gleiche und

$$k_4 = \frac{17}{18}$$

die vierte Wurzel der Gleichung 34)

Wie wir später sehen werden, entsprechen die Werte der Teilfactoren $k = 2$ einem Polygon mit unendlich vielen Seiten, während

$$k_4 = \frac{17}{18}$$

keinem reellen Polygone angehören kann, nachdem dieser Teilfactor unter das Minimum 2 herabgesunken ist.

Die Näherungswerte der Pfeilhöhen aus den Gleichungen 32) und 33) setzen uns in die Lage, die Seiten des $2^2 n$, $2^3 n$, . . . $2^m n$-Eckes in einfache und einen gesetzmässigen Bau aufweisende Ausdrücke umzuformen.

Für die Seite des $2n$-Eckes folgt in aller Strenge nach der Formel

$$s_{3n} = \sqrt{\frac{s^2}{4} + h}$$

und ausgeführter Substitution:

$$\left.\begin{aligned} s_{2n} &= \frac{\sqrt{2k(k-1)}}{k(k-1)}\, t = \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{k(k-1)}\, t \\ &= \frac{\sqrt{2k(k-1)}}{2k}\, s = \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{2k}\, s \\ &= \frac{\sqrt{2(k-1)(k-2)}}{k-1}\, \varrho = \frac{\sqrt{(k-2)(2k-2)}}{k-1}\, \varrho \end{aligned}\right\} \quad 35)$$

Die Polygonseite $s_{2^2 n}$ bestimmen wir auch der Gleichung

$$k_{2^2 n} = \sqrt{s_{2n}^2 + \frac{h_{2n}^2}{4}}$$

wobei s_{2n} den vorstehenden, streng genauen Wert besitzt, während h_{2n} mit dem Näherungswerte aus 32)

$$h_{2n} = \frac{h}{4}$$

eingesetzt wird. Nach einfacher Rechnung folgt:

$$\left.\begin{aligned} s_{2^2 n} &= \frac{\sqrt{k(9k-10)}}{4k(k-1)}\, t \\ &= \frac{\sqrt{k(9k-10)}}{8k}\, s \\ &= \frac{\sqrt{(k-2)(9k-10)}}{4(k-1)}\, \varrho \end{aligned}\right\} \quad 36)$$

Verfährt man in analoger Weise weiter, indem von nun an
für die Polygonseite als die Pfeilhöhe nur die Näherungswerte
stituirt werden, so erhalten wir nachstehende Formeln:

$$\left.\begin{aligned} s_{2^3 n} &= \frac{\sqrt{k(37k-42)}}{16k(k-1)}\,t \\ &= \frac{\sqrt{k(37k-42)}}{32k}\,s \\ &= \frac{\sqrt{(k-2)(37k-42)}}{16k(k-1)}\,\varrho \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} s_{2^4 n} &= \frac{\sqrt{k(149k-170)}}{64k(k-1)}\,t \\ &= \frac{\sqrt{k(149k-170)}}{128k}\,s \\ &= \frac{\sqrt{(k-2)(149k-170)}}{64(k-1)}\,\varrho \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} s_{2^5 n} &= \frac{\sqrt{k(597k-682)}}{256k(k-1)}\,t \\ &= \frac{\sqrt{k(597k-682)}}{512k}\,s \\ &= \frac{\sqrt{(k-2)(597k-682)}}{256(k-1)}\,\varrho \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} s_{2^6 n} &= \frac{\sqrt{k(2389k-2730)}}{1024k(k-1)}\,t \\ &= \frac{\sqrt{k(2389k-2730)}}{2048k}\,s \\ &= \frac{\sqrt{(k-2)(2389k-2730)}}{1024(k-1)}\,\varrho \end{aligned}\right\}$$

Das Bildungsgesetz für die Ausdrücke der Seiten der e
schriebenen Polygone s_{2n}, $s_{2^2 n}$, $s_{2^3 n}$, . . . ist unschwer zu finc

Die Ausdrücke sind Brüche. Unter dem Wurzelzeichen
Zählers erscheinen die Binome:

$$\left.\begin{array}{l} 2k - 2 \\ 9k - 10 \\ 37k - 42 \\ 149k - 170 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} \text{ multipliciert mit } \left\{\begin{array}{l} k \\ k \\ k - 2 \end{array}\right\}$$

je nachdem, ob der Ausdruck als eine Function von t, s oder ϱ erscheint.

Die Nenner werden erhalten aus:

$$\left.\begin{array}{l} k(k - 1) \\ 2k \\ (k - 1) \end{array}\right\}$$

indem wir successive multipliciren mit 4, wodurch resultirt:

$$\left.\begin{array}{lll} 4k(k - 1), & 16k(k - 1), & 64k(k - 1) \\ 8k & 32k & 128k \\ 4(k - 1) & 16(k - 1) & 64(k - 1) \end{array}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

je nachdem dieselben zu t, s oder ϱ gehören.

Die Coefficienten der binomischen Factoren im Radicand haben einen interessanten, gesetzmässigen Bau. Um diesen recht übersichtlich darzustellen, haben wir die Coefficienten, sowie ihre Zerfällung in folgender Tabelle vereinigt.

Polygonseite.	Coefficienten des Binoms.	
	Minuend.	Subtrahend.
s_{2n}	2	2
s_{2^2n}	$9 = 2 \cdot 4 + 1$	$10 = 2 \cdot 4 + 2$
s_{2^3n}	$37 = 9 \cdot 4 + 1$	$42 = 10 \cdot 4 + 2$
s_{2^4n}	$149 = 37 \cdot 4 + 1$	$170 = 42 \cdot 4 + 2$
s_{2^5n}	$597 = 149 \cdot 4 + 1$	$682 = 170 \cdot 4 + 2$
s_{2^6n}	$2389 = 597 \cdot 4 + 1$	$2730 = 682 \cdot 4 + 2$
s_{2^7n}	$9557 = 2389 \cdot 4 + 1$	$10\,.\,922 = 2730 \cdot 4 + 2$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Wir sehen:

1) **Die Coefficienten beider Summanden des Binoms für s_{2n} sind einander gleich und betragen 2.**

2) **Die Coefficienten der Binome folgender Polygonseiten sind nach nachstehendem Gesetze gebaut:**

a) **Der Coefficient des ersten Summanden des Binoms (Minuend) wird gebildet, indem man den unmittelbar vorhergehenden, correspondirenden Coefficienten mit 4 multiplicirt und die Einheit hinzu addirt.**

b) **Der Coefficient des zweiten Summanden des Binoms (Subtrahend) wird erhalten, indem man den unmittelbar vorhergehenden, correspondirenden zweiten Coefficienten mit 4 multiplicirt und dann 2 hinzu zählt.**

Die so gewonnenen Coefficienten lassen sich unschwer in Summanden zerlegen, die eine geometrische Progression bilden und eine leichte Summirung zulassen, wie die folgende Tabelle zeigt.

Polygon-seite.	Coeffcienten des Binoms	
	Minuend.	Subtrahend.
s_{2n}	$2 = 2^1$	$2 = 2^1[2^0]$
$s_2{}^2{}_n$	$9 = 2^3+[2^0]$	$10 = 2[2^2+2^0]$
$s_2{}^3{}_n$	$37 = 2^5+[2^2+2^0]$	$42 = 2[2^4+2^2+2^0]$
$s_2{}^4{}_n$	$149 = 2^7+[2^4+2^2+2^0]$	$170 = 2[2^6+2^4+2^2+2^0]$
$s_2{}^5{}_n$	$547 = 2^9+[2^6+2^4+2^2+2^0]$	$682 = 2[2^8+2^6+2^4+2^2+2^0]$
$s_2{}^6{}_n$	$= 2^{11}+[2^8+2^6+2^4+2^2+2^0]$	$= 2[2^{10}+2^8+2^6+2^4+2^2+2^0$
$s_2{}^7{}_n$	$= 2^{13}+[2^{10}+2^8+2^6+2^4+2^2+2^0]$	$= 2[2^{12}+2^{10}+2^8+2^6+2^4+2^2+2^0]$
. . .	. . .	. . .
$s_2{}^m{}_n$	$x_m = 2^{2m-1}+[2^{2m-4}+2^{2m-8}+\ldots+2^2+2^0]$	$y_m = 2[2^{2m-2}+2^{2m-4}+\ldots+2^2+2^0]$

Wie man sieht, besteht zwischen den Coefficienten des Binoms x_m und y_m ein Zusammenhang, der gegeben ist durch

oder
$$\left.\begin{aligned} x_m &= 2^{2m-2} + \tfrac{1}{2} y_{m-1} \\ 2x^m &= 2^{3m-1} + y_m \end{aligned}\right\} \qquad 41)$$

Nachdem die Coefficienten x_m und y_m geometrische Progressionen in sich enthalten, so lassen sie sich vereinfachen. Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} x_m &= \tfrac{1}{3}[3 \,.\, 2^{2m-1} + 2^{(2(m-1)} + 1] \\ y_m &= \tfrac{2}{3}[2^{2m} - 1] \end{aligned}\right\} \qquad 42)$$

Vor den allgemeinen Factoren im Nenner

je nachdem sie zu
$$\begin{matrix} k(k-1), & k, & k-1 \\ t, & s, & \varrho \end{matrix}$$

gehören, erscheinen gewisse Factoren und zwar

für s_{2n}	tritt auf	1,	2,	1
s_{2^2n}	„ „	2^2,	2^5,	2^4
s_{2^3n}	„ „	2^4,	2^5,	2^4
s_{2^4n}	„ „	2^6,	2^7,	2^6

.
.
.

durch einen Inductionsschluss erhalten wir:

$$\text{für } s_{2^m n} \qquad 2^{2(m-1)}, \qquad 2^{2m-1}, \qquad 2^{2(m-1)}$$

hiebei sind die zu t und ϱ zugehörigen Factoren einander gleich.

Indem wir die erhaltenen, allgemeinen Ausdrücke für die Coefficienten verwerten, können wir für die Seite des eingeschriebenen $2^m{}_n$-Eckes nachstehende Formeln erhalten:

$$\left.\begin{aligned} s_{2^m n} &= \frac{\sqrt{k(k\, x_m - y_m)}}{2^{2(m-1)}\, k(k-1)}\, t \\ &= \frac{\sqrt{(k(k \,.\, x_m - y_m)}}{2^{2m-1}\, k}\, s \\ &= \frac{\sqrt{(k-2)\,(k \,.\, x_m - y_m)}}{2^{2(m-1)}\,(k-1)}\, \varrho \end{aligned}\right\} \qquad 43)$$

oder

$$
\left.
\begin{aligned}
s_2{}^m{}_n &= \frac{\sqrt{k[(k-2)x_m - 2^{2m-1}]}}{2^{2(m-1)}k(k-1)}\,t \\
&= \frac{\sqrt{k[(k-2)x_m - 2^{2m-1}]}}{2^{2m-1}k}\,s \\
&= \frac{\sqrt{(k-2)[(k-2)x_m - 2^{2m-1}]}}{2^{2(m-1)}(k-1)}\,\varrho
\end{aligned}
\right\} \quad 44)
$$

weiter auch:

$$
\left.
\begin{aligned}
s_2{}^m{}_n &= \frac{\sqrt{k[2^{2(m-1)}k - \frac{3}{2}y_m]}}{2^{2(m-1)}k(k-1)}\,t \\
&= \frac{\sqrt{k[2^{2m-2)}k - \frac{3}{2}y_m]}}{2^{2m-1}k}\,s \\
&= \frac{\sqrt{(k-2)[2^{2(m-1)}k - \frac{3}{2}y_m]}}{2^{2m(-1)}(k-1)}\,\varrho
\end{aligned}
\right\} \quad 45)
$$

und schliesslich

$$
\left.
\begin{aligned}
s_2{}^m{}_n &= \frac{\sqrt{\frac{k}{3}[2^{2(m-1)}(7k-8)-(k-2)]}}{2^{2(m-1)}k(k-1)}\,t \\
&= \frac{\sqrt{\frac{k}{3}[2^{2(m-1)}(7k-8)-(k=2)]}}{2^{2m-1}k}\,s \\
&= \frac{\sqrt{\frac{k-2}{3}[2^{2(m-1)}(7k-8)-(k-2)]}}{2^{2(m-1)}(k-1)}\,\varrho
\end{aligned}
\right\} \quad 46)
$$

II.

Für den Teilfactor eines n-Eckes wurde nach Gleichung 3) und 4) des I. Abschnittes erhalten:

$$
k_n = 2 + \frac{2t_n}{s_n} = \frac{2\cos^2\frac{90}{n}}{\cos\frac{180}{n}}
$$

analog weiter

$$
k_{2n} = 1 + \frac{2t_{2n}}{s_{2n}} = \frac{2\cos^2\frac{90}{2n}}{\cos\frac{180}{2n}} \quad 1)
$$

$$\left.\begin{aligned} k_2{}^2{}_n &= 1 + \frac{2t_2{}^2{}_n}{s_2{}^2{}_n} = \frac{2\cos^2\frac{90}{2_{2n}}}{\cos\frac{180}{2^2{}_n}} \\ &\vdots \\ k_2{}^m{}_n &= 1 + \frac{2t^m{}_n}{s_2{}^m{}_n} = \frac{2\cos^2\frac{90}{2^m{}_n}}{\cos\frac{180}{2^m{}_n}} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Es ist nicht schwer, den Beweis zu erbringen, dass alle Teilfactoren grösser sein müsssen als zwei.

Nehmen wir den Radius $\varrho = 1$ an, so werden augenscheinlich

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{180}{n} &= s \\ \operatorname{tg}\frac{180}{n} &= S \\ \cos\frac{180}{n} &= 1 - h_n \\ \cos\frac{180}{2n} &= 1 - h_{2n} \\ &\vdots \\ \cos\frac{180}{2^m{}_n} &= 1 - h_2{}^m{}_n \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Nach Herr „Höhere Mathematik“ Bd. I. pag. 111, besteht die trigonometrische Reihe:

$$\sec x = 1 + (1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + (1 - \cos x)^3 + \ldots \quad 3)$$

wobei x zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt wird und unter dieser Supposition auch die Reihe convergirt.

In unserem Falle, wobei der Reihe nach

$$x = \frac{180}{n} \text{ weiter } \frac{180}{2n}, \frac{180}{2^2{}_n}, \frac{180}{2^3{}_n} \ldots \frac{180}{2^m{}_n}$$

ist, wird die erwähnte Bedingung in aller Strenge erfüllt, somit gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sec\frac{180}{n} &= 1+\left(1-\cos\frac{180}{n}\right)+\left(1-\cos\frac{180}{n}\right)^2 \\
&\qquad +\left(1-\cos\frac{180}{n}\right)^3+\ldots \\
\sec\frac{180}{2n} &= 1+\left(1-\cos\frac{180}{2n}\right)+\left(1-\cos\frac{180}{2n}\right)^2 \\
&\qquad +\left(1-\cos\frac{180}{2n}\right)^3+\ldots \\
\sec\frac{180}{2^2n} &= 1+\left(1-\cos\frac{180}{2^2n}\right)+\left(1-\cos\frac{180}{2^2n}\right)^2 \\
&\qquad +\left(1-\cos\frac{180}{2^2n}\right)^3+\ldots \\
&\;\;\vdots \\
\sec\frac{180}{2^mn} &= 1+\left(1-\cos\frac{180}{2^mn}\right)+\left(1-\cos\frac{180}{2^mn}\right)^2 \\
&\qquad +\left(1-\cos\frac{180}{2^mn}\right)^3+\ldots
\end{aligned}\right\} \quad 3')$$

Führen wir hierin für sec und cos die zugehörigen Werte ein aus 2), so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
k_n - 1 &= 1 + h_n + h_n^2 + h_n^3 + \ldots = \frac{1}{1-h_n} \\
k_{2n} - 1 &= 1 + h_{2n} + h_{2n}^2 + h_{2n}^3 + \ldots = \frac{1}{1-h_{2n}} \\
k_{2^2n} - 1 &= 1 + h_{2^2n} + h_{2^2n}^2 + h_{2^3n}^2 + \ldots = \frac{1}{1-h_{2^2n}} \\
&\;\;\vdots \\
k_{2^mn} - 1 &= 1 + h_{2^mn} + h_{2^mn}^2 + h_{2^mn}^3 + \ldots = \frac{1}{1-h_{2^mn}}
\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Hieraus bestimmt sich:

$$k_{2^mn} = 2 + h_{2^mn} + h_{2^mn}^2 + h_{1^mn}^3 + \ldots = \frac{2-k_{2^mn}}{1-h_{2^mn}} \qquad 5)$$

da nun die Summe in diesem Ausdrucke

$$h_{2^m n} + h_{2^{m2} n} + h_{2^{m3} n} + \dots$$

entschieden positiv ist, so ist auch sicherlich $k > 2$. In analoger Weise könnte für einen jeden der speciellen Teilfactoren direct erwiesen werden, dass derselbe grösser als 2 sein müsse.

Ein gleichseitiges Dreieck ist das einfachste, regelmässige Polygon, welches einem Kreise ein- resp. umschrieben werden kann; wie wir uns leicht überzeugen, indem wir in die erste Gleichung des Systems 1) $n = 3$ setzen, wird der Teilfactor $k = 3$.

Für ein Polygon mit unendlich vielen Seiten ist $n = \infty$, somit $k = 2$. Die beiden extremen Werte für den Teilfactor k sind 2 als Minimum und 3 als dessen Maximum. Der Teilfactor hat daher allgemein einen Wert, der sich ausdrücken lässt durch:

$$2 < k \leqq 3 \tag{6}$$

Die Gleichungen 4) lassen sich auch schreiben, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} (k_n - 1)\,(1 - h_n) &= 1 \\ (k_{2n} - 1)\,(1 - h_{2n}) &= 1 \\ (k_{2^2 n} - 1)\,(1 - h_{2^2 n}) &= 1 \\ &\vdots \\ (k_{2^m n} - 1)\,(1 - h_{2^m n}) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aus diesen Gleichungen kann k durch h und umgekehrt ausgedrückt werden; es ergeben sich die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} k_n &= \frac{2 - h_n}{1 - h_n} &&\text{sowie}\quad h_n = \frac{2 - k_n}{1 - k_n} \\ k_{2n} &= \frac{2 - h_{2n}}{1 - h_{2n}} &&\text{sowie}\quad h_{2n} = \frac{2 - k_{2n}}{1 - k_{2n}} \\ k_{2^2 n} &= \frac{2 - h_{2^2 n}}{1 - h_{2^2 n}} &&\text{sowie}\quad h_{2^2 n} = \frac{2 - k_{2^2 n}}{1 - k_{2^2 n}} \\ &\vdots \\ k_{2^m n} &= \frac{2 - h_{2^m n}}{1 - h_{2^m n}} &&\text{sowie}\quad k_{2^m n} = \frac{2 - k_{2^m n}}{1 - k_{2^m n}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die vorstehenden Werte für h und k können auch in die Form entwickelt werden:

$$\left.\begin{array}{l}
k_n = 2 + h_n + h_n^2 + h_n^3 + \ldots + \text{in inf. und} \\
\qquad h_n = 2 + k_n + k_n^2 + k_n^3 + \ldots \text{in inf.} \\
k_{2n} = 2 + h_{2n} + h_{2n}^2 + h_{2n}^3 + \ldots + \text{in inf. und} \\
\qquad h_{2n} = 2 + k_{2n} + k_{2n}^2 + k_{2n}^3 + \ldots \text{in inf.} \\
k_{2^2 n} = 2 + h_{2n}^1 + h_{2n}^2 + h_{3n}^3 + \ldots + \text{in inf. und} \\
\qquad h_{2^2 n} = 2 + k_{2^2 n} + k_{2^2 n}^2 + k_{2^2 n}^3 + \ldots \text{in inf.} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
k_{2mn} = 2 + h_{2^m n} + h_{2^m n}^2 + h_{2^m n}^3 + \ldots + \text{in inf. und} \\
\qquad h_{2^m n} = 2 + k_{2^m n} + k_{2^{m2} n} + k_{2^{m3} n} + \ldots \text{in inf.}
\end{array}\right\} \quad 9)$$

Bilden wir die Summen der Teilfactoren bzhw. der Pfeilhöhen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{m=0}^{m} k_{2^m n} = 2(m+1) + \sum\limits_{m=0}^{m} \frac{h_{2^m n}}{1 - h_{2^m n}} \\
\sum\limits_{m=0}^{m} h_{2^m n} = 2(m+1) + \sum\limits_{m=0}^{m} \frac{k_{2^m n}}{1 - h_{2^m n}}
\end{array}\right\} \quad 10)$$

was auch geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{m=0}^{m} k_{2^m n} = 3(m+1) + \sum\limits_{m=0}^{m} [h_{2^m n} + h_{2^{2m} n} + h_{2^{2m} n} + \ldots \\
\qquad\qquad + h_{2^{mm} n} \\
\sum\limits_{m=0}^{m} h_{2^m n} = 2(m+1) + \sum\limits_{m=0}^{m} [k_{2^m n} + k_{2^{2m} n} + k_{2^m c n} + \ldots
\end{array}\right\} \quad 11)$$

Verwenden wir die im I. Abschnitte Gl. (36) verwendete Annahme, welche zwischen den Pfeilhöhen der aufeinander folgenden Polygone herrschen soll, nämlich

$$\left.\begin{array}{l}
h_{2n} = \frac{h_n}{4} = \frac{h_n}{2^2} \\
h_{2^2 n} = \frac{h_{2n}}{4} = \frac{h_n}{4^2} = \frac{h_n}{2^4} \\
h_{2^3 n} = \frac{h_{2^2 n}}{4} = \frac{h_n}{4^3} = \frac{h_n}{2^6} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
h_{1^m n} = \frac{h_{2^{m-1} n}}{4} = \frac{h_n}{4^m} = \frac{h_n}{2^{2m}}
\end{array}\right\} \quad 12)$$

so erhalten wir für die Teilfactoren nach ausgeführter Substitution:

$$
\left.
\begin{aligned}
k_{2n} &= 2 + \frac{h_n}{4} + \frac{h^2_n}{4^2} + \frac{h^3_n}{4^3} + \ldots + \text{ in inf.} \\
&\qquad\qquad = 2 + \frac{h_n}{2^2 - h_n} = \frac{2^3 - h_n}{2^2 - h_n}
\end{aligned}
\right\}
$$

und analog weiter:

$$
\left.
\begin{aligned}
k_{2^2 n} &= 2 + \frac{h_n}{2^4} + \frac{h_n^2}{2^8} + \frac{h_n^3}{2^{12}} + \ldots + \text{ in inf.} = \frac{2^3 - h_n}{2^4 - h_n} \\
k_{2^3 n} &= 1 + \frac{h_n}{2^6} + \frac{h_n^2}{2^{12}} + \frac{h_n^3}{2^{18}} + \ldots + \text{ in inf.} = \frac{2^7 - h_n}{2^6 - h_n} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
k_{2^m n} &= 2 + \frac{h_n}{2^{2m}} + \frac{h_n^2}{2^{4m}} + \frac{h_n^3}{2^{6m}} + \ldots + \text{ in inf.} \\
&\qquad\qquad = \frac{2^{2m+1} - h_n}{2^{2m} - h_n}
\end{aligned}
\right\} \quad 13)
$$

Bilden wir die Summe der Teilfactoren, so folgt nach Einführung der Werte:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{m} k_{2^m n} = 2(m+1) &+ \frac{h_n}{2^4}\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2m}}\right] \\
&+ \frac{h_n^2}{2^8}\left[1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^8} + \ldots + \frac{1}{2^{4m}}\right] \\
&+ \frac{h_n^3}{2^{12}}\left[1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \ldots + \frac{1}{2^{6m}}\right] \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&+ \frac{h_n^{r}}{2^{r.4}}\left[1 + \frac{1}{2^{r.2}} + \frac{1}{2^{r.4}} + \ldots + \frac{1}{2^{r.2m}}\right] \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}
\right\} \quad 14)
$$

oder auch:

$$
\sum_{m=0}^{m} k_{2^m n} = 2(m+1) + \frac{h_n}{2^4 - h_n} + \frac{h_n}{2^6 - h_n} + \ldots + \frac{h_n}{2^{2r} - h_n} + \ldots \text{ in inf.} \quad 15)
$$

Nun sollen die Ausdrücke in den obigen Klammern der oberen

Gleichung 14) geometrische Progressionen 1. Ordnung dar; ihre Summierung giebt mit σ und dem entsprechenden Index bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{2^{2(m+1)} - 1}{(2^{2} - 1)2^{2m}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2m}}\left[2^{2(m+1)} - 1\right] \\
\sigma_2 &= \frac{2^{4(m+1)} - 1}{(2^4 - 1)2^{4m}} = \frac{1}{15 \cdot 2^{4m}}\left[2^{4(m+1)} - 1\right] \\
\sigma_3 &= \frac{2^{6(m+1)} - 1}{(2^{0} - 1)2^{6m}} = \frac{1}{63 \cdot 2^{8m}}\left[2^{6(m+1)} - 1\right] \\
&\;\;\vdots \\
\sigma_r &= \frac{2^{2r(m+1)} - 1}{(2^{2r} - 1)2^{2rm}} = \frac{1}{(2^{2r} - 1)2^{2rm}}\left[2^{2r(m+1)} - 1\right]
\end{aligned}\right\} \quad 16)$$

Die Summe der Teilfactoren erscheint dann in der Form:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{m} k_2{}^{m}{}_n = 2(m+1) &+ \frac{h_n}{2^{m+2}}\left[\frac{2^{2(m+1)} - 1}{3} + \frac{2^{4(m+1)} - 1}{15 \cdot 2^{2(m+2)}}\right. \\
&+ \frac{2^{(6(m+1)} - 1}{63 \cdot 2^{4(m+2)}} + \cdots + \frac{2^{2r(m+1)} - 1}{(2^{2r} - 1)2^{2(r-1)(m+2)}} \\
&\left. + \cdots + \text{in inf.}\right] \qquad 17)
\end{aligned}$$

Vergleichen wir die vorstehende Gleichung 17) mit 15), so erhalten wir für die Summe der Brüche:

$$\frac{h_n}{2^4 - h_n} + \frac{h_n}{2^6 - h_n} + \frac{h_n}{2^8 - h_n} + \cdots + \frac{h_n}{2^{2r} - h_n} + \cdots \text{in inf.}$$

den Wert

$$\begin{aligned}
\frac{h_n}{2^{m+2}}&\left[\frac{2^{2(m+1)} - 1}{3} + \frac{2^{4(m+1)} - 1}{15 \cdot 2^{2(m+2)}} + \frac{2^{6(m+2)} - 1}{63 \cdot 2^{4(m+2)}} + \cdots\right. \\
&\left. + \frac{2^{2r(m+1)} - 1)}{(2^{2r} - 1)2^{2(r-1)(m+2)}} + \cdots \text{in inf.}\right]
\end{aligned}$$

III.

Zwischen den Peripherien der untersuchten Polygone bestehen leicht auffindbare Beziehungen.

Bezeichnen wir mit u_n, u_{2n}, U_n, U_{2n} die Umfänge der Polygone, welche den Seiten s_n, s_{2n}, S_n und S_{2n} entsprechen, so sind aus der elementaren Geometrie die Relationen bekannt:

$$\left.\begin{array}{ll} u_n = 2n\sqrt{\varrho^2 - a^2}, & u_{2n} = 2n\sqrt{2\varrho(\varrho - a)} \\ U_n = \frac{2n\varrho}{a}\sqrt{\varrho^2 - a^2}, & U_{2n} = \frac{4n\varrho}{\varrho + a}\sqrt{\varrho^2 - a^2} \end{array}\right\}$$

wobei

$$a = \sqrt{\varrho^2 - \frac{s^2}{4}}$$

bedeutet. Drücken wir s durch den Radius ϱ und den Teilfactor k aus, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)(k-2)}\,t \\ = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{2k(k-2)}\,s \\ = \sqrt{2-(k-1)^2}\,\varrho \end{array}\right\}$$

und der Wurzelausdruck $\sqrt{\varrho^2 - a^2}$ wird nach eingeführter Substitution der vorhergehenden Gleichung die Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\varrho^2 - a^2} = \frac{1}{k-1}\,t \\ = \frac{1}{2}\,s \\ = \sqrt{k(k-2)}\varrho \end{array}\right\}$$

Werden nun diese in den beiden letzten Gleichungsgruppen gewonnenen Werte in die Formeln für die Umfänge substituirt, so ergeben sich die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} u_n = \frac{2n}{k-1}\,t \\ = n\;s \\ = \frac{2a\sqrt{k(k-2)}}{k-1}\,\varrho \end{array}\right\} \quad 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} U_n = 2n\,t \\ = n(k-1)s \\ = 2n\sqrt{k(k-2)}\,\varrho \end{array}\right\} \quad 2)$$

weiter für die Peripherien der Polygone mit doppelter Seitenanzahl:

$$\left.\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{2n}{k}\sqrt{\frac{2k}{k-1}}\,t \\ &= \frac{n}{k}\sqrt{2k(k-1)}\,s \\ &= \frac{2n}{k-1}\sqrt{2(k-1)(k-2)}\,\varrho \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

und

$$\left.\begin{aligned} U_m &= \frac{4n}{k}\,t \\ &= 2n\,\frac{k-1}{k}\,s \\ &= \frac{4n}{k}\sqrt{k(k-2)}\,\varrho \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Gestützt auf die soeben aufgestellten Formeln für die Umfänge, erhalten wir nachstehende sechs Formeln:

$$\left.\begin{aligned} u_n^2 : u_2{}^2{}_n &= k : 2(k-1) = \cos^2\frac{90}{n} ; 1 \\ u_n : U_n &= 1 : (k-1) = \cos\frac{180}{n} : 1 \\ u_n : U_{2n} &= k : 2(k-1) = \cos^2\frac{90}{n} : 1 \\ u_{2n}^2 : U_n^2 &= 2 : k(k-1) = \cos^2\frac{180}{n} : \cos^2\frac{90}{n} \\ u_2{}^2{}_n : U_2{}^2{}_u &= k : 2(k-1) = \cos^2\frac{90}{n} : 1 \\ U_u : U_{2n} &= k : 2 = \cos^2\frac{90}{n} : \cos\frac{180}{n} \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Die erste dieser Proportionen giebt den Teilfactor in der Form:

$$k = \frac{2u_n^2}{2u_n^2 - u_{2n}^2} \qquad 6)$$

welche Gleichung, nach u_{2n} resp. $u_2{}^2{}_n$ aufgelöst, giebt:

$$\left.\begin{aligned} u_n^2 &= \frac{k}{2(k-1)}\,u_{2n}^2 \\ &= \cos^2\frac{90}{n}\,u_{2n}^2 \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

$$\left.\begin{aligned} u_{2n}^2 &= 2\,\frac{k-1}{k}\,u_n^2 \\ &= \frac{1}{\cos^2\frac{90}{n}}\,u_n^2 \\ &= \frac{4t}{s+2t}\,u_n^2 \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Die zweite Proportion des Systems 5) führt auf eine einfache und elegante Beziehung, nämlich:

$$k = 1 + \frac{U_n}{u_n} \quad 9)$$

woraus weiter folgt:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{k-1}\,U_n \\ &= \cos\frac{180}{n}\,U_n \\ &= \frac{s}{2t}\,U_n \end{aligned}\right\} \quad 10)$$

und

$$\left.\begin{aligned} U_n &= (k-1)\,u_n \\ &= \frac{1}{\cos\frac{180}{n}}\,u_n \\ &= \frac{2t}{s}\,u_n \end{aligned}\right\} \quad 11$$

Die dritte der Proportionen in Gleichung 5) liefert:

$$k = \frac{2u_n}{2u_n - U_{2n}} \quad 12)$$

ine Beziehung, welche eine bedeutende Aehnlichkeit mit jener 6) esitzt

Werden aus dieser u_n resp u_{2n} bestimmt, so erhalten wir die ormeln:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{k}{2(k-1)}\,U_{2n} \\ &= \cos^2\frac{90}{n}\,U_{2n} \\ &= \frac{s+2t}{4t}\,U_{2n} \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

zhw.

$$\left.\begin{aligned} U_{2n} &= \frac{2(k-1)}{k} u_n \\ &= \frac{n}{\cos^2 \frac{90}{n}} u_n \\ &= \frac{4t}{s+2t} u_{2n} \end{aligned}\right\} \qquad 14)$$

Aus der ersten und dritten Proportion folgt sofort die Relation:

$$u_{2n}^2 = u_n U_{2n} \qquad 15)$$

Die vierte Proportion in 5) führt auf die Gleichung:

$$U_n^2 = \frac{k(k-1)}{2} u_{2n}^2 \qquad 16)$$

welche nach k geordnet eine gemischt quadratische Gleichung bietet:

$$k^2 - k = 2\left(\frac{U_n}{u_{2n}}\right)^2$$

aus welcher der Teilfactor die Form annimmt:

$$k = \frac{u_{2n} \pm \sqrt{u_{2n}^2 + (2U_n)^2}}{2u_{3n}}$$

resp.

$$= \tfrac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{u_2{}^2{}_n + (2U_n)^2}}{2u_{2n}} \qquad 17)$$

Aus den vorhergehenden Untersuchungen wissen wir, dass der Teilfactor eingeschlossen ist zwischen 3 und 2, also $3 > k > 2$ ist; infolge dessen muss der zweite Summand in 17)

a) mit dem Vorzeichen plus genommen werden, da das untere Zeichen minus auf einen Widerspruch führen würde, und

b) es muss derselbe grösser sein als $\frac{3}{2}$, hingegen kleiner als $\frac{5}{2}$, was in der Formelsprache ausgedrückt wird durch

$$3 > \sqrt{u_{2n}^2 + (2U_n)^2} > 3 \qquad 18)$$

Aus der fünften Proportion des Systems 6) folgt:

$$k = \frac{2u_{2n}^2}{2u_{2n}^2 - U_{2n}^2} \qquad 18)$$

eine Gleichung, welche ähnlich ist jenen b) und 12) für den Teilfactor. Hieraus ergiebt sich weiter:

$$\left.\begin{aligned} u_{2n}^2 &= \frac{k}{2(k-1)}\,U_{2n}^2 \\ &= \cos^2\frac{90}{2n}\,U_{2n}^2 \\ &= \frac{s+2t}{4t}\,U_{2n}^4 \end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

und

$$\left.\begin{aligned} U_{2n}^2 &= \frac{2(k-1)}{k}\,u_{2n}^2 \\ &= \frac{1}{\cos^2\frac{90}{2n}}\,u_{2n}^2 \\ &= \frac{4t}{s+2t}\,u_{2a}^2 \end{aligned}\right\} \qquad 21)$$

Endlich aus der sechsten Proportion fliesst:

$$k = 2\,\frac{U_n}{U_{2n}} \qquad 22)$$

welcher Ausdruck, nach U_{2n} resp. U_n aufgelöst, die Formeln liefert:

$$\left.\begin{aligned} U_{2n} &= \frac{2}{k}\,U_n \\ U_n &= \frac{k}{2}\,U_{2n} \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

Bringen wir die einzelnen Proportionen durch Division in Verbindung, so gewinnen wir eine ganze Reihe interessanter Relationen zwischen den Peripherien der ein- resp. umschriebenen n- und $2n$-Ecke. Unter den sechs Proportionen sind 15 Combinationen zu zweien möglich; es wären daher im ganzen 15 neue Relationen zu erwarten; es sind jedoch 5 darunter identisch, daher reducirt sich die Anzahl derselben auf 10. Wir wollen symbolisch die Relationen, welche sich ergeben, durch R und rechts mit einem Zahlen-Index versehen, welcher anzeigt, aus welchen Proportionen jene Beziehung entstanden ist. So z. B. $R_{\frac{2}{5}}$ heisst: die anbei angegebene Formel resultirt durch Division aus 2 und 5.

Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &R_{\frac{1}{2}},\ R_{\frac{1}{4}},\ R_{\frac{2}{4}} \qquad && \frac{u_2^2 n}{u_n U_n} = \frac{2}{k} \\ &R_{\frac{1}{3}},\ R_{\frac{1}{5}},\ R_{\frac{3}{5}} \qquad && u_{2n}^2 = u_n U_{2n} \end{aligned}\right\} \qquad 24)$$

$$\left.\begin{array}{lll}
R_{\frac{1}{6}} & \dfrac{u_{2n}^2\, U_n}{u_n^2\, U_{2n}} & = k-1) \\[2ex]
R_{\frac{2}{3}},\quad R_{\frac{4}{5}} & \dfrac{U_{2n}}{u_n} & = \dfrac{k}{2} \\[2ex]
R_{\frac{2}{4}} & \dfrac{u_{2n}^2\, U_n}{u_{2n}^2\, u_n} & = \dfrac{k}{2} \\[2ex]
R_{\frac{2}{6}} & \dfrac{U_n^2}{U_{2n}\, u_n} & = \dfrac{k(k-1)}{2} \\[2ex]
R_{\frac{3}{4}} & \dfrac{U_{2n}\, u_{2n}^2}{U_n^2\, u_n} & = \left(\dfrac{k}{2}\right)^2 \\[2ex]
R_{\frac{3}{6}} & \dfrac{U_n}{u_n} & = k-1 \\[2ex]
R_{\frac{2}{6}} & \dfrac{U_n^2}{U_{2n}\, u_{2n}^2} & = \left(\dfrac{k}{2}\right)^2 (k-1) \\[2ex]
R_{\frac{5}{6}} & \dfrac{U_n\, U_{3n}}{U^{8}{}_n^{2}} & = k-1
\end{array}\right\} \qquad 24)$$

IV.

Auch die Flächeninhalte betrachteter Polygone bieten so manches Interessante.

Consequenterweise seien mit f_n, f_{2n}, F_n und F_{2n} die Flächeninhalte jener Polygone bezeichnet, welche den Seiten s_n, s_{2n}, S_n und S_{2n} entsprechen; dann erhalten wir für dieselben nachstehende Ausdrücke:

1) für das eingeschriebene n-Eck:

$$\left.\begin{aligned}
f_n &= \frac{n}{2}(\varrho - h)s \\
&= \frac{n}{4}\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-2)}\, s^2 \\
&= n\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)^2\,(k-2)}\, t^2 \\
&= n\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{(k-1)^2}\, \varrho^2
\end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

2) für das eingeschriebene $2n$-Eck:

$$f_{2n} = n(\varrho - h_{2n})\, s_{2n}$$

was nach ausgeführter Substitution übergeht in

$$\left.\begin{aligned} f_{2n} &= \frac{n}{4}\,\frac{(k-1)\sqrt{k(k-2)}}{k(k-2)}\,s^2 \\ &= n\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)(k-2)}\,t^2 \\ &= n\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1}\,\varrho^2 \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

3) Für das umbeschriebene n-Eck:

$$F_n = \frac{n}{\varrho}\,\varrho\,S_n$$

Werden die Werte für ϱ und S_n hierin substituirt, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} F_n &= \frac{n}{4}\,\frac{(k-1)^2\sqrt{k(k-2)}}{k(k-2)}\,s^2 \\ &= n\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{k^2(k-2)}\,t^2 \\ &= n\,\sqrt{k(k-2)}\,\varrho^2 \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

4) Für das umbeschriebene $2n$-Eck:

$$F_{2n} = n\varrho\,S_{2n}$$

was durch Einführung der Werte übergeht in

$$\left.\begin{aligned} F_{2n} &= 2n\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{k^2(k-2)}\,t^2 \\ &= \frac{n}{2}\,\frac{(k-1)^2\sqrt{k(k-2)}}{k^2(k-2)}\,s^2 \\ &= 2n\,\frac{\sqrt{k(k-2)}}{k}\,\varrho^2 \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Bilden wir nun die 6 möglichen Proportionen zwischen den Flächeninhalten, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} f_n : f_{2n} &= 1 : (k-1) = \cos\frac{180}{n} : 1 \\ f_n : F_n &= 1 : (k-1)^2 = \cos^2\frac{180}{n} : 1 \\ f_n : F_{2n} &= k : 2(k-1)^2 = \cos^2\frac{90}{n}\cos\frac{180}{n} : 1 \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{2n} : F_n = 1 : (k-1) = \sec\dfrac{180}{n} : 1 \\ f_{2n} : F_{2n} = k : 2(k-1) = \cos^2\dfrac{90}{n} : 1 \\ F_n : F_{2n} = k : 2 = \cos^2\dfrac{90}{n} : \cos\dfrac{180}{n} \end{array}\right\} \qquad 5)$$

Aus der ersten Proportion folgt:

$$\left.\begin{array}{l} k = 1 + \dfrac{f_{2n}}{f_n} \\ f_{2n} = (k-1) f_n \end{array}\right\} \qquad 6)$$

resp.

Die zweite Proportion liefert die Beziehung:

$$F_n = (k-1)^2 f_n^2 \qquad 7)$$

welche nach k aufgelöst für den Teilfactor den Ausdruck giebt:

$$k = 1 \pm \sqrt{\frac{F_n}{f_n}} \qquad 8)$$

In dieser Gleichung hat nur das obere Zeichen eine Berechtigung, da $3 < k > 2$ sein muss, und nie $k < 1$ sein kann.

Bestimmen wir aus der dritten Proportion des Systems 5) F_{2n}, so erhalten wir

$$F_{2n} = \frac{2(k-1)^2}{k} \qquad 9)$$

Wird diese Gleichung nach k geordnet, so ist

$$k^2 - 2\,\frac{4f_n + F_{2n}}{4f_n}\,k + 1 = 0$$

woraus folgt:

$$k = \frac{1}{4f_n}\left[4f_n + F_{2n} \pm \sqrt{F_{2n}^2 + 8 f_n F_n}\right] \qquad 10)$$

Dieser Ausdruck lässt sich in mehrfacher Art umformen, wir benutzen jedoch nur jenen, wobei wir den Wurzelausdruck nach dem binomischen Satze entwickeln und erhalten:

$$k = \frac{1}{4f_n}\left[4f_n + F_{2n} \pm (F_n + 4f_n - 8F_{2n}^{-1}f_n^2 + 32F_{2n}^{-2}f_n^3 - 160F_{2n}^{-3}f_n^4 + \ldots)\right]$$

Nehmen wir das Zeichen $+$ vor der runden Klammer, so erhalten wir als ersten Wert des Teilfactors:

$$k_1 = 2 + \tfrac{1}{2}\frac{F_{2n}}{f_n} - 2\left(\frac{f_n}{F_{2n}}\right) + 8\left(\frac{f_n}{F_{2n}}\right)^2 - 40\left(\frac{f_n}{F_{2n}}\right)^3 \ldots \qquad 11)$$

während für das untere Zeichen — der zweite Wert des Teilfactors die Form annimmt:

$$k_2 = 2\frac{f_n}{F_{2n}} - 8\left(\frac{f_n}{F_{2n}}\right)^2 + 40\left(\frac{f_u}{F_{2n}}\right)^3 - \ldots \qquad 12)$$

Nachdem $3 < k > 2$ sein muss, so ist ersichtlich, dass nur k_1 den Wert des Teilfactors darstellen kann, also das Vorzeichen $+$ Giltigkeit hat, während $-$ nicht zu berücksichtigen ist.

Aus der vierten Proportion von 5) resultiert:

$$F_n = (k-1)f_{2n} \qquad 13)$$

woraus der Teilfactor wird:

$$k = 1 + \frac{F_n}{f_{2n}} \ldots \qquad 14)$$

Aus der fünften der Proportionen in der Gleichung 5) folgt sofort:

$$F_{2n} = \frac{2(k-1)}{k} f_{2n}$$

was weiter giebt:

$$k = \frac{2f_{2n}}{2f_{2n} - F_{2n}} \qquad 15)$$

welche Gleichung mit jenen im vorhergehenden Abschnitte für die Peripherien gegebenen 6), 12) und 19) bedeutende Aehnlichkeit besitzt und speciell aus der Gleichung für 19) sich sofort ergiebt, wenn man f_{2n} statt u_{2n} und F_{2n} statt U_{2n} setzt.

Die letzte des wiederholt genannten Proportions-Systems giebt:

$$\left.\begin{aligned} F_n &= \frac{k}{2}F_{2n} \\ \text{resp.}\qquad k &= \frac{F_n}{F_{2n}} \end{aligned}\right\} \qquad 16)$$

Die Proportionen in 5) gestatten durch eine entsprechende Verbindung eine Reihe neuer Formeln zu bilden. Vor allem können wir eine jede Fläche einfach durch alle andern ausdrücken und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{k-1} f_{2n} \\ &= \frac{1}{(k-1)^2} F_n \\ &= \frac{k}{2(k-1)^2} F_{2n} \end{aligned}\right\} \qquad 17)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{2n} &= (k-1) f_u \\ &= \frac{1}{(k-1)} F_n \\ &= \frac{1}{2(k-1)} F_{2n} \end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

$$\left.\begin{aligned} F_n &= (k-1)^2 f_n \\ &= (k-1) f_{2n} \\ &= \frac{k}{2} F_{2n} \end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

und schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} F_{2n} &= \frac{2(k-1)^2}{k} f_n \\ &= \frac{2(k-1)}{k} f_{2n} \\ &= \frac{2}{k} F_n \end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

Dividiren wir die genannten Proportionen, und behalten die im vorhergehenden gebrauchten, symbolischen Bezeichnungen, so erhalten wir nachstehende Relationen:

$$\left.\begin{array}{lll} R_{\frac{1}{2}},\ R_{\frac{5}{6}} & & F_n = (k-1) f_{2n} \\ R_{\frac{1}{3}} & & F_{2n} = \frac{2(k-1)}{k} f_{2n} \\ R_{\frac{1}{4}} & & f_{2n}^2 = f_n F_n \\ R_{\frac{1}{5}} & & f_{2n}^2 = \frac{k}{2} f_n F_{2n} \\ R_{\frac{1}{6}},\ R_{\frac{2}{8}} & & \frac{f_{2n} F_n}{f_n F_{2n}} = \frac{k(k-1)}{2} \\ R_{\frac{2}{3}},\ R_{\frac{4}{5}} & & F_{2n} = \frac{2}{k} F_n \\ R_{\frac{2}{4}},\ R_{\frac{3}{8}} & & f_{2n} = (k-1) f_n \\ R_{\frac{2}{6}} & & \frac{F_n^2}{f_n F_{2n}} = \frac{k(k-1)}{2} \end{array}\right\} \qquad 21)$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
R_{\frac{3}{4}} & \dfrac{f_n F_n}{f_{2n} F_{2n}} = \dfrac{k}{2(k-1)} \\[2ex]
R_{\frac{3}{1}} & F_n = (k-1)^2 f_n \\[2ex]
R_{\frac{4}{6}} & \dfrac{f_{2n} F_{2n}}{F_n^2} = \dfrac{k(k-1)}{2}
\end{array}
\right\} \qquad 21)
$$

Aus diesen Relationen ergeben sich interessante andere und zwar:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\dfrac{F_n}{f_n} \left(\dfrac{f_{2n}}{F_{2n}}\right)^2 = \left(\dfrac{k}{2}\right)^2 \\[2ex]
\dfrac{f_n}{F_{2n}} \left(\dfrac{F_n}{f_{2n}}\right)^2 = \dfrac{k}{2} \\[2ex]
\dfrac{F_n^2}{f_n f_{2n}} & = (k-1)^3 \\[2ex]
\dfrac{F_n f_{2n}}{f_n^2} & = (k-1)^2
\end{array}
\right\} \qquad 22)
$$

V.

Bezeichnet, wie eingangs hervorgehoben wurde, ϱ den Radius eines Kreises, der dem Polygone mit der Seite s umbeschrieben und einen von derselben Seitenanzahl und der Seite S eingeschrieben, hingegen r den Radius des dem ersteren Polygone eingeschriebenen und R den Radius des dem zweiten Polygone umschriebenen Kreises und analog die weiteren Symbole, so bestehen die Relationen, welche sich aus der Figur sofort ergeben:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
r_n & = \varrho \cos \dfrac{180}{n} = \dfrac{\varrho}{k-1} \\[2ex]
r_{2n} & = \varrho \cos \dfrac{180}{2n} = \dfrac{\varrho}{k_{2n}-1} \\[2ex]
r_{2^2 n} & = \varrho \cos \dfrac{180}{2^2 n} = \dfrac{\varrho}{k_{2^2 n}-1} \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
r_{2^m n} & = \varrho \cos \dfrac{180}{2^m n} \quad \dfrac{\varrho}{k_{2^m n}-1}
\end{array}
\right\} \qquad 1)
$$

weiter

$$\left.\begin{aligned}
R_n &= \frac{\varrho}{\cos\frac{180}{n}} = (k-1)\varrho \\
R_{2n} &= \frac{\varrho}{\cos\frac{180}{2n}} = (k_{2n}-1)\varrho \\
R_{2^2 n} &= \frac{\varrho}{\cos\frac{180}{2^2 n}} = (k_{2^2 n}-1)\varrho \\
&\;\;\vdots \\
R_{2^m n} &= \frac{\varrho}{\cos\frac{180}{2^m n}} = (k_{2^m n}-1)\varrho
\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Durch Multiplication resp. Division der vorstehenden Gleichungen folgt sofort:

$$r_n R_n = r_{2n} R_{2n} = r_{4n} R_{4n} = \ldots \varrho^2$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\frac{R_n}{r_n} &= \cos^2\frac{180}{n} = \frac{1}{(k-1)^2} \\
\frac{r_{2n}}{R_{2n}} &= \cos^2\frac{180}{2n} = \frac{(k_{2n}-1)^2}{1} \\
\frac{R_{2^2 n}}{r_{2^2 n}} &= \cos^2\frac{180}{2^2 n} = \frac{1}{(k_{2^2 n}-1)^2} \\
&\;\;\vdots \\
\frac{r_{2^m n}}{R_{2^m n}} &= \cos^2\frac{180}{2^m n} = \frac{1}{(k^{2m}{}_n-1)^2}
\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Die goniometrische Beziehung

$$\cos\frac{180}{n} = 2\cos^2\frac{180}{2n} - 1$$

führt nach Substitution der Werte aus Gleichung 3) sofort auf die Gleichung:

$$\pm\sqrt{\frac{r_n}{R_n}} = 2\,\frac{r_{2n}}{R_{2n}} - 1$$

oder

$$\frac{r_{2n}}{R_{2n}} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{r_n}{R_n}}\right)$$

und mit Ausdehnung auf die folgenden Polygone:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{r_{4n}}{R_{4n}} &= \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{r_{2n}}{R_{2n}}}\right) \\
\frac{r_{2^3n}}{R_{2^3n}} &= \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{r_{2^2n}}{R_{2^2n}}}\right) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\frac{r_{2^mn}}{R_{2^mn}} &= \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{r_{2^{m-1}n}}{R_{2^{m-1}n}}}\right)
\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Aus diesen Gleichungen werden unschwer nachstehende, allgemeine Relationen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
r_{2^mn} &= \frac{1}{2}\,\frac{R^{\frac{1}{2}}_{2^{m-1}n} + r_{2^{m-1}n}}{R^{\frac{1}{2}}_{2^{m-1}n}}\,R_{2^mn} \\
R_{2^mn} &= 2\,\frac{R^{\frac{1}{2}}_{2^{m-1}n}}{R^{\frac{1}{2}}_{2^{m-1}n} + r_{2^{m-1}n}}\,r_{2^mn}
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Bilden wir nun Summe und Differenz der Radien r und R und dividiren selbe durcheinander, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{R_n + r_n}{R_n - r_n} &= \frac{1}{2\cos^2\frac{180}{2n}} = \frac{1}{2}(k_{2n} - 1)^2 \\
\frac{R_{2n} + r_{2n}}{R_{2n} - r_{2n}} &= \frac{1}{2\cos^2\frac{180}{2^2n}} = \frac{1}{2}(k_{2^2n} - 1)^2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\frac{R_{2^mn} + r_{2^mn}}{R_{2^mn} - r_{2^mn}} &= \frac{1}{2\cos^2\frac{180}{2^{m+1}n}} = \frac{1}{2}(k_{2^{m+1}n} - 1)^2
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

aus welchen Gleichungen die Teilfactoren sich ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
k_{2n} &= 1 \pm \sqrt{2\frac{R_n + r_n}{R_n - r_n}} \\
k_{2^2 n} &= 1 \pm \sqrt{2\frac{R_{2n} + r_{2n}}{R_{2n} - r_{2n}}} \\
&\vdots \\
k_{2^m n} &= 1 \pm \sqrt{2\frac{R_{2^{m-1}n} + r_{2^{m-1}n}}{R_{2^{m-1}n} - r_{2^{m-1}n}}} \\
k_{2^{m+1}n} &= 1 \pm \sqrt{2\frac{R_{2^m n} + r_{2^m n}}{R_{2^m n} - r_{2^m n}}}
\end{aligned}\right\}$$

Der zweite Summand rechter Hand des vorstehenden Gleichun systems muss mit dem Vorzeichen plus genommen werden, falls Teilfactoren reellen Polygonen zufallen sollen.

Für die Cosinus der Centriwinkel erhalten wir die Ausdrüc

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\frac{180}{2n} &= \frac{R_n - r_n}{2(R_n + r_n)} \\
\cos^2\frac{180}{2^2 n} &= \frac{R_{2n} - r_{2n}}{2(R_{2n} + r_{2n})} \\
&\vdots \\
\cos^2\frac{180}{2^m n} &= \frac{R_{2^{m-1}n} - r_{2^{m-1}u}}{2(R_{3^{m-1}n} + r_{2^{m-1}n})}
\end{aligned}\right\}$$

und weiters:

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2\frac{180}{2^m n} &= \frac{R_{2^{m-1}n} + 3r_{2^{m-1}n}}{2(R_{2^{m-1}n} + r_{2^{m-1}n})} \\
\mathrm{tg}^2\frac{180}{2^m n} &= \frac{R_{2^{m-1}n} + 3r_{2^{m-1}n}}{R_{2^{m-1}n} - r_{2^{m-1}n}}
\end{aligned}\right\}$$

VI.

Nach den Gleichungen 7) und 36) des I. Abschnittes bes die Identität:

$$s_{2^2 n} = \frac{2\sqrt{k_{2^2 n}(k_{2^2 n} - 2)}}{k_{2^2 n} - 1}\,\varrho = \frac{\sqrt{(k-2)(9k-10)}}{4(k-1)}\,\varrho$$

woraus sich, nach $k_2{}^2{}_n$ geordnet, eine gemischt quadratische Gleichung ergiebt, nämlich:

$$k_2{}^2{}_n{}^2 - 2k_2{}^2{}_n = \frac{(k-2)(9k-10)}{55k^2 - 100k + 44}$$

welche aufgelöst für den Teilfactor den Ausdruck giebt:

$$k_2{}^2{}_n = 1 \pm \frac{8(k-1)}{\sqrt{55k^2 - 100k + 44}}. \qquad 2)$$

Nachdem die Teilfactoren der regulären, dem Kreise eingeschriebenen Polygone 2 als Minimum und 3 als Maximum besitzen, so kann nur das obere Zeichen gelten, somit:

$$k_2{}^2{}_n = 1 + \frac{8(k-1)}{\sqrt{55k^2 - 100k + 44}}$$

Den zweiten Summanden wollen wir in eine Reihe entwickeln; zu dem Ende setzen wir:

$$\frac{(k-1)^2}{55k^2 - 100k + 44} = (a + bk + ck^2 + \ldots)^2$$
$$= a^2 + 2abk + (2ac + b^2)k^2 + \ldots \qquad 3)$$

Hieraus ergiebt sich nach Ausführung der Multiplication rechter Hand und Berücksichtigung jener Glieder, welche noch das Quadrat des Teilfactors k^2 enthalten, die Gleichung:

$$k^2 - 2k + 1 = 44a^2 + 4a(22b - 25a)k$$
$$+ [55a^2 - 200ab + 44(a^2 + 2ac)]k^2 + \ldots \qquad 4)$$

aus welcher nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten folgen zur Bestimmung der nach unbestimmten Grössen a, b, c die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 44a^2 &= 1 \\ 4a(22b - 25a) &= -1 \\ 55a^2 - 200ab + 44(b^2 + 2ac) &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Die Coefficienten selbst ergeben sich in den folgenden Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{2 \cdot 11}\sqrt{11} \\ b &= \frac{-1 + 50a^2}{2^2 \cdot 11 \cdot a} = \frac{3}{2^2 \cdot 11^2}\sqrt{11} \\ c &= \frac{1 + 200ab - 55a^2 - 44b^2}{2^3 \cdot 11a} = \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3}\sqrt{11} \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Indem wir die soeben gewonnenen Werte der Coefficienten verwerten, so erscheint der Teilfactor in der Form:

$$k_{2^2 n} = 1 + (a + bk + ck^2 + \ldots)$$

$$= 1 + 8\sqrt{11}\left[\frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^2 \cdot 11^2}k + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3}k^2 + \ldots\right] \qquad 7)$$

Die Reihe in der eckigen Klammer convergirt wol nicht sehr stark, sie nähert sich aber einer Grenze, welche wir annähernd zu bestimmen im Stande sind. In beigegebener Tabelle sind die Teilfactoren der aufeinander folgenden Polygone berechnet, dieselben können für ein bestimmtes, gegebenes n hieraus entnommen und in Gleichung 7) substituirt werden. Die Summe der in der eckigen Klammer stehenden Reihe ergiebt sich dann einfach.

Wählen wir z. B. ein eingeschriebenes, regelmässiges Dreieck $n = 3$, so ist nach der Tafel $k = 3$ und der Teilfactor für das

$$2^2 \cdot n = 12\text{-Eck}$$

ist hieraus entnommen 2 · 04030. Führen wir nun diese speciellen Werte in die obige Gleichung ein, so erhalten wir:

$$2 \cdot 04030 = 1 + 8\sqrt{11}\left[\frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^2 \cdot 11^2}3 + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3}3^2 + \ldots\right] \qquad 8)$$

somit für die Reihe

$$\frac{2}{1 \cdot} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 11^2} + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3}3^3 + \ldots = \frac{1 \cdot 04030}{8 \cdot \sqrt{11}} \qquad 9)$$

Die allgemeine Form derselben ist:

$$\frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^2 \cdot 11^3}k + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3}k^2 + \ldots = \frac{k_{2^2 n} - 1}{8 \cdot 11}\sqrt{11} \qquad 10)$$

Die Gleichung lehrt uns, wie wir einen Teilfactor durch den zweit vorhergehenden auszudrücken vermögen, wir erhalten:

$$k_{2^3 n} = 1 + 8\sqrt{11}\left[\frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^2 \cdot 11^2}k_{2n} + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3}k_{2n}^2 + \ldots\right] \qquad 11)$$

$$\left.\begin{aligned} k_2{}^4{}_n &= 1 + 8\sqrt{11}\left[\frac{1}{2\,.\,11} + \frac{3}{2^3\,.\,11^3}k_2{}^2{}_n + \frac{5\,.\,17}{2^3\,.\,11^3}k_2{}^2{}_n{}^2 \right. \\ &\qquad \left. + \ldots\right] \\ &\;\;\vdots \\ k_2{}^m{}_n &= 1 + 8\sqrt{11}\left[\frac{1}{2\,.\,11} + \frac{3}{2^3\,.\,11^3}k_2{}^{m-2}{}_n \right. \\ &\qquad \left. + \frac{5\,.\,17}{2^3\,.\,11^3}k_2{}^{m-x}{}_n{}^2 + \ldots\right] \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Gleichungen, aus welchen sich die rechts stehenden Reihen ohne Schwierigkeit ermitteln lassen.

Anmerkung.

Für den Teilfactor haben wir erhalten:

$$k_2{}^2{}_n = 1 + \frac{8(k-1)}{\sqrt{55k^2 - 100k + 44}}$$

Gesetzt, $2^2{}_n$ sei unendlich gross, somit $k_2{}^n{}_n$ der Teilfactor eines Polygons mit unendlich vielen Seiten, so ist derselbe

$$k_2{}^2{}_n = 2$$

In diesem Falle muss der zweite Summand vorstehender Gleichung der Einheit gleich sein, also

$$\frac{8(k-1)}{\sqrt{55k^2 - 100k + 44}} = 1$$

und hieraus folgt:

$$k^2 - \frac{28}{9}k + 20 = 0$$

und

$$k = \frac{14 \pm 4}{9}$$

Das obere Zeichen liefert $k = 2$, eine Auflösung, welche zu erwarten war während das untere Zeichen zu einem negativen Werte von k führt, der kleiner als 2 ist und somit keinem dem Kreise eingeschriebenen Polygone entspricht.

Die im vorhergehenden durchgeführten Untersuchungen für den Teilfactor k_n^m dehnen wir auf den allgemeinen Fall aus, wobei wir die Beziehung zwischen den Teilfactoren $k_2{}^m{}_n$ und k_n resp. k aufstellen werden. Dieselbe wird sich ergeben durch Gleichstellung der Gleichungen 7) und 46) im I. Abschnitte:

$$s_2{}^m{}_n = \frac{2\sqrt{k_2{}^m{}_n(k_2{}^m{}_n - 2)}}{k_2{}^m{}_n - 1}\,\varrho$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{k-2}{3}\left[2^{2(m-1)}(7k-8) - (k-2)\right]}}{2^{2(m-1)}(k-1)}\,\varrho \qquad 12)$$

woraus sich die quadratische Gleichung:

$$13)$$

$$k_2{}^m{}_n{}^2 - 2k_2{}^m{}_n = \frac{(k-2)[2^{2(m-1)}(7k-8)-(k-2)]}{3\,.\,2^{2(2m-1)}(k-1)^2-(k-2)[2^{2(m-1)}(7k-8)-(k-2)]}$$

zur Bestimmung von $k_2{}^m{}_n$ ergiebt.

Der Teilfactor selbst wird sein:

$$14)$$

$$k_2{}^m{}_n = 1 \pm \frac{\sqrt{3}\;2^{2m-1}(k-1)}{\sqrt{[3\,.\,2^{2(2m-1)}-7\,.\,2^{2(m-1)}+1]k^2-2^2[3\,.\,2^{2m-3}-11\,.\,2^{2m-3}+1]k+2^2[3\,.\,2^{4(m-1)}-1\,.\,2^{2m}+1]}}$$

oder auch in der Form

$$15)$$

$$k_2{}^m{}_n = 1 + \frac{2^{2m-1}(k-1)\sqrt{3}}{\sqrt{[3\,.\,2^{4m}-7\,.\,2^{2m}+2^2]k^2-2[3\,.\,2^{4m}-11\,.\,2^{2m}+2^3]k+[3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4]}}$$

wobei wir aus bekannten Gründen bloss das obere Zeichen beibehalten haben.

Den mit dem Factor $2^{2m-1}\sqrt{3}$ verbundenen Ausdruck der rechten Seite der obigen Gleichung kann man in eine Reihe entwickeln, indem wir setzen:

$$\frac{k^2-2k+1}{[3.2^{4m}-7.2^{2m}+2^2]k^2-2]3\,.2^{4m}-11\,.\,2^{2m}+3^2]2^3+[3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2]} = [a+bk+ek^2+\ .\ .\ .\ ]^2 \qquad 16)$$

Führen wir die nötigen Operationen in dieser Gleichung aus, so erhalten wir:

$$17)$$

$$k^2-2k+1 = \left.\begin{aligned}&[3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4]a^2+[-2(3\,.\,2^{4m}-11\,.\,2^{2m}+2^3)\\ &+2(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)ab]k\end{aligned}\right\}$$

$$k^2-2k+1=\left\{\begin{aligned}&+[3\,.\,2^{4m}-7\,.\,2^{2m}+2^2)a^2-2^2(3\,.\,2^{4m}-11.(2^{2m}+2^3)ab\\&\qquad+(3\,.\,2^{4m}-2^{2n+4}+2^4)(b^2+2ac)]k^2\\&+[2(3\,.\,2^{4m}-7\,.\,2^{2m}+2^2)a^2b-2(3\,.\,2^{4m}-11\,.\,2^{2m}+2^3)\\&\qquad(b^2+2ac)+2(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)(ad+bc)]k^3\\&+[3\,.\,2^{4m}-7\,.\,2^{2m}+2^2)(b^2+2ab)-2^2(3\,.\,2^{4m}\\&\qquad-11\,.\,2^{2m}+2^3)(ad+bc)+(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)\\&\qquad(c^2+2ac+2bd]k^4\\&+[2(3\,.\,2^{4m}-7\,.\,2^{2m}+2^2)(ad+bc)-2(3\,.\,2^{4m}\\&\qquad-11\,.\,2^{2m}+2^3)(c^2+2ae+2bd\\&\qquad+(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)(af+cd+be)]k^5+\ldots\end{aligned}\right. \qquad 17)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten die Bestimmungsgleichungen aufstellen zur Ermittlung der Coefficienten a, b, c, . . . Zur Berechnung der drei Constanten a, b und c dienen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)a^2=1\\-2(3\,.\,2^{4m}-11\,.\,2^{2m}+2^3)+2(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)ab&=-2\\(3\,.\,2^{4m}-7\,.\,2^{2m}+2^2)a^2-2^2(3\,.\,2^{4m}-11\,.\,2^{2m}+2^3)ab&\\+(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)(b^2+2ac)&=1)\end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

und die Coefficienten selbst werden sein:

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{1}{(3\,.\,2^{4m}-2^{m+4}+2^4)^{1/2}}\\b&=\frac{2^{2m+4}-11\,.\,2^{2m}-2^3}{(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)_{2+\frac{1}{2}}}\\c&=\frac{3\,.\,11\,.\,2^{6m}-7\,.\,23\,.\,2^{4m}+2^{2m+8}-2^7}{(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)^{5/2}}\end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

Der Teilfactor erscheint nach Substitution dieser Werte in Gleichung 16) in der Form:

$$\begin{aligned}k_{2^m,n}=1&+\frac{2^{2m}\sqrt{3}}{(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)^{1/2}}\\&+\frac{2^{2m}(2^{2m+4}-11\,.\,2^{2m}-2^3)\sqrt{3}}{(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}-2^4)}k\\&+\frac{2^{2m}(3\,.\,11\,.\,2^{6m}-7\,.\,23\,.\,2^{4m}+2^{2m+2}-2^7)\sqrt{3}}{(3\,.\,2^{4m}-2^{2m+4}+2^4)^{5/2}}k^2\\&+\ldots\end{aligned} \qquad 20)$$

Diese Reihe geht in jene 11) über, wenn man darin $m = 2$ substituirt.

Setzen wir $m = 3$, so folgt:

$$k_2{}^3{}_n = 1 + \frac{2^4}{5 \cdot 47}\sqrt{5 \cdot 47} + \frac{2^3 \cdot 13}{5^2 \cdot 47^2}\sqrt{5 \cdot 47}\, k + \frac{3 \cdot 7 \cdot 331}{2^4 \cdot 5^3 \cdot 47^3}\sqrt{5 \cdot 47}\, k^2 + \ldots \qquad 21)$$

und weiter durch Specialisirung des Wertes m ergiebt sich eine Reihe von Formeln, in welchen überall der Teilfactor der linken Seite der Gleichung rechts durch den dritt-vorhergehenden ausgedrückt erscheint.

Auch lässt sich in rascher Weise die Summirung einer Gruppe von Reihen durchführen; es ist nämlich:

$$\frac{k_2{}^m{}_n - 1}{5 \cdot 47} = \frac{2^4}{5 \cdot 47} + \frac{2^3 \cdot 13}{5^2 \cdot 47^2} k_2{}^{m-3}{}_n + \frac{3 \cdot 7 \cdot 331}{2^4 \cdot 5^3 \cdot 47^3} k_2{}^{2m-3}{}_n{}^2 + \ldots$$

woraus für besondere Fälle von m und n eine reiche Fülle von Reihen sich ergiebt.

Wird der Exponent $m = 4$, so erhalten wir die Teilfactoren durch die viert-vorhergehenden ausgedrückt, es wird dann:

$$k_2{}^4{}_n = 1 + \frac{2^6}{5 \cdot 47}\sqrt{5 \cdot 47} + \frac{2^8 \cdot 19}{3 \cdot 5^2 \cdot 47^2}\sqrt{5 \cdot 47}\, k + \frac{2^{12} \cdot 7 \cdot 37}{3^2 \cdot 5^3 \cdot 47^3}\sqrt{5 \cdot 47}\, k^2 + \ldots \qquad 22)$$

oder allgemein:

$$k_2{}^m{}_n = 1 + \frac{2^6}{5 \cdot 47}\sqrt{5 \cdot 47} + \frac{2^8 \cdot 19}{3 \cdot 5^2 \cdot 47^2}\sqrt{5 \cdot 47}\, k_2{}^{m-4}{}_n + \frac{2^{12} \cdot 7 \cdot 37}{3^2 \cdot 5^3 \cdot 47^3}\sqrt{5 \cdot 47}\, k_2{}^{m-4}{}_n{}^2 + \ldots \qquad 23)$$

Hieraus lässt sich wieder die Summe neuer Reihen ermitteln.

So könnte man in der Specialisirung des Exponenten m for[illegible] schreiten und zu neuen Ausdrücken gelangen.

Anmerkung. Auch hier gilt für den Teilfactor $k_3{}^m{}_n$ ei[illegible] ähnliche Bemerkung, wie dieselbe für $k_2{}^2{}_n$ angegeben haben. Nac[illegible] dem für

$$2^m{}_n = \infty, \quad k_2{}^m{}_n = 2$$

so muss die Relation bestehen:

$$\frac{2^{2m}(k-1)\sqrt{3}}{\sqrt{(3 \,.\, 2^{4m} - 7 \,.\, 2^{2m} + 2^2)k^2 - 2(3 \,.\, 2^{2m} - 11 \,.\, 2^{2m} + 2^3)k + (3 \,.\, 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4)}} = 1$$

woraus die quadratische Gleichung sich ergiebt:

$$k^2 - 2\,\frac{7 \,.\, 2^{2m} - 2^2}{11 \,.\, 2^{2m} - 2^3}\,k = \frac{7 \,.\, 2^{2m} - 2^2}{2^4 - 2^{2m+4}}$$

welche zur Wurzel hat

$$k = \frac{11 \,.\, 2^{2m} - 2^3 \pm 3 \,.\, 2^{2m}}{7 \,.\, 2^{2m} - 2}$$

Nachdem nur das untere Zeichen einem realen Werte des Teilfactors zukommen kann, so erhalten wir bei Verwendung desselben für den Teilfactor

$$k = \frac{14 \,.\, 2^{2m} - 2^3}{7 \,.\, 2^{2m} - 2^2} = 2$$

einen Wert, den wir erwarten konnten.

In den vorhergehenden Untersuchungen haben wir die Teilfactoren durch die vorhergehenden auszudrücken vermocht, was dadurch möglich wurde, weil $k_{2^m n}$ als Function des Teilfactors k erscheint, desjenigen nämlich, welcher die Grundlage bildete, und weil weiters durch die Substitution von

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

ein ganzes Polygonsystem gewonnen wurde, dessen Seitenzahl $2n$, $2^2{}_n$, $2^3{}_n$, . . . $2^m{}_n$ war.

Es dürfte sicherlich nicht ohne Interesse sein, umgekehrt k allgemein als Function von $k_{2^m n}$ auszudrücken.

Wir benutzen die Gleichung:

$$k_{2^m n} = 1 + \frac{2^{2m}(k-1)\sqrt{3}}{\sqrt{[\alpha]k^2 - 2[\beta]k + [\gamma]}} \qquad 24)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 3 \,.\, 2^{4m} - 7 \,.\, 2^{2m} + 2^2 \\ \beta &= 3 \,.\, 2^{4m} - 11 \,.\, 2^{2m} + 2^3 \\ \gamma &= 3 \,.\, 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4 \end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

als Abkürzungen eingeführt werden; setzen wir weiter der Kürze und Uebersicht wegen

$$a^2 = \left(\frac{k_2{}^m{}_n - 1}{2^{2m}\sqrt{3}}\right)$$

so erhalten wir:

$$k^2 - 2\frac{1-\beta a^2}{1-\alpha a^2}k + 1 - \gamma a^2 = 0 \qquad 26)$$

zur Bestimmung von k. Dieses selbst ist hieraus:

$$k = \frac{(1-\beta a^2) \pm \sqrt{(1-\beta a^2)^2 + (\gamma a^2 - 1)(1-\alpha a^2)}}{1-\alpha a^2} \qquad 27)$$

was auch gesetzt werden kann:

$$k = \frac{1 - \beta a \pm \sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma)a + (\alpha + \gamma - 2\beta)}}{1 - \alpha a} \qquad 28)$$

Dieser Ausdruck gestattet eine bedeutende Vereinfachung; denn es ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \gamma - 2\beta &= -1 \,.\, 2^2(2^{2(m-1)}+1) \\ \beta^2 - \alpha\gamma &= 3 \,.\, 2^{4m}(2^{2m}+1) \end{aligned}\right\}$$

wobei die Klammerausdrücke beidermal eine ungerade Zahl darstellen.

Substituiren wir diese Werte für die angeführten Abkürzungen in die Gleichung für k, so ergiebt sich nach einfacher Transformation:

$$k = \frac{3 \,.\, 2^{4m} - (3 \,.\, 2^{4m} - 11 \,.\, 2^{2m} + 2^3)(k_2{}^m{}_n - 1)^2 \pm (k_3{}^m{}_n - 1) \times \sqrt{(2^{2m}+1)(k_2{}^m{}_n - 1)^2 - 2^2(1 + 2^{2(m-1)})}}{3 \,.\, 2^{4m} - (3 \,.\, 2^{4m} - 7 \,.\, 2^{2m} + 2^2)(k_2{}^m{}_n - 1)^2} \qquad 29)$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass dem Teilfactor k

a) zwei reelle von einander verschiedene

b) zwei zusammenfallende gleiche oder aber auch

c) zwei imaginäre Werte zukommen können.

Betrachten wir vorerst den Fall b); hiebei wird

$$k = \frac{3 \,.\, 2^{4m} - [3 \,.\, 2^{4m} - 11 \,.\, 2^{2m} + 2^3](2^m{}_n - 1)^{2}}{3 \,.\, 2^{4m} - [3 \,.\, 2^{4m} - 7 \,.\, 2^{2m} + 2^2](k_2{}^m{}_n - 1)^2} \qquad 30)$$

was dann eintreten würde, wenn der Ausdruck

$$(k_2{}^m{}_n - 1)\sqrt{(2^{2m}+1)(k_2{}^m{}_n - 1)^2 - 2^2(1 + 2^{2(m-1)})} = 0$$

wird. Dies würde zweimal der Fall sein können und zwar, wenn

$$\left.\begin{array}{l} k_{2^m n} - 1 = 0 \\ \text{resp.} \quad (2^{2m} + 1)(k_{2^m n} - 1)^2 = 2^2(1 + 2^{2(m-1)}) \end{array}\right\} \qquad 31)$$

wäre. Das erste ist ausgeschlossen, weil

$$k_{2^m n} = 1$$

nicht sein kann, da strenge bewiesen wurde, dass k innerhalb den Grenzen 2 und 3 sich bewege.

Die zweite Bedingung, wobei

$$(k_{2^m n} - 1)^2 = \frac{2^2(1 + 2^{2(m-1)})}{2^{2m} + 1} \qquad 32)$$

ist, hat eine Berechtigung.

Dieser Fall wird sich ereignen, wenn

$$k_{2^m n} = 1 \pm 2\sqrt{\frac{1 + 2^{2(m-1)}}{1 + 2^{2m}}} \qquad 33)$$

wird, was in speciellen Fällen liefert und zwar für

$$\left.\begin{array}{ll} m = 1 & k_{2n} = 1 \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}} \\ m = 2 & k_{2^2 n} = 1 \pm 2\sqrt{\frac{5}{17}} \\ m = 3 & k_{2^3 n} = 1 \pm 2\sqrt{\frac{17}{63}} \\ m = 4 & k_{2^4 n} = 1 \pm 2\sqrt{\frac{65}{129}} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}\right\} \qquad 34)$$

Selbstredend können aus bekannten Gründen in diesen Formeln bloss die oberen Zeichen Giltigkeit haben.

Die soeben ausgesprochene Berechtigung der Werte für $k_{2^m n}$ aus Formel 32) hätte volle Giltigkeit, wenn nach Substitution von $k_{2^m n} - 1)$ in die Gleichung 30) für k mögliche Werte resultieren würden. Nach Ausführung der Substitution folgt:

$$k = \frac{2^{4m} + 18 \, . \, 2^{2m} - 2^4}{-2_4{}^m + 12 \, . \, 2^{2m} - 2^3} \qquad 35)$$

Für besondere Werte von m erhält man und zwar:

$$\left.\begin{array}{ll} m = 1 & k = \dfrac{2^4 + 18 \,.\, 2^2 - 2^4}{-2^4 + 12 \,.\, 2^2 - 2^3} = 3 \\ m = 2, 3, 4 \ldots & \text{wird } k = -7\frac{1}{3} \quad -1\frac{70}{189} \\ & \qquad\qquad -1\frac{303}{2599} \end{array}\right\} \quad 36)$$

Wie wir sehen, könnte nur der Wert des Teilfactors für $m = 1$ zu einem reellen Resultate führen. Nachdem in diesem Falle $k = 3$ ist, so müsste $n = 3$ sein, also das Polygon ein Dreieck darstellen; da $m = 1$ ist, so wäre

$$k_{2^m n} = k_6$$

also der Teilfactor für ein Sechseck. Dieser ist aus der Tabelle

$$k_6 = 2 \cdot 14\,470$$

welcher Wert identisch sein müsste mit jenem, den wir aus Gleichung 34) erhalten, nämlich

$$k_6 = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 63\,294$$

Nachdem auch diese einzige Möglichkeit sich nicht bestätigt, so können wir sagen:

Der Teilfactor k kann nicht nach Gleichung 30) bestimmt werden, weil die gleichzeitig zu erfüllende Bedingung, welche in Gleichung 32) ihren Ausdruck findet, nicht erfüllt werden kann und ihre Verwendung zu negativen Teilfactoren führt, die nicht bestehen können.

Wir wollen hier die aus Gleichung 30) sich ergebenden Werte von k anführen, die sich nach Einführung specieller Werte von m ergeben, falls man die Bedingungsgleichung unberücksichtigt lässt.

Es wird für

$$\left.\begin{array}{ll} m = 1 & k = \dfrac{2^2 - (k_{2n} - 1)^2}{2^2 - 2(k_{2n} - 1)^2} \\ m = 2 & k = \dfrac{2^6 - 2 \,.\, 5^2 (k_{2^2 n} - 1)^2}{2^6 - 5 \,.\, 11 (k_{2^2 n} - 1)^2} \\ m = 3 & k = \dfrac{2^{10} - 2 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 23 (k_{2^3 n} - 1)^2}{2^{10} - 3 \,.\, 7 \,.\, 47 (k_{2^3 n} - 1)^2} \\ m = 4 & k = \dfrac{2^{14} - 2 \,.\, 5 \,.\, 79 (k_{2^4 n} - 1)^2}{2^{14} - 5 \,.\, 17 \,.\, 121 (k_{2^4 n} - 1)^2} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}\right\} \quad 37)$$

Der Fall c), wobei imaginäre Werte sich ergeben würden, betrachten wir nicht näher, wollen jedoch auf den Fall a) etwas eingehen und denselben für verschiedene Werte von m ausnutzen.

Setzen wir

$$\left.\begin{array}{l}
m = 1, \text{ so wird} \\[4pt]
k = \dfrac{3 \,.\, 2^4 - 3 \,.\, 2^2(k_{2n}-1)^2 \pm (k_{2n}-1)\sqrt{5(k_{2n}-1)^2-8}}{3 \,.\, 2^4 - 3 \,.\, 2^3(k_{2n}-1)^2} \\[10pt]
m = 2, \text{ so wird} \\[4pt]
k = \dfrac{3 \,.\, 2^8 - 2^3 \,.\, 3 \,.\, 5^2(k_2{}^2{}_n-1)^2 \pm (k_1{}^2{}_n-1) \times \sqrt{17(k_2{}^2{}_n-1)^2-2^2 \,.\, 9}}{3 \,.\, 2^8 - 2^2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 1i(k_2{}^2{}_n-1)^2} \\[10pt]
m = 3, \text{ so wird} \\[4pt]
k = \dfrac{3 \,.\, 2^{12} - 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 7 \,.\, 23(k_2{}^3{}_n-1) \pm (k_2{}^3-1)\sqrt{65(k_2{}^{3n}-1)^2-4 \,.\, 17}}{3 \,.\, 2^{12} - 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 7 \,.\, 47(k_2{}^3{}_n-1)^2} \\[10pt]
m = 4, \text{ so wird} \\[4pt]
k = \dfrac{3 \,.\, 2^{16} - 2^3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 79(k_2{}^4{}_n-1)^2 \pm (k_2{}^4{}_n-1)\sqrt{257(k_2{}^4{}_n-1)^2-2^2 \,.\, 65}}{3 \,.\, 2^{16} - 2^2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 17 \,.\, 191(k_2{}^4{}_n-1)^2}
\end{array}\right\} \quad 38)$$

Hiermit beenden wir die in gewisser Richtung zum Abschlusse gebrachten Untersuchungen und behalten uns vor, in nächster Zeit noch weitere Folgerungen zu bringen.

Nachstehend geben wir eine Tabelle, in welcher für die Polygonzahl n der halbe Centriwinkel $\frac{\alpha}{2}$ sowie der zugehörige Teilfactor angegeben sind.

n	$\frac{\alpha}{2}$ °	′	k	n	$\frac{\alpha}{2}$ °	′	k	n	$\frac{\alpha}{2}$ °	′	k
3	60		3·00 000	50	3	36	2·00 198	360	0	30	2·00 004
4	45		2·41 421	54	3	20	2·00 169	400	0	27	2·00 003
5	36		2·23 607	60	3		2·00 137	432	0	25	2·00 0031
6	30		2·15 470	72	2	30	2·00 095	450	0	24	2·00 0026
8	25		2·10 338	75	2	24	2·00 088	540	0	20	. . . 24
9	20		2·06 418	80	2	15	2·00 077	600	0	18	. . . 17
10	18		2·05 146	90	2		2·00 061	675	0	16	. . . 14
12	16		2·04 030	100	1	48	2·00 049	720	0	15	. . . 11
15	12		2·02 234	108	1	40	2·00 042	900	0	12	. . . 09
16	11	15	2·01 959	120	1	30	2·00 034	1080	0	10	. . . 06
18	10		2·01 543	135	1	20	2·00 027	1200	0	9	. . . 04
20	9		2·01 546	144	1	15	2·00 024	1350	0	8	2·0000 037
24	7	30	2·00 863	150	1	12	2·00 022	1800	0	6	. . . 028
25	6	40	2·00 795	180	1	—	2·00 015	2160	0	5	. . . 016
27	6		2·00 681	200	0	54	2·00 012	2700	0	4	. . . 012
30	5		2·00 551	216	0	50	2·00 011	3600	0	3	. . . 007
36	4	30	2·00 382	225	0	48	2·00 010	5400	0	2	2·0000 002
40	4		2·00 309	240	0	45	2·00 009				
45	3	45	2·00 244	270	0	40	2·00 008				
48	3	36	2·00 215	300	0	36	2·00 006				

X.

Eine approximative Trisectio Anguli.

Von

C. F. E. Björling.

Hr. Capitän C. E. Unonius in Malmö hat mir die folgende Construction mitgeteilt.

Ein gegebener Winkel

$$COD\,(=2\alpha < 90^0,\ OC = OD = 1)$$

wird halbirt durch die Gerade OEK, die CD im Punkte E trifft Die zwei Kreise

(1) mit Centrum O, Halbmesser OC
(2) „ „ C, „ CE

schneiden sich im Punkte F (im Winkel COD). Man ziehe FH parallel mit OC. M ist Centrum eines Kreises mit dem Halbmesser CE, welcher FH und EK berührt (ausserhalb des Kreises (1)). Für den Winkel COM erhält man

$$\cot COM = \cot\alpha + \frac{4}{\sin^3\alpha}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{4}}\right)$$

Beisp. Für $2\alpha = 30^0$ wird $COM = 9^0\,59'\,55'', 1$
60^0 „ „ $19^0\,59'\,42'', 9$
80^0 „ „ $26^0\,40'\,14'', 7$

Beweis. Mit O als Anfangspunkt, OC als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems wird die Ordinate des Punkes F

$$R \sin \alpha, \quad \text{wo} \quad R = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{4}}$$

Die beiden Geraden

$$FH \ldots y = R \sin \alpha$$
$$OK \ldots y = x \operatorname{tg} \alpha$$

bestimmen einen Punkt P ($R \cos \alpha$, $R \sin \alpha$). Durch denselben zieh man die Bissectrise des Winkels HPK

$$y = R \sin \alpha = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (x - R \cos \alpha) \tag{3}$$

in derselben liegt das Centrum M. Seine Ordinate ist

$$= (1 + R) \sin \alpha$$

seine Abscisse also, laut (3)

$$= R \cos \alpha + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (1 + R) \cos \alpha + 1$$

Hieraus ergiebt sich der obengenannte Wert des Winkels COM.

Lund, Schweden, Oct. 1896.

XI.

Bemerkungen zu der ausnahmlosen Auflösung des Problems, eine quadratische Form durch eine lineare orthogonale Substitution in eine Summe von Quadraten zu verwandeln.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

In den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1868 (Werke Bd. I, S. 165) hat Kronecker eine kurze aber wichtige Notiz über die gleichzeitige Transformation zweier quadratischen Formen in Summen von Quadraten veröffentlicht, welche gegenüber den früheren Behandlungen desselben Themas zwei Neuerungen enthält. Erstens wird die gesuchte Transformation in mehreren Schritten hergestellt, bei deren jedem das Quadrat einer einzigen Variabeln erscheint, welche mit keiner der übrigen multiplicirt ist; zweitens werden nicht die Formen einzeln, sondern die durch sie definirte Formenschar betrachtet. Diese beiden Grundgedanken Kroneckers festhaltend löse ich in den folgenden Zeilen das Problem der Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades und das allgemeinere, eine quadratische Form durch eine orthogonale lineare Substitution in eine Summe von Quadraten überzuführen, nach einer Methode, welche keinerlei Ausnahmen erfordert und an Vorkenntnissen nur die elementarsten Determinantensätze voraussetzt.

I. Sind a und b reelle Grössen, welche nicht beide verschwinden, und ist c einer der Werte von $\sqrt{a^2+b^2}$, so ergibt sich aus den Gleichungen

$$y_1 = \frac{ax_1 - bx_2}{c}, \quad y_2 = \frac{bx_1 + ax_2}{c}$$

die Folgerung

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$$

im Gebiet von zwei Variabeln giebt es also orthogonale Substitutionen, in welchen die Coefficienten einer Gleichung, z. B. der ersten, sich wie zwei beliebig gegebene reelle Grössen verhalten, die nicht beide verschwinden.

II. Der analoge Satz sei für $n-1$ Variable bewiesen, d. h. es gebe eine reelle Substitution

$$y_\nu = c_{\nu 1} x_1 + c_{\nu 2} x_2 + \ldots + c_{\nu, n-1} x_{n-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n-1)$$

in welcher sich die Coefficienten der ersten Gleichung $c_{11}, c_{12} \ldots c_{1,n-1}$ verhalten wie $n-1$ beliebig gegebene reelle Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, die nicht sämtlich verschwinden; als orthogonal ist die Substitution dadurch charakterisirt, dass die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{n-1} x_\nu^2 \tag{1}$$

besteht. Dann bilde man die orthogonale Substitution

$$z_1 = \alpha y_1 + \beta y_n, \quad z_2 = \gamma y_1 + \delta y_n \tag{2}$$

und setze

$$z_n = y_n = x_n, \quad z_3 = y_3, \quad x_4 = y_4, \ldots z_{n-1} = y_{n-1}$$

sodass nach (1) die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_1^2 = \sum_{\nu+1}^{n} y_1^2 = \sum_{\nu=1}^{n} z_1^2$$

folgt, die Systeme der n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $z_1, z_2, \ldots z$, also ebenfalls durch eine orthogonale Substitution verknüpft sind. Die erste Gleichung derselben lautet

$$z_1 = \alpha c_{11} x_1 + \alpha c_{12} x_2 + \ldots + \alpha c_{1,n-1} x_{n-1} + \beta x_n \tag{3}$$

und man kann nach Voraussetzung

$$c_{1\nu} = \lambda a_\nu, \quad \alpha c_{1\nu} = \alpha \lambda a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n-1)$$

setzen, wobei λ eine von null verschiedene reelle Grösse ist. Bedeutet ferner a_n eine beliebig gegebene reelle Grösse, so kann man nach I. die Substitution (2) so bestimmt denken, dass

$$\beta : \alpha z \beta = \lambda a_n : 1$$

alsdann verhalten sich in der Gleichung (3) die Coefficienten der Variabeln x wie die reellen Grössen $a_1, a_2 \ldots a_n$, welche nur der Beschränkung unterworfen sind, dass die $n-1$ ersten von ihnen nicht sämtlich verschwinden.

Will man eine orthogonale Substitution für die n Variabeln bestimmen, in welcher die Coefficienten der ersten Gleichung sich verhalten wie

$$0:0:\ldots:0:a_n$$

wobei a_n von null verschieden sei, so braucht man nur

$$x_1 = w_n$$

zu setzen und die Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ durch eine beliebige orthogonale Substitution aus $w_1, w_2, \ldots w_{n-1}$ hervorgehen zu lassen.

Hiermit ist nach der Methode der vollständigen Induction der folgende Satz erwiesen.

Im Gebiet beliebig vieler Variabeln kann eine reelle orthogonale Substitution hergestellt werden, in welcher die Coefficienten einer Gleichung in denselben Verhältnissen zu einander stehen wie beliebig gegebene reelle Grössen von gleicher Anzahl, welche nicht sämtlich verschwinden.

III. Es sei nun

$$f = \Sigma\, a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = \Sigma\, a_{\nu\mu} x_\mu x_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

eine beliebige quadratische Form mit reellen Coefficienten; man setze

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

und versuche eine orthogonale Substitution zu bestimmen, nach welcher man erhält

$$(4) \qquad f = \lambda_1 y_1^2 + f_1(y_2, y_3, \ldots y_n)$$

wobei λ_1 eine reelle Constante, f_1 eine quadratische Form mit reellen Coefficienten bedeute. Ist die gesuchte Substitution durch die Gleichungen

$$(5) \qquad y_\nu = c_{\nu 1} x_1 + c_{\nu 2} x_2 + \ldots + c_{\nu n} x_n \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

gegeben, so hat man, da sie orthogonal sein soll, die weiteren Gleichungen

$$(6) \qquad x_\nu = c_{1\nu} y_1 + c_{2\nu} y_2 + \ldots + c_{n\nu} y_n$$

und die Gleichung (4) ergiebt

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 2\lambda_1 y_1 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial y_1}$$

oder nach (5) und (6)

$$(8) \quad 2\lambda_1 \sum_{\nu=1}^{n} c_{1\nu} x_\nu = 2 \sum_{\nu=1}^{n} c_{1\nu} (a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + \ldots + a_{\nu n} x_n)$$

woraus für die n Grössen $c_{1\nu}$ folgende Gleichungen resultiren:

$$(9) \quad \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_1) c_{11} + a_{12} c_{12} + \ldots + a_{1n} c_{1n} = 0 \\ a_{21} c_{11} + (a_{22} - \lambda_1) c_{12} + \ldots + a_{2n} c_{1n} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} c_{11} + a_{n2} c_{12} + \ldots + (a_{nn} - \lambda_1) c_{1n} = 0 \end{array}$$

Bezeichnet man ferner durch u eine Unbestimmte, durch $D(u)$ die Determinante der Form $f - u\varphi$, sodass

$$D(u) = \begin{vmatrix} a_{11} - u & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - u & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - u \end{vmatrix}$$

so ergeben die Gleichungen (9)

$$D(\lambda_1) = 0$$

Ist umgekehrt λ_1 eine dieser Gleichung genügende reelle Grösse, so sind die Gleichungen (9) durch reelle Werte der Unbekannten, welche nicht sämtlich verschwinden, zu befriedigen, und man kann nach II. eine orthogonale Substitution (5) finden, in welcher die Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1n}$ jenen Gleichungen genügen. Aus ihnen folgen unmittelbar die Gleichungen (8) und (7), mithin auch (4).

Es sei nun nach einer der vielen möglichen Methoden bewiesen, dass die Gleichung

$$D(x) = 0$$

nur reelle Wurzeln besitzt, etwa nach der von Weierstrass in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1879 gegebenen

welche keine weiteren Hilfsmittel als die hier gebrauchten Determinantensätze benutzt. Dann folgt aus der obigen Entwicklung, dass die Form f stets durch eine reelle orthogonale Substitution in die Gestalt (4) gebracht werden kann. Setzt man ferner

$$f_1(y_2, y_3, \ldots y_n) = \sum_{\mu,\nu} b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = \sum_{\mu,\nu} b_{\nu\mu} y_\mu y_\nu \qquad (\mu, \nu = 2, 3, \ldots n)$$

$$\varphi_1 = y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2$$

so ist

$$(10) \qquad D(u) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - u & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{22} - u & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{nn} - u \end{vmatrix}$$

denn nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten multiplicirt sich bei jeder linearen Substitution die Determinante einer quadratischen Form mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante, welches im vorliegenden Falle den Wert $+1$ hat, und die Form φ geht bei der Substitution (5) in die Summe der Quadrate von y_1, $y_2, \ldots y_n$ über. Ist daher $D_1(u)$ die Determinante der Form $f_1 - u\varphi_1$, so ergiebt sich aus (10)

$$D(u) = (\lambda_1 - u) D_1(u)$$

IV. Allgemein sei k irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$, und man habe, was nach III. für $k = 1$ möglich ist, die Form f in folgende Gestalt gebracht:

$$(11) \qquad f = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \ldots + \lambda_k v_k^2 + f_k(v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots v_n)$$

wobei die Grössen v durch eine reelle orthogonale Substitution aus den Variabeln x entstanden sind, f_k eine quadratische Form mit reellen Coefficienten ist, und, wenn $D_k(u)$ die Determinante der Form

$$f_k - u(v_{k+1}^2 + v_{k+2}^2 + \ldots + v_n^2)$$

bedeutet, die Gleichung

$$D(u) = (\lambda_1 - u)(\lambda_2 - u) \ldots (\lambda_k - u) D_k(u)$$

besteht. Dann sei $\lambda_{k+1} - u$ irgend ein Linearfactor von $D_k(u)$; man kann III. durch eine reelle orthogonale Substitution solche Variabeln $w_{k+1}, w_{k+2}, \ldots w_n$ einführen, dass man hat

(12) $$f_k = \lambda_{k+1} w_{k+1}^2 + f_{k+1}(w_{k+2}, w_{k+1}, \ldots w_n)$$

wobei f_{k+1} eine quadratische Form mit reellen Coefficienten ist, welche für $k+1 = n$ identisch verschwindet Setzt man noch

(13) $$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2, \ldots w_k = v_k$$

so sind auch die Variablensysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $w_1, w_2, \ldots w_n$ durch eine orthogonale Substitution verknüpft, und wenn $D_{k+1}(u)$ die Determinante der Form

$$f_{k+1} - u(w_{k+2}^2 + w_{k+3}^2 + \ldots + w_n^2)$$

bedeutet, besteht nach III. die Gleichung

$$D_k(u) = (\lambda_{k+1} - u) D_{k+1}(u)$$

mithin auch

$$D(u) = (\lambda_1 - u)(\lambda_2 - u) \ldots (\lambda_{k+1} - u) D_{k+1}(u)$$

ferner folgt aus (11), (12) und (13)

$$f = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \ldots + \lambda_{k+1} w_{k+1}^2 + f_{k+1}(w_{k+2}, w_{k+3}, \ldots w_n)$$

Für die Variablen w gelten also genau die für die Variablen v eingeführten Voraussetzungen, nur dass die Anzahl der Variablen, welche in der Form f mit keinen andern multiplicirt sind, um Eins gewachsen ist.

Man kommt daher, indem man den von den Grössen v zu den Grössen w führenden Schritt wiederholt, schliesslich zu einem Variablensystem t, in welchem die Form f folgendermassen ausgedrückt wird

$$f = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1} t_{n-1}^2 + f_{n-1}(t_n)$$

wobei f_{n-1} eine quadratische Form ist und, wenn $D_n(u)$ die Determinante der Form

$$f_{n-1} - u t_n^2$$

ist, die Gleichung

$$D(u) = (\lambda_1 - u)(\lambda_2 - u) \ldots (\lambda_{n-1} - u) D_n(u)$$

besteht. Nun kann man offenbar setzen

$$f_{n-1} = \lambda_n t_n^2$$

sodass

$$D_n(u) = (\lambda_n - u)$$

wird; man hat daher die beiden Gleichungen

$$f = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \ldots + \lambda_n t_n^2$$

$$D(u) = (\lambda_1 - u)(\lambda_2 - u) \ldots (\lambda_n - u)$$

wobei die Grössen t durch eine reelle orthogonale Substitution mit den Grössen x verknüpft sind. Die Form f kann also in der Tat durch eine orthogonale Substitution so umgestaltet werden, dass sie nur noch die Quadrate der Variabeln enthält und die Coefficienten derselben die reellen, gleichen oder ungleichen Wurzeln der Gleichung

$$D(x) = 0$$

sind.

Dorpat, Juli 1896.

XII.

Ueber Radical- und Antiradical-Kreise.

Zweiter Teil.

Von

Juan J. Durán Loriga.

Fortsetzung von Nr. IV.

In dem ersten Teile haben wir den Radical-Kreis definirt als den geometrischen Ort von denjenigen Punkten, deren Potenzen mit Bezug auf zwei feste Kreise (O) und (O′) gleich sind und verschiedene Vorzeichen haben; wir haben gesehen, dass der erwähnte Kreis als Mittelpunkt hat die Mitte desjenigen Segments, welches die Centra der gegebenen Kreise vereinigt, dass ferner sein Radius ist, wenn man die bekannten Radien R und R' nennt,

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}$$

Man begreift die Möglichkeit das umgekehrte Problem zu lösen, d. h. bei zwei gegebenen Kreisen (0) und (ϱ) einen dritten zu finden, der mit dem Kreis (9) vereinigt als Radical-Kreis (ϱ) haben möge, und den wir Antiradical-Kreis von (0) mit Bezug auf (ϱ) nennen wollen, indessen ehe wir auf diese Untersuchung eingehen, wollen wir das betreffs der Radical-Kreise in dem ersten Teil der Arbeit gesagte etwas erweitern.

Vorläufig ist zu bemerken, dass die beiden gegebenen Kreise und der Radical-Kreis ein Kreis-Büschel bilden, da alle drei zu einem Coaxial-System gehören, dass sie deshalb die vielfachen Eigenschaften dieser Systeme besitzen, und dass aus demselben Grunde ihr Studium aus der projectivischen Geometrie sich ableiten lassen

könnte, obgleich wir vorgezogen haben, ihm eine elementare Form zu geben

Aus der Betrachtung der Radical-Kreise lassen sich die bekannten Beziehungen zwischen den Coefficienten, dergestalt, dass zwei Kreise orthogonal sind, ableiten, wenn man als Grundlage das Factum nimmt, dass, wenn zwei Kreise orthogonal sind, der Radical-Kreis durch ihre Mittelpunkte geht und umgekehrt, aus welchem Grunde in dem Falle der Orthogonalität als notwendige und ausreichende Bedingung erfüllt sein muss, dàss die Coordinaten des Centrums eines derselben der Gleichung des Radical-Kreises genügen.

Es seien die Gleichungen der Kreise, deren Eigenschaften wir als orthogonale feststellen wollen, die folgenden:

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$$
$$x^2+y^2+2A'x+2B'y+C'=0$$

Die Gleichung des Radical-Kreises ist

$$2(x^2+y^2)+2(A+A')x+2(B+B')y+C+C'=0$$

Die Coordinaten des Centrums eines dieser Kreise z. B. des ersten sind $-A$ und $-B$, sie müssen also den Bedingungen genügen:

$$2(A^2+B^2)-2(A+A')A-2(B+B')B+C+C'=0$$

was sich auf das bekannte Verhältniss zurückführen lässt

$$2(AA'+BB')=C+C'$$

Wenn die Gleichungen der Kreise in barycentrischen Coordinaten gegeben sind, wird dieses Verfahren das geeignete sein, besonders wenn die Coordinaten des Centrums eines derselben a priori bekannt sind. Versuchen wir z. B. zu beweisen, dass der Longchamps'sche Kreis orthogonal ist mit Bezug auf die Potential-Kreise (wir nennen Potential-Kreise solche Kreise, die um die Mitten der Seiten als Centren beschrieben werden mit Radien, die den entsprechenden Medianen gleich sind (man sehe Progreso Matematico. Band 5, Seite 7_0); wir haben:

Gleichung des Longchamps'schen-Kreises (P_a)

$$(\alpha+\beta+\gamma)(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma)-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0$$

Gleichung des Potential-Kreises

$$(P_a)\;.\;.\;.\;p_a(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma)+a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta=0$$

Gleichung des Radical-Kreises

$$(\alpha+\beta+\gamma)(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma)-p_0\,\beta-p_0\,\gamma)-2(a^2\beta\gamma+b^2\alpha y+c^2\alpha\beta)=0$$

Wir haben mit p_a bezeichnet den Wert $\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$

Da das Centrum von P die Mitte der Seite ist, so sind seine barycentrischen Coordinaten $\alpha=0$ und $\beta=\gamma$, woraus sich ergiebt

$$2\beta(b^2\beta+c^2\beta-2p_a\beta^2-2a^2\beta^2=0$$

folglich etc.

Wenn einer der Kreise sich auf einen Punkt verringert, so wird der Radical-Kreis zum Radius haben

$$\varrho=\tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2-d^2}$$

und wenn beide sich in Punkte verwandeln, so wird der Radical-Kreis immer imaginär sein und als Radius haben

$$\varrho=\frac{d}{2}\sqrt{-1}$$

Wir wollen auch bemerken, dass der Begriff des Radical-Kreises sich verallgemeinern lässt, wenn man das Verhältniss der Potenz $=$einemWert$\frac{m}{n}$ macht. Alle Kreise, die sich dann ergeben, sind Teile eines gemeinsamen Büschels und haben viele Eigenschaften gemein.

Der Lehrsatz, wonach bei drei Kreisen, die zu zwei und zwei combinirt werden, die Radical-Axe der Radical-Kreise von zwei Gruppen auch die der dritten Gruppe ist, trifft auch zu, wenn man den Begriff des Radical-Kreises verallgemeinert; folglich:

Wenn man drei Kreise hat und die Radicalen von zwei Gruppen findet, so bilden alle diese Kreise für irgend welches Verhältniss der Potenz-Teile eines und desselben Büschels.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass der Begriff des Radical-Kreises sich ausdehnen lässt auf Kugeln und ebenso auch auf die Kreise, die auf einer sphärischen Oberfläche beschrieben werden.

II.

Wir wollen nunmehr auf das Studium der obenerwähnten „Antiradical-Kreise" eingehen.

Ist ein Kreis (0) und ein Radical-Kreis (ϱ) gegeben, so lässt sich bestimmen (0'), (Antiradical-Kreis von (0) mit Bezug auf (ϱ)), wenn man eine Distanz

$$\varrho 0' = 0\varrho$$

annimmt, wodurch man sein Centrum 0' erhält; um seinen Radius zu berechnen, bestimmen wir R' in der Formel, welche den Wert von ϱ gab

$$R' = \sqrt{2(\varrho^2 + d^2) - R^2}$$

wenn man die Distanz $0\varrho d$ nennt..

Damit der Kreis (0') reell ist, muss sich ergeben

$$d > \sqrt{\frac{R^2 - 2\varrho^2}{2}}$$

Wenn

$$2(\varrho^2 + d^2) - R^2 = 0$$

verkleinert sich der Antiradical-Kreis zu einem Punkte

Wenn die Gleichungen von zwei Kreisen

$$(C) \quad \ldots x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$
$$(C') \quad \ldots x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0$$

gegeben sind, so hat der Antiradical-Kreis von (C) mit Bezug auf (C') als Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2(2A' - A)x + 2(2B' - B)y + 2C' - C = 0$$

wenn es sich um barycentrischen Coordinaten handelt, so hat man ebenfalls

$$(C) \quad \ldots (\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - b^3\alpha\beta = 0$$
$$(C') \ldots (\alpha + \beta + \gamma)(u'\alpha + v'\alpha + w'\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma) - c^2\alpha\beta = 0$$

Antiradical-Kreis von (C) mit Bezug auf (C')

$$(\alpha + \beta + \gamma)[(2u' - u)\alpha + (2v' - v)\beta + (2w' - w)\gamma] - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

Wenn einer der Kreise sich bis zu einem Punkte verringert, so wird der Radius des Antiradical-Kreises eines Kreises (0) mit Bezug auf einen Punkt ϱ den folgenden Wert haben

$$R' = \sqrt{2d^2 - R^2}$$

worin d die Distanz 0ϱ bedeutet; sein Centrum wird sich über 0ϱ in einer Entfernung

$$00' = 20\varrho$$

befinden.

Der Antiradical-Kreis wird reell, gleich einem Punkte oder imaginär sein, je nachdem

$$d \gtreqless R\sqrt{2}$$

Wenn die Gleichung des Kreises ist

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

und $\underline{a}$ und $\underline{b}$ die Coordinaten des Punktes sind, so wird man als Gleichung des Radical-Kreises von 0 mit Bezug auf ϱ erhalten

$$x^2 + y^2 - 2(2a + A)x - 2(2b + B)y + 2(b^2 + b^2) - C = 0$$

und wenn der Kreis sein Centrum in dem Coordinatenursprung hat, und der Punkt ϱ über der Axe der x steht in einer Entfernung $\underline{d}$, so wird die Gleichung sein:

$$x^2 + y^2 - 4dx + 2d^2 + R^2 = 0$$

Aus der Formel, die den Wert des Radius R' des Antiradical-Kreises giebt, folgern wir

$$2(R^2 + R'^2) = \overline{00'}^2$$

woraus sich ergiebt, dass die Berührungspunkte der Tangenten, die einem Kreise und dem mit Bezug auf einen Punkt dazu gehörigen Antiradical-Kreise gemeinsam sind, zu vier und vier auf zwei Geraden sich befinden, die die Linie 00′ in einem und demselben Punkte schneiden, der von 0 den Abstand $\frac{R^2}{d}$ hat, d. h. dass dieser Punkt der Fuss der Polare von ϱ ist mit Bezug auf (0): die erwähnten Geraden liegen in einem Neigungswinkel von 45^0 auf der Linie der Mittelpunkte um die Tangenten, die von irgend welchem Punkte derselben an die Kreise (0) und (0′) gezogen werden, bilden ein harmonisches Bündel.

Auch beweist das erwähnte Verhältniss, dass, wenn der Kreis (0) bleibt, und der Punkt ϱ sich auf der Linie 00′ bewegt, die Enveloppe der Antiradical-Kreise die äquilaterale Hyperbel

$$x^2 - y^2 = R^2$$

ist.

Es ist klar, dass alle Kreise, die durch die Punkte H und K gehen, in welchen der Antiradical-Kreis (0′) die Linie der Centren schneidet, auch Antiradical-Kreise des Kreises (0) sind mit Bezug

auf den Punkt ϱ, aber wir verstehen unter Antiradical-Kreis denjenigen, welcher sein Centrum über 0ϱ hat.

Wenn wir die Radical-Kreise des Büschels suchen, den man erhalten würde, und der gegebenen (0), so werden alle durch den Punkt ϱ gehen, weshalb man die erwähnten Linien erhalten würde, wenn man einen beliebigen Punkt des zu HK perpendiculären Durchmessers mit dem Centrum 0 vereinigt und als Centrum resp. Radius annimmt die Mitte dieser Geraden resp. ihre Entfernung von ϱ.

Wenn der Kreis (0) sich gleichfalls zu einem Punkte (Kreis-Punkte) verringert, so müssen wir auf den Fall eingehen, wo wir den Antiradical-Kreis eines Punktes 0 mit Bezug auf einen anderen Punkt ϱ finden, und es ist leicht zu sehen, dass es genügt, um ihn zu finden, 0ϱ um die Strecke

$$\varrho 0' = 0\varrho$$

zu verlängern, wodurch man das Centrum $0'$ bestimmt, und es wird der Radius als Wert

$$R' = d\sqrt{2}$$

haben: es ergiebt sich also, dass der Antiradical-Kreis eines Punktes mit Bezug auf einen anderen immer reell ist. Ebenso sieht man, dass die beiden Punkte bezüglich des Kreises invers sind.

Wenn der Punkt 0 fest bleibt, und der andre Punkt sich auf der Linie 0ϱ bewegt, so verwandelt sich die äquilaterale Hyperbel welche diejenigen Antiradical-Kreise einschliesst, die wir oben als Kreis und Punkt angesehen haben, in zwei Gerade, die als Gleichung haben

$$y = \pm x$$

d. h. Asintoten sind der früheren Hyperbel.

Der Umstand, dass zwei Punkte und der Antiradical-Kreis ein Büschel bilden, in welchem die erwähnten Punkte die Grenz-Punkte sind, gestattet eine Reihe von Eigenschaften zu citiren; wir beschränken uns darauf, die nachfolgenden zu erwähnen, die wir benutzen wollen. Wenn man einen beliebigen Punkt A der Ebene mit zwei Punkten 0 und ϱ verbindet und auf den Enden von $A0$ und $A\varrho$ Perpendiculare errichtet, so sind diese Geraden und die Polare von A mit Bezug auf den Antiradical-Kreis von 0 und ϱ convergent.

Wenn man den geometrischen Ort der Schnittpunkte dieser Geraden finden will, im Falle dass A eine beliebige Linie beschreibt, so genügt es, auf die folgenden Umwandlungsformeln zu recurriren, die leicht zu erhalten sind.

$$x = d - X \; . \; y = \frac{K(X - d)}{Y}$$

wenn man d den Abstand der Punkte 0 und ϱ nennt, und als Cartesianische Axen die Gerade 0ϱ und die in 0 errichtete Perpendiculare annimmt.

Diese Formeln machen ersichtlich, dass, wenn der Punkt A eine Gerade beschreibt, welche durch 0 geht, auch der andere entsprechende Punkt eine in 0 auf der ersten Perpendiculare beschreibt; einer Geraden, die parallel ist zu der Axe der Linien y, entspricht eine andre gleichfalls parallele Gerade, einer Parallele zu der Axe der Linien x eine Parabel. Jeder Kreis, der durch 0ϱ geht, entspricht sich selbst; einer Parabel, die zur Gleichung hat

$$x^2 = 2py$$

entspricht eine Hyperbel.

Ist ein Kreis $(0,)$ gegeben, so existiren auf einem seiner Durchmesser nur zwei Punkte, 0 und ϱ (oder ihre symmetrischen Punkte), die derartig beschaffen sind, dass der Antiradical-Kreis von 0 mit Bezug auf $\varrho(0,)$ ist; man könnte die Punkte, die derartig an jedem Kreis der Ebene gebunden sind, dem erwähnten Kreise **radical associirte Punkte** nennen.

Wenn der Durchmesser nicht fixirt ist, dann sind die geometrischen Orte von 0 und ϱ zwei Kreise, beide concentrisch mit dem gegebenen Kreise; ausserdem haben sie den doppelten Radius und sind derartig beschaffen, dass der Radius von $(0')$ das geometrische Mittel ist; diese Kreise könnten wir auch zu $(0')$ **radical-associirte Kreise** nennen.

Aus dem Obigen lässt sich das folgende kleine Theorem ableiten:

Man hat einen Kreis mit dem Centrum 0 und seine beiden radical-associirten Kreise und zieht einen beliebigen Radius $0ab$ (a, b und c sind die Punkte, in denen er nach einander die 3 Kreise schneidet). Verbindet man einen beliebigen Punkt A der Ebene mit a und c und errichtet Perpendiculare auf den erwähnten Punkten der erhaltenen Geraden, so sind diese Perpendiculare und die Polare von A mit Bezug auf den gegebenen Kreis convergent.

Wenn man speciell den Punkt A auf dem gegebenen Kreis (C) betrachtet, so ergiebt sich das nachfolgende Theorem:

Die Perpendicularen errichtet auf den Endpunkten der Geraden, welche einen Punkt eines Kreises mit den Endpunkten eines und desselben Radius der radical-associirten Kreise verbinden, convergiren in der Tangente des ursprünglichen Kreises in A, sodass diese Tangente aus diesem Grunde der geometrische Ort der Schnittpunkte aller Perpendicularen ist, die sich auf den Punkt $\underline{A}$ beziehen.

Wenn die Coordinaten zweier Punkte $\underline{A}$ und $\underline{A'}$, $\underline{a}$ und $\underline{b}$ beziehungsweise $\underline{a'}$ und $\underline{b'}$ sind, so ist die Gleichung des Antiradical-Kreises von $\underline{A}$ mit Bezug auf $\underline{A'}$

$$x^2+y^2+2(a-2a')x+2(b-2b')y+2(a'^2+b'^2-(a^2+b^2))=0$$

Die Betrachtung von Radical- und Antiradical-Kreisen in der Geometrie des Dreiecks kann, wie wir schon bei anderer Gelegenheit bemerkt haben, zum Gegenstand interessanter Studien werden, je nachdem man in Betracht zieht, effective Kreise oder solche, die sich zu Punkten verringern und sogar solche, die in das Imaginäre übergehen. Als eine der einfachsten Anwendungen wollen wir hier oberflächlich die Antiradical-Kreise eines Scheitels eines Dreiecks mit Bezug auf einen anderen betrachten. Es sei $\underline{ABC}$ das betreffende Dreieck, und nehmen wir an, dass sein Amfang in einem bestimmten Sinne durchlaufen werde, z. B. in alphabetischer Ordnung, so haben wir zu finden den Antiradical-Kreis von $\underline{A}$ mit Bezug auf $\underline{B}$, von $\underline{B}$ mit Bezug auf C und von $\underline{C}$ mit Bezug auf $\underline{A}$, welche wir beziehungsweise nennen wollen $(\underline{C_1})$, $(\underline{A_1})$, $(\underline{B_1})$.

Wir werden die Centren der Kreise erhalten, wenn wir die Seiten (in dem Sinne der in Betracht kommt) um ihre eigene Länge verlängern, und was die Radien betrifft, so werden wir zu Werten haben $c\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$ und $b\sqrt{2}$.

Wir wollen die Gleichung des Kreises A_1 finden.

Wir wissen, dass in der von Longchamps (J. S. 1886, Seite 57) angedeuteten Form, die Gleichung des ganzen Kreises ist

$$(\alpha+\beta+\gamma)(u\alpha+v\beta+w\gamma)-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0$$

worin u, v und w die Potenzen der Scheitel des Dreiecks sind mit Bezug auf den Kreis, der in Betracht kommt.

Im gegenwärtigen Falle haben wir

$$u=2b^2-c^2 \qquad v=2a^2 \qquad w=-a^2$$

folglich ist die Gleichung des Kreises (A_1)

$$(\alpha+\beta+\gamma)[(2b^2-c^2)\alpha+2a^2\beta-a^2\gamma]-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0$$

und auf ähnliche Art oder durch Circular-Permutation erhält man die von (B_1) und (C_1).

Wenn man das Radical-Centrum von (A_1), (B_1) und (C_1) findet, so erhält man

$$\alpha:\beta:\gamma = a^2 p_a : b^2 p_b : c^2 p_c$$

d. h. es fällt zusammen mit dem Centrum des umgeschriebenen Kreises. Berechnen wir den Radius des orthotomischen Kreises.

Die Potenz von $\underline{0}$ mit Bezug auf (A_1) ist

$$\overline{0A_1}-2a^2$$

aber

$$\overline{0A_1}=R^2+2a^2$$

es ergiebt sich demgemäss, dass der orthotomische Kreis als Radius hat R und mit dem umgeschriebenen Kreise zusammenfällt.

Dieses Resultat muss sich notwendigerweise ergeben, denn, da die Scheitel die Grenzpunkte des Bündels sind, den die Antiradical-Kreise bilden, muss der Kreis, der zu gleicher Zeit durch die drei Scheitelpunkte geht, zu jenen Kreisen orthogonal sein, d. h orthotomisch zu (A_1), (B_1) und (C_1).

Die Polaren des Centrums des umgeschriebenen Kreises mit Bezug auf die Kreise, die wir betrachten, gehen durch die Scheitel des Tangential-Dreiecks (Lemoine'schen Punkte associirte), da die auf den Geraden $\underline{0B}$, $\underline{0C}$ und $\underline{0A}$ errichteten Perpendicularen an ihren Enden sich in den genannten Punkten schneiden. Die erwähnten Polaren teilen die Seiten des fundamentalen Dreiecks im Verhältniss zwei zu eins.

Die Polare des Scheitelpunkts z B. mit Bezug auf den Kreis (A_1) geht durch den symmetrischen Punkt von $\underline{A}$ mit Bezug auf das Centrum des eingeschriebenen Kreises, weil sich im erwähnten Punkte die in $\underline{B}$ und $\underline{C}$ auf den Seiten $\underline{AB}$ und $\underline{AC}$ errichteten Perpendicularen kreuzen.

Da die Punkte $\underline{B}$ und $\underline{C}$ invers sind mit Bezug aufden Kreis (A_1), so folgt, dass wenn wir durch $\underline{C}$ in dem erwähnten Kreise eine beliebige Sehne $\underline{mn}$ ziehen, die Punkte $\underline{m}$, $\underline{n}$, $\underline{B}$ und $\underline{A}$ concyklisch sind.

Da die Punkte H und K (Punkte, in welchen die Seite BC, (A_1) schneidet harmonisch zugeordnet sind mit Bezug auf B und C, so haben wir

$$\frac{HB}{HC} = \sqrt{2}$$

und folglich wird in einem beliebigen Punkte n des Kreises (A_1) sein:

$$\overline{aB}^2 = 2\overline{nC}^2$$

d. h. der erwähnte Kreis ist der geometrische Ort derjenigen Punkte deren Abstand von B im Quadrat erhoben doppelt so gross als das Quadrat ihres Abstands von C ist.

Die Polaren eines beliebigen Scheitelpunkts des Dreiecks mit Bezug auf die Kreise (A_1), (B_1) und (C_1) sind convergent und dasselbe ist der Fall mit den Radical-Axen.

Die Polaren eines der Brocard'schen Punkte mit Bezug auf die Kreise, die wir betrachten, gehen durch den diametral entgegengesetzten Punkt des entsprechenden Bei-Kreises.

Ein analoges Factum wird eintreten, wenn man die isogonen Punkte und die Zorricheli'schen Kreise betrachtet.

Wenn man über $\overline{0A_1}$, $\overline{0B_1}$ und $\overline{0C_1}$ als Durchmessern Kreise beschreibt, so sind diese Radical-Kreise des umgeschriebenen Kreises, und von (A_1), (B_1) und (C_1) und gemäss bestätigt sich, dass die Radical-Axen dieser letzteren durch 0 gehen.

Die Potenzen der Scheitel des Dreiecks mit Bezug auf die Neuberg'schen Kreise und auf die Kreise (A_1), (B_1) und (C_1) sind gleich und haben entgegengesetzte Vorzeichen, z. B. die Potenz von C mit Bezug auf (N_a) ist gleich (mit Ausnahme des Vorzeichens) der von C mit Bezug auf (A_1); so gehen die Radical-Kreise der erwähnten Kreise durch die Scheitel des Fundamental-Dreiecks. Die Gleichung der erwähnten Radical-Kreise z. B. des (N_a) und (A_1) entsprechenden ist

$$(\alpha+\beta+\gamma)[(2b^2-c^2)\alpha+3a^2\beta]-2a^2\beta\gamma-2b^2\alpha\gamma-2c^2\alpha\beta=0$$

Wenn wir den Radius des Radical-Kreises finden wollen, dessen Gleichung wir notirt, so genügt es in der Formel

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(R^2+R_,^2)-d^2}$$

die Werte zu ersetzen

$$R = a\sqrt{2} \qquad R' = \frac{a}{2}\sqrt{\cot^2 w - 3} \qquad d = \frac{a}{2}\sqrt{9 + \cot^2 w}$$

und es ergiebt sich für den gesuchten Radius der höchst einfache nachfolgende Ausdruck

$$\rho = \frac{a}{4} \operatorname{cosec} w$$

Dieses Resultat könnte man auch erhalten, wenn man bemerkt, dass die Gerade, die C mit dem Mittelpunkt des Kreises vereinigt, parallel und gleich ist der Hälfte von $\overline{BN_a}$.

Die Radical-Axen der Neuberg'schen Kreise und der Kreise (A_1), (B_1) und (C_1) gehen durch die Scheitel des ersten Brocard-schen Dreiecks (semireciproke Punkte des Lemoniu'schen Punktes) und schneiden die Seiten des Dreiecks im Verhältniss von zwei zu eins; z. B. die Radical-Axe von (N_a) und (A_1) geht durch den Scheitel A_1, dessen Coordinaten sind

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 : c^2 : b^2$$

Die Polaren des Zarry'schen Punktes mit Bezug auf die Kreise (A_1), (B_1) und (C_1) schneiden sich in dem Steiner'schen Punkte.

Das Dreieck der Centren $\underline{A_1}$, $\underline{B_1}$, $\underline{C_1}$ ist dreifach homologisch zum Fundamental-Dreieck, und es sind $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ die Centren der Homologie und die Seiten des ersteren die Axen der Homologie.

Die Seiten des Dreiecks der Centren und des Fundamental-Dreiecks stehen in dem nachfolgenden Verhältniss

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{A_1C_1}^2 = 7(a^2 + b^2 + c^2)$$

d. h. die Total-Potenz (man sehe Progr. Mat. Band IV, Seite 313) des ersten Dreiecks ist siebenmal grösser als die des zweiten.

Die Polare des Scheitels $\underline{B}$ mit Bezug auf den Kreis (A_1) ist die Perpendiculare errichtet auf $\overline{BC}$ im Punkte C und die Radical-Axen im Punkte C, und die Radical-Axen derselben Elemente sind die Mediatrizen.

In dem besonderen Falle, dass in einem Dreiecke sich ergiebt

$$c^3 = 2b^2$$

verwandelt sich der Kreis (A_1) in den Appollonius'schen.

Wenn man den Umfang des Dreiecks als im entgegengesetzten Sinne durchlaufen annimmt, werden sich andere Kreise (A_2), (B_2)

und (C_2) ergeben, die analoge Eigenschaften aufweisen wie die von (A_1), (B_1) und (C_1); dessen ungeachtet lassen sich aus der Combination der einen mit den anderen neue Eigenschaften ableiten, so z. B. sind die Radical-Centren von (A_a), (A_2), (A_4); (N_b), (B_2), (B_1) u. s. w. die Scheitel des ersten Brocard'schen Dreiecks.

Verschiedene andre Eigentümlichkeiten könnten wir hier noch anführen; wir reserviren indessen für den dritten Teil unserer Abhandlung die Nutzanwendung (besonders auf die Geometrie des Dreiecks), die sich leicht ergiebt aus der Betrachtung und dem Studium der Radical- und Antiradical-Kreise.

La Coruña (Spanien) August 1896.

XII.

Ueber die charakteristische Differentialgleichung der Raumcurven.

Von

R. Hoppe.

In meiner analytischen Curventheorie *) habe ich die allgemeine Bestimmung der Raumcurve nach Elimination des Linienelements und der Lage auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung zurückgeführt, deren Beziehung zur Curve aber nur, soweit es die Definition erforderte, zum Ausdruck gebracht. Diese Beziehung nach allen Seiten hin zu formuliren, macht sich das Folgende zur Aufgabe.

Eine Curve ist unabhängig vom Linienelement, also von den detaillirten Dimensionen, bestimmt, wenn die Richtungscosinus der Tangente f, g, h gegen die Axen der x, y, z gegebene Functionen eines Parameters sind; sie ist überdies unabhängig von ihrer Lage bestimmt, wenn statt dessen zwischen dem Krümmungswinkel τ und und dem Torsionswinkel ϑ eine Relation gegeben ist.

Nimmt man, wie hier stets geschehen soll, τ zur unabhängigen Variabeln, und bezeichnen Accente die Differentiation nach τ, so sind f', g', h' die Richtungscosinus der Hauptnormale. Die der Binormale mögen l, m, n sein.

Für die allgemeine Untersuchung aber kann eine Axe alle übrigen vertreten. Wir wenden daher zur Bestimmung nur f, f', l

*) Lehrbuch der analytischen Geometrie, 3. Abschn.

als Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale gegen die x Axe an. Aus ihnen lassen sich leicht*) die entsprechenden Grössen für die y und z Axe bis auf eine willkürliche Constante entsprechend einer Rotation der Figur um die x Axe finden.

Zerlegt man die Gleichung

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1 \tag{1}$$

in

$$f \cos\mu + f' \sin\mu = 1$$

$$f \sin\mu - f' \cos\mu = il$$

und setzt

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mu - \frac{2r'}{r}$$

so ergeben sich für letztere Grösse 2 quadratische Gleichungen und als deren Wurzeln die Werte:

$$\frac{2r'}{r} = \frac{f' \pm il}{1+f} = \frac{f' + il}{\pm 1 + f}$$

nur vereinbar für

$$\frac{2r'}{r} = \frac{f' + il}{1+f} \tag{2}$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(r' - \tfrac{1}{2}\frac{f' + il}{1+f}r\right) + \left(i\vartheta' + \tfrac{1}{2}\frac{f' + il}{1+f}\right)\left(r' - \tfrac{1}{2}\frac{f' + it}{1+f}r\right) = 0$$

das ist:

$$r'' + i\vartheta' r' + \tfrac{1}{4}r = 0 \tag{3}$$

Diese Gleichung, früher**) auf anderm Wege hergeleitet, ist es, die ich oben charakteristische Differentialgleichung genannt habe; es sollen nun die Beziehungen ihrer Lösungen ergänzend aufgestellt werden. Hierbei sei r diejenige Speciallösung, welche gemäss Gl. (2) der Curve $(ff'l)$ entspricht. Eine zweite Speciallösung q ist, wenn q_1 den conjugirten Wert zu q bezeichnet, bekannt durch die Relation

$$r' = \tfrac{1}{2}q_1 e^{-i\vartheta} \tag{4}$$

mithin das vollständige Integral

$$(r) = Aq + Br \tag{5}$$

---

*) l. c. § 56. Aufgabe 4.

**) l. c. Aufgabe 19

§ 1.

Sei von jeder complexen Grösse N der conjugirte Wert bezeichnet durch N_1. Dann ergibt die Differentiation:

$$(rr_1 + 4r'r_1')' = r'r_1 + rr_1' + 4r''r_1' + 4r'r_1''$$
$$= 4r'(r_1'' - i\vartheta r_1' + 4r_1) + 4r_1'(r'' + i\vartheta r' + \tfrac{1}{4}r) = 0$$

nach Gl. (3), folglich ist

$$rr_1 + 4r'r_1' = 2e \tag{6}$$

constant und zwar reell.

Ferner sei der Kürze wegen

$$\eta = \tfrac{1}{2}\int \frac{l\partial\tau}{1+f}$$

dann erhält man durch Integration der Gl. (2):

$$r = (a+ib)\sqrt{1+f}\,r^{i\eta}; \quad r' = \tfrac{1}{2}(a+ib)\frac{f' + il}{\sqrt{1+f}}e^{i\eta}$$

für willkürlich constante reelle a, b, woraus:

$$rr_1 = (a_2 + b^3)(1+f); \quad 4r'r_1' = (a^2+b^2)(1-f)$$

daher nach Gl. (6):

$$c = a^2 + h^3$$

mithin

$$rr_1 = c(1+f); \quad 4r'r_1' = c(1-f) \tag{7}$$

$$f = \frac{1}{c}(rr_1 - 4r'r_1') = \frac{rr_1}{c} - 1 \tag{8}$$

und nach Differentiation:

$$f' = \frac{1}{c}(rr_1' + r'r_1) \tag{9}$$

Der Wert von l geht eindeutig aus Gl. (2) hervor, nämlich

$$l = \frac{i}{c}(rr_1' - r'r_1) \tag{10}$$

Durch Snbstitution einer beliebigen Lösung (r) der Gl. (3) mögen f, f', l, ϑ', c übergehen in (f) (f') (l) (ϑ') (c); dann ist

$$(l) = \frac{i}{(c)}\{(r)(s_1') - (r')(r_1)\}$$

Dies differentiirt gibt:

$$-(f')(\vartheta') = \frac{i}{(c)}\{(r)(r_1'') - (r'')(r_1)\}$$

und da (r) der Gl. (3) bei unverändertem ϑ' genügt,

$$= \frac{i}{(c)}\{(r)[i\vartheta'(r_1') - \tfrac{1}{4}(r_1)] + (r_1)[i\vartheta'(r') + \tfrac{1}{4}(r)]\}$$

$$= \frac{i}{(c)} i\vartheta'\{(r)(r_1') + (r')(r_1)\} = -\vartheta'(f')$$

folglich ist

$$(\vartheta') = \vartheta'$$

d. h. alle Lösungen der Gl. (3) ergeben dieselbe Curve nur in verschiedenen Lagen. (Vom Bogenelement, das wir überall gleichbestimmt sein lassen, sehen wir natürlich ab.)

§ 2.

In Betreff der zweiten Lösung erhält man durch Differentiation der Gl. (4):

$$r'' = -i\vartheta' r' - \tfrac{1}{4}r = \tfrac{1}{2}(q_1' - i\vartheta' q_1)e^{-i\vartheta}$$
$$= \tfrac{1}{2}q_1' e^{-i\vartheta} - i\vartheta' r'$$

also

$$r = = 2q_1' e^{-i\vartheta}$$

Demnach hat man:

$$\begin{aligned} q^1 &= 2r'e^{i\vartheta}; \quad q_1' = -\tfrac{1}{2}re^{i\vartheta} \\ q &= 2r_1'e^{-i\vartheta}; \quad q' = -\tfrac{1}{2}r_1 e^{-i\vartheta} \end{aligned} \tag{11}$$

$$qq_1 + 4q_{,}q_1' = 4r'r_1' + rr_1 = 2c$$

und nach den Gl. (7):

$$q = (a - ib)\frac{f' - il}{\sqrt{1+f}}e^{-i(\vartheta+\eta)} \tag{12}$$

$$q' = -\tfrac{1}{2}(a - ib\sqrt{1+f}\, e^{-i(\vartheta+\eta)} \tag{13}$$

§ 3.

Da die Curve $(r) = Aq + Br$ nur durch die Lage von der Curve r verschieden ist, so bleibt die Frage zu untersuchen, wie durch A und B die Lage relativ bestimmt wird. Wir denken beide congruente Curven zur Deckung gebracht, die x Axe, resp. (x) Axe, die

vorher zusammenfielen, aber einzeln in fester Verbindung mit der einen und andern Curve bewegt: dann werden beide Axen einen Winkel Θ bilden. Dies ist dann derselbe Winkel, der auch ursprünglich die der x Axe in Curve r analoge Gerade in Curven (r) mit der x Axe bildet, bestimmt also die relative Lage der 2 congruenten Gebilde bezüglich auf eine Axe und dadurch auch in Bezug auf die beiden andern (der y und z) bis auf deren willkürliche Rotation um die z Axe.

Nun ist

$$\cos\Theta = f(f)+f'(f')+l(l) =$$

$$\frac{1}{4c(c)}(rr_1-4r'r_1')\{(Aq+Br)(A_1q_1+B_1r_1)-4(Aq'+Br')(A_1q_1'+B_1r_1')\}$$

$$+\frac{1}{c(c)}(rr_1'+r'r_1')\{(Aq+Br)(A_1q_1'+B_1r_1')+(Aq'+Br')(A_1q_1+B_1r_1')\}$$

$$-\frac{1}{c(c)}(rr_1'-r'r_1)(\{Aq+Br)(A_1q_1'+B_1r_1')-(Aq'+Br')(A_1q_1+B_1r_1)\{$$

$$=\frac{1}{4c(c)}(rr_1-4r'r_1')\{AA_1(qq_1-4q'q_1')+BB_1'(rr_1'-4r'r_1')$$

$$+AB_1(qr_1-4q'r_1')+BA_1(rq_1-4r'q_1')\}$$

$$+\frac{1}{c(c)}\{AA_1(rr_1\cdot q'q_1+r'r_1'qq_1')+BB_1(rr_1'r'r_1+r'r_1rr_1'$$

$$+AB_1(rr_1'q'r_1+r'r_1qr_1')+BA_1(rr_1'r'q_1+r'r_1rq_1')\}$$

$$=\frac{1}{c(c)}\{AA_1[-\tfrac{1}{4}(rr_1-4r'r_1')^2-4rr'r_1r_1']$$

$$+BB_1[\tfrac{1}{4}(r''r_1-4r'r_1')^2+4rr'r_1r_1']\}$$

$$=\frac{4}{4c(c)}(BB_1-AA_1)(rr_1+4r'r_1')^2=\frac{c}{(c)}(BB_1-AA_1)$$

wo

$$2(c) = (Aq+Br)(A_1q_1+B_1r_1)+4(Aq'+Br')(A_1q_1'+B_1r_1')$$
$$= AA_1(qq_1+4q'q_1')+BB_1(rr_1+4r'r_1')$$
$$+ AB_1(qr_1+4q'r_1')+BA_1(rq_1+4r'q_1')$$
$$= 2c(AA_1+BB_1)$$

folglich

$$\cos\Theta = \frac{BB_1-AA_1}{BB_1+AA_1};\quad \frac{AA_1}{BB_1} = (\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta)^2$$

Sei nun

$$A = de^{i\alpha};\quad B = ee^{i\beta}$$

dann wird

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta = \frac{d}{e}$$

Demnach ist die relative Lage der 2 Curven allein vom Verhältniss der Moduln der Coefficienten der Lösung abhängig. Insbesondere liegen sie für $e = 0$ symmetrisch, für $d = e$ rechtwinklig zu einander, d. h. bzhw. ist $\Theta = 2R$ und $= R$.

§ 4.

Die Gl. (2) kann dazu dienen, für eine unbegrenzte Anzahl von Functionen ϑ' oder ϑ von τ lösbare Differentialgleichungen (3) zu gewinnen. Seien f, f', l Functionen eines Parameters, welche die Gleichung (1) erfüllen; dann hat man:

$$\tau = \int \frac{\partial f}{f'}; \quad \vartheta = -\int \frac{\partial l}{f}; \quad \vartheta' = -\frac{\partial l}{\partial f}$$

worin f als willkürlich zu betrachten ist, ϑ, ϑ' als Functionen von τ bestimmt werden. Hiervon 2 Beispiele.

1) $f = -\cos^2 x$; $f' = \sin x \cos x$; $l = \sin x$

Hier wird

$$\tau = 2x; \quad \vartheta = -\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x; \quad \vartheta' = -\frac{1}{\sin x}$$

dann nach Gl. (2) und nach Integration:

$$\frac{\partial r}{r} = \frac{\cos x + i}{\sin x}\,\partial x; \quad r = \sin x (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x)^i$$

$$r' = \frac{\cos x + i}{2} (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x)^i$$

woraus nach Gl. (11)

$$q = \cos x - i; \quad q' = -\tfrac{1}{2}\sin x$$

Demnach hat die Gleichung

$$r'' - \frac{ir'}{\sin \frac{1}{2}\tau} + \tfrac{1}{4}r = 0$$

zur einfachsten Speciallösung:

$$r = \cos \tfrac{1}{2}\tau - i$$

2) $f = -\cos^2 x$; $f' = \sin x$; $l = \sin x \cos x$

Hieraus findet man ebenso:

$$\tau = 2\sin x; \quad \vartheta = -2\cos x - \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x; \quad \eta' = -\cot 2x$$

$$\frac{\partial r}{r} = (1 + i\cos\varkappa)\cot\varkappa\,\partial\varkappa; \quad r = \sin\varkappa(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varkappa)^i e^{i\cos\varkappa}$$

$$r' = \frac{1 + i\cos\varkappa}{2}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varkappa)^i e^{i\cos\varkappa}$$

$$q = (1 - i\cos\varkappa)e^{i\cos\varkappa}; \quad q_{,} = -\tfrac{1}{2}\sin\varkappa\, e^{i\cos\varkappa}$$

und die Gleichung

$$r'' - ir'\frac{2-\tau^2}{\tau\sqrt{4-\tau^2}} + \tfrac{1}{4}r = 0$$

hat zur einfachsten Speciallösung:

$$r = \left(1 - \frac{i}{2}\sqrt{4-\tau^2}\right)e^{\frac{1}{2}i\sqrt{4-\tau^2}}$$

Für $\tau > 2$ wird die Gleichung nebst ihrer Lösung reell, dagegen die Binormale, mithin die Curve imaginär.

XIII.

Regelfläche, deren Strictionslinie auch Krümmungslinie ist.

Von

R. Hoppe.

Die Aufgabe, die Regelfläche von der genannten Eigenschaft darzustellen, ist bereits von Amigues in Nouv. Ann. t. XIV. p. 491, aber mit Beschränkung auf ebene Strictionslinie gelöst. Für diese Specialisirung ist kein Grund ersichtlich; überdies wird bei jener Behandlungsweise die Symmetrie der Raumbestimmungen durchweg preisgegeben; sie bringt keinen Gewinn, sondern nur Verlust an Einfachheit. Jedenfalls hat die Arbeit von Amigues das Verdienst auf die allgemeine Frage und so auf eine gewisse Classe von Regelflächen die Aufmerksamkeit gelenkt zu haben. Indem wir die Aufgabe allgemein in Angriff nehmen, kommt uns zustatten, dass das Linienelement gleich anfangs aus der Rechnung herausfällt, mithin jede Curve auf der Fläche von nur einer Function abhängt, da es sich nur um Richtungsgrössen, nie um Lineargrössen handelt.

Die Gleichungen einer beliebigen Regelfläche sind:

$$x = x_0 + av; \quad y = y_0 + bv; \quad z = z_0 + cv$$

wo x_0, y_0, z_0. a, b, c Functionen eines Paramoters u sind. Sei u der Bogen der vom Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ beschriebenen Curve s_0, ferner a, b, c die Richtungscosinus der erzeugenden Geraden der Fläche. Die Curve s_0 ist Strictionslinie, wenn der Drehpunktsabstand der Erzeugenden null, also

$$\partial x_0 \partial a + \partial y_0 \partial b + \partial z_0 \partial c = 0 \tag{1}$$

ist. Diese Gleichung nehmen wir als erfüllt an.

Seien bezeichnet die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale durch fgh, $f'g'h'$, lmn, ihre Coincidenzwinkel durch $\partial\tau$, $\partial\sigma$, $\partial\vartheta$, also der Krümmungswinkel, Torsionsbogen, Torsionswinkel bzhw. durch τ, σ, ϑ, anwendbar auf jede Curve. Wir machen Anwendung auf 2 Curven, die wir durch die Indices 0 und 1 unterscheiden, nämlich 1) die Strictionslinie s_0 und 2) auf eine Curve s_1, deren Tangente der Erzeugenden parallel ist, setzen also

$$f_0 = \frac{\partial x_0}{\partial u}, \quad \text{etc.} \quad f_1 = a, \quad \text{etc.} \quad f_1' = \frac{\partial a}{\partial \tau_1}, \quad \text{etc.}$$

Dann lautet Gl (1):

$$f_0 f_1' + \ldots = 0$$

Unbekannt ist der Winkel ω zwischen den Tangenten beider Curven, und zwar hat man:

$$\begin{aligned} f_0 f_1 &= \ldots = \cos\omega \\ f_0 f_1' &+ \ldots = 0 \\ f_0 l_1 &+ \ldots \pm \sin\omega \end{aligned}$$

wo die letzte Gleichung aus den beiden ersten folgt. Daher ist

$$f_0 = f_1 \cos\omega \pm l_1 \sin\omega \tag{2}$$

Hieraus berechnet man:

$$\begin{aligned} f_0' \partial\tau_0 &= (-f_1 \sin\omega \pm l_1 \cos\omega)\partial\omega + f_1'(\cos\omega\partial\tau_1 \mp \sin\omega\,\partial\vartheta_1) \\ l_0 \partial\tau_0 &= (l_1 \cos\omega \mp f_1 \sin\omega)(\cos\omega\partial\tau_1 \mp \sin\omega\partial\vartheta_1) \mp f_1' \end{aligned}$$

und aus letzterm ergibt sich:

$$(l_0 f_1 + \ldots)\partial\tau_0 = \mp \sin\omega(\cos\omega\partial\tau_1 \mp \sin\omega\,\vartheta_1) \tag{3}$$

Bezeichnen nun e, f, g (ohne Index) die Fundamentalgrössen erster, E, F, G zweiter Ordnung der Fläche, so ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} EF \\ ef \end{vmatrix} \partial u^2 - \begin{vmatrix} HE \\ g\,e \end{vmatrix} \partial u\,\partial v + \begin{vmatrix} FG' \\ f\,g \end{vmatrix} \partial v^2 = 0$$

notwendige und hinreichende Bedingung, unter der das Verhältniss $\partial v : \partial u$ eine Hauptkrümmungsrichtung ausdrückt. Für die Strictionslinie ist aber v constant null, also auch $\partial v = 0$ Folglich ist sie Krümmungslinie, wenn

$$Ef - Fe = 0 \tag{4}$$

ist, und zwar hat man für $v = 0$.

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \ldots = f_0^2 + \ldots = 1 \tag{5}$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \ldots = f_0 f_1 + \ldots = \cos\omega \tag{6}$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \ldots = f_1^2 + \ldots = 1$$

$$t^2 = eg - f^2 = \sin^2\omega \tag{7}$$

$$E = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} l_0 & f_1 & f_0' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}\frac{\partial \tau_0}{\partial u}$$

$$= -\frac{1}{t}(l_0 f_1 + \ldots)\frac{\partial \tau_0}{\partial u}$$

$$= \pm \cos\omega \frac{\partial \tau_1}{\partial u} - \sin\omega \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u} \tag{8}$$

$$F = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2 \partial v} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_1' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}\frac{\partial \tau_2}{\partial v}$$

$$= \frac{1}{t}(f_0 l_1 + \ldots)\frac{\partial \tau_1}{\partial u} = \pm \frac{\partial \tau_1}{\partial u} \tag{9}$$

Nach Einführung dieser Werte geht Gl. (2) über in

$$\pm \sin\omega\, \partial\tau_1 + \cos\omega\, \partial\vartheta_1 = 0$$

oder, wenn man $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau_1} = \operatorname{tg}\lambda_1$ setzt, so dass

$$\partial\tau_1 = \partial\sigma_1 \cos\lambda_1; \quad \partial\vartheta_1 = \partial\sigma_1 \sin\lambda_1$$

wird, in

$$\omega = \mp \lambda_1$$

Die Tangentengleichung (2) von s_0 lautet nun:

$$f_0 = f_1 \cos\lambda_1 - l_1 \sin\lambda_1 = \frac{f_1 \partial\tau_1 - l_1 \partial\vartheta_1}{\partial\sigma_1}$$

Das Doppelzeichen des Wertes von t nach Gl. (7), welches ich nicht berücksichtigt habe, und das geschriebene heben sich beide in Gl. (2),

Für willkürliches Linienelement s als Function von u lautet nun die Coordinatengleichung derselben:

$$x = \int \frac{f_1 \partial \tau_1 - l_1 \partial \vartheta_1}{\partial \sigma_1} \partial s + f_1 v; \quad \text{etc.}$$

Zur Construction hat man eine beliebige Curve s_1 anzunehmen, von welcher nur die Richtungen der Tangente und Binormale und die Krümmungsbreite λ_1 in Anwendung kommen. Es resultirt der Satz:

„Hat eine Regelfläche die Eigenschaft, dass ihre Strictionslinie zugleich Krümmungslinie ist, so behält sie diese bei jeder stetigen Parallelverschiebung der Erzeugenden, wenn der laufende Punkt der Strictionslinie dabei beständig tangential fortrückt.“

XIV.

Die Summirung einer Gattung trigonometrischer Reihen.

Von

Franz Rogel

in Barmen.

Herr Dr. Otto Beau[1]) leitet aus den bekannten trigonometrischen Reihen

$$(1) \quad . \quad . \quad . \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\cos \lambda \pi y}{x+\lambda\pi} = \frac{\cos xy}{\sin x}, \quad -1 \leqq y \leqq +1$$

$$(2) \quad . \quad . \quad . \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda\pi y}{\sin x} = \frac{\sin xy}{\sin x}, \quad -1 < y < 1$$

mittelst eines inductiven Verfahrens die Summen der Reihen

$$(3) \quad . \quad . \quad . \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y(x+\lambda\pi)}{x+\lambda\pi}$$

$$(4) \quad . \quad . \quad . \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x+\lambda\pi)}{x+\lambda\pi}$$

für die Intervalle $(2n, 2n+2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ab und erhält sehr einfache Resultate.

Minder umständlich und direct kommt man auf dem folgenden Wege zum Ziele.

---

1) 1893. Programm Nr. 87 Sorau, Druck v. Karras in Halle a. S.

Schreibt man in obigen Formeln (1) und (2) $1-y$ statt y, multiplicirt mit i und addirt sie zu (1), so entsteht

$$(5)\ \ldots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy(x+\lambda\pi)}}{x+\lambda\pi} = \frac{e^{ix}}{\sin x},\quad 0<y<z$$

Wird jetzt y durch $y-2n$, $n=0$ oder ganzzahlig ersetzt und beiderseits mit e^{+i2nx} multiplicirt, so kommt

$$(6)\ \ldots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy(x+\lambda\pi)}}{x+\lambda\pi} = \frac{e^{i(2n+1)x}}{\sin x},\quad 2n<y<(2n+7)$$

woraus durch Trennung des **Reellen** vom **Imaginären** die gewünschten Summirungen

$$\left.\begin{aligned}(7)\ \ldots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} &= \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\\ (8)\ \ldots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x+\lambda\pi)}{x+\lambda\pi} &= \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x}\end{aligned}\right\},\quad 2n<y<2n+2$$

hervorgehen. Hiebei ist zu bemerken, dass für $n=0$ die Nulle ein zulässiger Wert ist.

Durch fortgesetzte Integration der letzteren Gleichungen bezüglich y und Summirung der hiebei auftretenden Constanten in Reihenform findet Herr Dr. O. Beau die Summen von

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \frac{y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m}\ ^{*})$$

Dieses weitläufige Verfahren lässt sich jedoch durch das einfachere einer $(m-1)$ fachen **Differentiation** der Gleichung (6) nach x vorteilhaft ersetzen, was wegen der für jeden Wert von x und y bestehenden **unbedingten** Convergenz der hierin auftretenden unendlichen Reihe erlaubt ist.

Vor Ausführung derselben ist (6) mit e^{-ixy} zu multipliciren, so dass auf der rechten Seite die Function $z \equiv e^{ix(2n+1-y)}\operatorname{cosec} x$ hervorgeht; das Ergebniss ist sodann mit e^{ixy} zu multipliciren.

Die Gleichstellung der **reellen** Bestandteile einerseits und der **imaginären** andererseits liefert schliesslich die im allgemeinen für $2n<y<2n+0$ giltigen Summenformeln:

---

*) Jedoch nur für das Intervall (0, 2) bzhw. (—2, 2).

$$(9) \ldots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \mathfrak{Imag.} \{e^{ixy} D_x^{m-1} e^{ix(2n+1-y)} \cdot \operatorname{cosec} x\}$$

$$(10) \ldots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \mathfrak{Reell} \{e^{ixy} D_x^{m-1} e_i^{y(2n+1-y)} \cdot \operatorname{cosec} x\}$$

Um die höheren Ableitungen der Function z in **independenter Weise** zu erhalten, betrachte man dieselbe als Function von e^{ix} und wende die hiefür geltende einfache Formel von Hoppe an.

Ein übersichtlicheres Resultat ergibt die recurrente Berechnung und zwar

$$(11) \ldots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy(x+\lambda\pi)}}{(x+\lambda\pi)^m} = \frac{(-1)^{m-1} e^{i(2n+1)x}}{(m-1)! \sin^m x} \times$$

$$\begin{vmatrix} \sin x, & 0, & 0, & \ldots 1 \\ \cos x, & \sin x, & 0, & \ldots iu \\ -\sin x, & \binom{2}{1}\cos x, & \binom{2}{2}\sin x, & \ldots (iu)^2 \\ -\cos x, & -\binom{3}{1}\sin x, & +\binom{3}{2}\cos x, & \ldots (iu)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \sin\left(x+\overline{m-1}\frac{\pi}{2}\right), & \binom{m-1}{1}\sin\left(x+\overline{m-2}\frac{\pi}{2}\right), & \binom{m-1}{2}\sin\left(x+\overline{m-3}\frac{\pi}{2}\right) & \ldots (iu)^{m-1} \end{vmatrix}$$

woraus

setzend

$$2n+1-y=0$$

$$(12) \ldots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m}$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)! \sin^m x} \begin{vmatrix} \sin x, & 0, & 0, & \ldots \sin \overline{2n+1}\, x \\ \cos x, & \sin x, & 6, & \ldots u \cos \overline{2n+1}\, x \\ -\sin x, & \binom{2}{1}\cos x, & \binom{2}{2}\sin x, & \ldots -u^2 \sin \overline{2n+1}\, x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\cos x, & -\binom{3}{1}\sin x, & \binom{3}{2}\cos x, \ldots \\ & & -u^3\cos\overline{2n+1}x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin\left(x+\overline{m-1}\frac{\pi}{2}\right), & \binom{m-1}{1}\sin\left(x+\overline{m-2}\frac{\pi}{2}\right) \\ & \binom{m-1}{2}\sin\left(x+\overline{m-3}\frac{\pi}{2}\right), \ldots & \alpha u^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-2}{2}} \cos\overline{2n+1}\,x, & m \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin\overline{2n+1}\,x, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$(13) \ldots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!\,\sin^m x} \begin{vmatrix} \sin x, & 0, & 0, & \ldots \cos\overline{2n+1}\,x \\ \cos x, & \sin x, & 0, & \ldots -u\sin\overline{2u+1}\,y \\ -\sin x, & \binom{2}{1}\cos x, & \binom{2}{2}\sin x, \ldots \\ & & \ldots -u^2\cos\overline{2n+1}\,x \\ -\cos x, & -\binom{3}{1}\sin x, & \binom{3}{2}\cos x, \\ & & \ldots +u^3\sin\overline{2n+1}\,x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin\left(x+\overline{n-1}\frac{\pi}{2}\right), & \binom{m-1}{1}\sin\left(x+\overline{m-2}\frac{\pi}{2}\right) \\ & \binom{m-1}{2}\sin\left(x+\overline{m-3}\frac{\pi}{2}\right), \ldots & \beta u^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$\beta = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} \sin\overline{2n+1}\,x, & m \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos\overline{2n-1}\,x. & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

hervorgeht.

$$\xi = \begin{cases} 0, & m \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} y^{m-1}, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} y^{m-1}, & m \text{ gerade} \\ 0, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

in Uebereinstimmung mit den Formeln (31), (32), (39), (40) der oben citirten Programmarbeit.

Barmen, September 1896.

XVI.

Von der elliptischen Bewegung eines freibeweglichen Massenpunktes unter der Wirkung von Attractionskräften *).

Von

Paul Kindel.

Einleitung.

Gegenstand der folgenden Abhandlung ist das Problem von der elliptischen Bewegung eines frei beweglichen Massenpunktes, welcher der Wirkung von einer oder von mehreren nach gegebenen festen Centren gerichteten Kräften unterworfen ist.

Im ersten Teile soll eine elementare Theorie der elliptischen Bewegung um ein festes Attractionscentrum gegeben werden, und zwar um einen der Brennpunkte (§§ 1 und 2) und um einen beliebigen Punkt (§ 3) Dieser Teil, aus den praktischen Bedürfnissen des Unterrichts hervorgegangen, beansprucht nur pädagogisch-didaktisches Interesse; überdies ist er freilich auch die Grundlage für die folgenden Untersuchungen.

Im zweiten Teile werden die von Hamilton durch Anwendung von Quaternionen und das von Darboux direct gefundene Theorem durch directe Integrationen abgeleitet und aus denselben neue Lehrsätze über die Natur der Bahnen gefolgert (§§ 4 und 5).

---

*) Dissertation. Halle 1884.

$$\xi = \begin{cases} 0, & m \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} y^{m-1}, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} y^{m-1}, & m \text{ gerade} \\ 0, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

in Uebereinstimmung mit den Formeln (31), (32), (39), (40) der oben citirten Programmarbeit.

Barmen, September 1896.

dieselbe Curve durchlaufen, und wenn in einem gewissen Punkte (A) derselben die Geschwindigkeiten sämtlich übereinstimmen, so liegen die Endpunkte derjenigen geraden Linien, welche die Kräfte darstellen, in einer geraden Linie, welche zur Tangente in A parallel ist.

Ferner darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass bei einer gleichförmigen Geschwindigkeit (c) in einer Kreisbahn, deren Radius a ist, die nach dem Mittelpunkte (M) gerichtete Centralkraft die Grösse $\frac{c^2}{a}$ habe.

Wenn nun ein frei beweglicher Punkt sich in einem Kreise bewegt, und wenn das Attractionscentrum sich in einem beliebigen Punkte (F) der Ebene der Kreisbahn befindet, so wird die nach F gerichtete Kraft (φ) in jedem Punkte (P) der Bahn dem obigen Hilfstheoreme gemäss durch folgende Proportion bestimmt: (s. Fig. 1)

$$\varphi : \frac{c^2}{a} - \overline{PA} : a$$

wenn MA skr. PM ist und c die Geschwindigkeit in P bedeutet.

Bezeichnet T die Umlaufszeit, so ist wegen der Constanz der Flächengeschwindigkeit ([4]) des Radius-Vectors:

$$a^2\pi = \tfrac{1}{2} \cos T$$

wenn s die von F auf die Tangente in P gefällte Senkrechte bedeutet.

Die vorige Proportion ergiebt:

$$\varphi = \frac{c^2}{a^2} \overline{PA} = \frac{4a^2\pi^2}{T^2} \frac{\overline{PA}}{s^2}$$

Endlich entnimmt man der Figur unmittelbar:

$$\frac{\overline{PA}}{a} = \frac{r}{s} = \frac{2a}{PE}$$

folglich erhält man

$$\varphi = \frac{4a^2\pi^2}{T^2} \frac{r}{s^2} = \frac{32a^2\pi^2}{T^2} \frac{1}{r^2 PE^3}$$

Diese Gleichung giebt die Lösung der obigen Newton'schen Hilfsaufgabe in zwei verschiedenen Formen ([5]). Um aber folgende Hauptaufgabe ([6]) Newton's zu lösen:

Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetae tendentis ad umbilicum Ellipseos,

muss man die vorher betrachtete Kreisbewegung auf eine Ebene projiciren, welche die Kreisebene längs MF unter einem Neigungswinkel (α) schneidet, der durch die Gleichung

$$\sin \alpha = \frac{e}{a}$$

bestimmt ist ([7]) ($e = MF$ gesetzt). Die für die Projectionsbewegung erforderliche Kraft (φ_1) ist ebenfalls nach F gerichtet und durch die Proportion

$$\varphi : \varphi_1 = r : r_1$$

bestimmt. (r_1 bezeichnet die Projection von r.)

In dem Beweise endlich ([8]), dass durch die Projection in der Tat eine Ellipse entsteht, deren Brennpunkte F und F_1 sind, wird gezeigt, dass GF oder $s = r_1$ ist.

Somit ergiebt sich

$$\varphi_1 = \frac{4a^2\pi^2}{T^2}\frac{r_1}{r_1^3} = \frac{4a^2\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

d. h.: Newton's Gravitations-Gesetz und zugleich das dritte Kepler'sche Gesetz.

§ 2.

Die von Newton gestellte Aufgabe: ([1])

Posito, quod vis centripeta sit reciproce proportionale quadrato distantiae locorum a centro et quod vis illius quantitas absoluta sit cognita: requiritur linea, quam corpus describit de loco dato, cum datâ velocitate, secundum datam rectam egrediens.

ist von ihm selbst nicht elementar gelöst worden. Es ist aber für die praktischen Bedürfnisse von grösster Bedeutung, eine elementar zu begründende, einfache und anschauliche Construction zu kennen. Eine solche ergiebt sich fast unmittelbar aus der Gleichung: ([2])

$$v^2 = \frac{g(2a - r)}{ar}$$

in welcher r die Entfernung des bewegten Punktes vom attrahirenden Brennpunkt, v die Geschwindigkeit, g die Beschleunigung in der Entfernungseinheit und a die halbe grosse Axe bedeutet.

Durch Auflösung dieser Gleichung nach a ergiebt sich

$$2a = \frac{r^2}{r-h}, \quad \text{wobei } h = \frac{v^2}{2g : r^2}$$

gesetzt ist.

h bedeutet denjenigen Weg ([3]), welchen der bewegliche Körper von einem Punkte (A) seiner Bahn aus, geradlinig und mit der Anfangsgeschwindigkeit = 0 durchlaufen müsste, um seine Geschwindigkeit v zu erreichen, wenn die Beschleunigung constant gleich derjenigen ($g : r^2$) ist, welche er in diesem Punkte (A) erleidet.

Diese Grösse (h) ist für die Anfangsstellung gegeben. Die obige Gleichung für $2a$ kann auch in folgende umgeformt werden:

$$\frac{2a-r}{r} = \frac{h}{r-h}$$

und alsdann lehrt sie folgende Construction: (s. Fig. 2.)

Das gegebene Attractionscentrum (F) wird mit der Anfangsstellung in A verbunden, und an die über A verlängerte Bewegungsrichtung (AE) d. h. an AE_1 wird der Winkel FAE angelegt. Ferner wird h auf der so erhaltenen Richtung AL von A aus (AD) und auf FA von F aus (FC) abgetragen. Endlich wird C mit D verbunden, und $FF_1 \parallel CD$ gezogen. F_1 ist der zweite Brennpunkt.

§ 3.

In ganz entsprechender Weise, wie in § 1., kann aus dem für die kreisförmige Bewegung gefundenen Gesetze

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \left(\frac{a}{s}\right)^2$$

das für die elliptische Bewegung um ein beliebiges Attractionscentrum geltende Kraftgesetz elementar abgeleitet werden.

Man muss nur $\frac{a}{s}$ durch ein Verhältniss zwischen zwei solchen Linien im Kreise ersetzen, dass es gleich demjenigen zwischen den entsprechenden Linien in der durch Projection entstehenden Ellipse ist. Dazu benutzt man die Gleichung

$$1) \quad \frac{a}{s} = \frac{\varrho_0}{\varrho} \; ([1])$$

in welcher ϱ_0 und ϱ die resp. vom Kreismittelpunkt und vom be

weglichen Punkt (P) auf die Polare des Attractionscentrums (F) gefällten Lote bedeuten.

Eine zweite Umformung ergiebt sich aus der Gleichung

$$\varrho = \sqrt{p_1 p_2} \; (^2)$$

in welcher p_1 und p_2 die Lote vom beweglichen Punkt P auf die vom Attractionscentrum F gezogenen Tangenten bedeuten.

Letztere Gleichung kann auch in folgende Form gesetzt werden (s. Fig. 3)

$$2) \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \sqrt{\frac{p_1 \, p_2 \, MF}{p_1^0 p_2^0 \, MD}}$$

und zwar bedeuten $p_1^0 p_2^0$ die vom Mittelpunkt auf die obigen Tangenten gefällten Senkrechten (welche beim Kreise mit den Radien a zusammenfallen), und $\frac{MF}{MD}$ ist das Verhältniss zwischen der Entfernung vom Mittelpunkt (M) und Pol (F) zu dem Abschnitte derselben vom Mittelpunkt bis an die Polare von V.

Sowol $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ als auch die rechte Seite der Gleichung 2) behalten bei der Projection ihre geometrische Bedeutung und ihren Wert unverändert bei, so dass man für die elliptische Bewegung erhält

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^3 = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \left(\sqrt{\frac{p_1^0 p_2^0}{p_1 \; p_2} \frac{MD}{MF}}\right)^3$$

Setzt man noch

$$3) \quad g = \frac{4\pi^2 \varrho_0^2}{T^2} \quad \text{und} \quad g_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\sqrt{p_1^0 p_2^0 \cdot \frac{MD}{MF}}\right)^3$$

so erhält man

$$4) \quad \begin{cases} \varphi = g \cdot \dfrac{r}{\varrho^2} = \dfrac{g_1 r}{(\sqrt{p_1 \, p_2})^3} \\[2ex] T^2 = \dfrac{4\pi^2}{g} \varrho_0^3 = \dfrac{4\pi^2}{g_1} \left(\sqrt{p_1^0 p_2^0 \cdot \dfrac{MD}{MF}}\right)^3 \end{cases}$$

Die Kraft (φ) ist also proportional der Entfernung (r) des beweglichen Punktes vom Attractionscentrum und umgekehrt proportional der dritten Potenz: entweder der Entfernung (ϱ) von der

Polare des Attractionscentrums (Umkehrung des Satzes von Hamilton) [3] oder der mittleren Proportional ($\sqrt{p_1 p_2}$) zwischen den Entfernungen von demjenigen Tangenten, welche von Attractionscentrum an die Ellipse gezogen werden, (Umkehrung des Satzes von Darboux). [4]

Zweiter Teil.

§ 4.

Dass aus der in § 3 bewiesenen Umkehrung des Satzes von Hamilton der Satz selbst gefolgert werden könne, ist von Darboux bemerkt worden [1]. Interessanter jedoch als diese Methode (der Constantenzählung) ist der directe Beweis, besonders auch darum, weil er weitere Schlüsse über die Art und die Construction der Bahn zulässt.

In dem Lehrsatze von Hamilton wird die Centralkraft

$$\varphi = \frac{g_1 r}{p^3}$$

proportional gesetzt mit der Entfernung (r) von F (dem Attractionscentrum) und der reciproken dritten Potenz der senkrechten Entfernung (p) von einer festen Ebene (E).

Dass die Bahn zunächst selbst in einer gewissen Ebene (E_1) liegt, welche den Punkt F enthält, folgt schon aus Newton's Theorie der Centralkräfte Wird der Neigungswinkel beider Ebenen (E, E_1) mit α, ihre Schnittlinie mit L und die senkrechte Entfernung des bewegten Punktes von der letzteren mit ϱ bezeichnet, so ist

$$p = \varphi \cos \alpha$$

und also

$$\varphi = g_1 \cos^3\alpha \frac{r}{\varrho^2}$$

d. h. die Kraft ist in allen Punkten einer Ebene E_1 ausser mit s auch mit der reciproken dritten Potenz der senkrechten Entfernung (ϱ) von einer gegebenen geraden Linie (L) proportional. Es genügt somit, den Satz für diesen Fall nachzuweisen.

Man nehme die Ebene (E_1) als xy-Ebene, F als Anfangspunkt, die von F auf L gefällte Senkrechte habe die Länge a, ihre Richtung werde als die negative x-Axe, und also eine zu L durch F

parallel gezogene Gerade als y-Axe genommen (s. Fig. 2); die nach F gerichtete Centralkraft sei

$$\varphi = \frac{gr}{(a+x)^2}$$

Wenn g einen positiven Wert hat, so ist φ eine Attractionskraft auf der positiven Seite von R, und eine Repulsionskraft auf der negativen.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind:

$$1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-gx}{(a+x)^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-gy}{(a+x)^3}$$

Die erste Integralgleichung derselben drückt die Constanz der Flächengeschwindigkeit (c) aus:

$$2) \quad ydx - xdy = e \,.\, dt$$

Durch Multiplication der ersten Differentialgleichung mit $2 \frac{dx}{dx}$ und nachherige Integration erhält man

$$3) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g\frac{(a+2x)}{(a+x)^2} - \frac{g}{b}$$

(worin b eine Integrationsconstante bedeutet).

Durch Elimination von dt aus den Gleichungen 2) und 3) ergiebt sich

$$4) \quad \frac{dx(a+x)}{\sqrt{a\beta + 2\beta x - x^2}} = \gamma(ydx - xdy)$$

wobei zur Abkürzung

$$\beta = b - a$$

$$\gamma = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{g}{b}}$$

gesetzt ist, γ also reell oder rein imaginär sein kann. Um die Gleichung 4) zu integriren, wird eine neue Variabele u durch die Gleichung

$$y = ux$$

eingeführt. Man erhält dadurch

$$5) \quad \gamma du = \frac{1}{\beta}\, d\left(\frac{1}{x}\sqrt{a\beta + 2\beta x - x^2}\right.$$

und hieraus ergiebt sich die Gleichung der Bahn

$$fx + \beta\gamma y = \sqrt{a\beta + 2\beta x - x^2}$$

(f ist eine Integrationsconstante, welche zugleich mit γ reell oder rein imaginär sein muss), oder

$$6) \quad x^2(1 + f^2) + 2f\beta\gamma xy + \beta^2\gamma^2 y^2 - 2\beta x - a\beta = 0$$

Die Polare des Anfangspunktes hat die Gleichung

$$x = -a$$

(entsprechend dem Lehrsatze von Hamilton).

Der Mittelpunkt des Kegelschnitts hat die Coordinaten

$$x_0 = \beta, \; y_0 = -\frac{f}{\gamma}$$

Das Product seiner Axen ist

$$= bc\sqrt{\frac{b}{g}}$$

und also erhält man für die Umlaufszeit

$$T = 2\pi b\sqrt{\frac{b}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\varrho_0^{3/2}$$

(in Uebereinstimmung mit § 3).

Endlich ist die Bahn Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$\beta^2 f^2 \gtreqless 0$$

ist. Die Annahme $\beta = 0$ kann ausgeschlossen werden, weil sonst die Gleichung der Bahn sich auf

$$x^2(1 + f^2) = 0$$

reduciren würde.

Es ist somit

$$\beta^2 = (b - a)^2$$

positiv, und da ferner

$$\gamma^2 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{g}{b}$$

ist, so vereinfacht sich das Kriterium über die Art des Kegelschnitts zu folgendem

$$\frac{g}{b} \gtreqless 0$$

oder endlich zu

$$\frac{g(a+2)}{(a+x)^2} \gtreqless \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (^2)$$

Es werde nun g als positiv vorausgesetzt. Alsdann gelten folgende Lehrsätze:

Wenn der Anfangspunkt der Bewegung auf der negativen Seite einer geraden Linie L_1) liegt, welche in der Milte zwischen F und und L mit L parallel läuft, d. h. wenn $a+2x$ negativ ist, so ist die Bahn, wie auch sonst die Anfangsbedingungen sein mögen, hyperbolisch.

Von einem Punkte der Geraden L_1 aus ist die Bahn eine Parabel, wenn die Richtung mit der x-Axe zusammenfällt, sonst aber eine Hyperbel.

Von einem Punkte auf der positiven Seite von L_1, ist die Bahn bei hinreichend kleiner x-Componente der Anfangsgeschwindigkeit elliptisch; bei grösserer wird sie parabolisch und hyperbolisch.

Endlich ist die Art des Kegelschnitts von der Grösse der x-Componente der Geschwindigkeit und von der y-Coordinate des Anfangspunktes unabhängig.

Um die Bahn zu construiren (s. Fig. 5), beachte man, dass wenn F, L, P (der Anfangspunkt der Bewegung) PA (die Anfangsrichtung) gegeben sind, auch der zweite Schnittpunkt (P_1) der Bahn mit der Geraden PF als der vierte harmonische Punkt zu F, B, P bekannt ist, dass ferner A der Pol von PP_1 ist, und dass also der Mittelpunkt des Kegelschnitts in derjenigen geraden Linie liegt, welche A mit dem Halbirungspunkte C von PP_1 verbindet. Da endlich durch die Grösse der Anfangsgeschwindigkeit (der Gleichung 3) entsprechend) die Constante

$$b = a + \beta$$

gegeben ist, und da $a+\beta$ die senkrechte Entfernung des Mittelpunktes von der Geraden L bedeutet, so ist der Mittelpunkt (M) des Kegelschnitts vollständig bestimmt; damit kennt man auch die Schnittpunkte QQ_1 der Bahn auf der Geraden MA (weil $MQ^2 = MC \,.\, MA$) und endlich noch den zu R symmetrisch gelegenen Punkt P_2. Die fünf Punkte PP_1, QQ_1, P_2 reichen zur Construction hin.

§ 5.

Der zweite in § 2. aufgestellte Lehrsatz, dass bei elliptischer Bahn die Centralkraft proportional sei mit der Entfernung (r) und mit der reciproken dritten Potenz der mittleren Proportionale zwischen den Entfernungen p_1, p_2 von zwei festen geraden Linien L_1, L_2, welche die vom Attractionscentrum an die Bahn gelegten Tangenten sind, lässt sich ebenso wie der vorige Lehrsatz umkehren. Wieder erscheint die directe Integration nicht überflüssig zu sein. ([1])

Die beiden Richtungen, welche die Winkel L_1 und L_2 halbiren, nehme man als die Coordinatenaxen, λ sei die Neigung der Geraden L_2 gegen die x-Axe Man findet

$$p_1 = x \sin\lambda - y \cos\lambda$$
$$p_2 = x \sin\lambda + y \cos\lambda$$

In demjenigen Scheitelwinkelraum, in welchem die x-Axe liegt, haben p_1, p_2 gleiche Vorzeichen, in diesem ist also die mittlere Proportionale zwischen p_1 und p_2

$$p = \sqrt{x^2 \sin^2\lambda - x^2 \cos^2\lambda}$$

reell, und die nach F gerichtete Attractionskraft hat die Grösse

$$\varphi = \frac{gr}{p^2}$$

Um aber die Integration in grösst möglicher Allgemeinheit auszuführen, werde

$$p^2 = x^2 \sin^2\lambda - y^2 \cos^2\lambda$$

durch

$$q^2 = ax^3 + 2kxy + by^2$$

ersetzt. Alsdann heissen die Bewegungsgleichungen

$$1)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{q^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gy}{q^3}$$

und ihre erste Integralgleichung

$$2)\quad ydx - xdy = cdt$$

Mit Hilfe dieser Gleichung nehmen die in (1) folgende Form an:

$$d\frac{dx}{dt} = -\frac{gx(ydx - xdy)}{cq^3} = \frac{g}{c(ab = k^2)} d\left[\frac{by + kx}{q}\right]$$

$$d\frac{dy}{dt} = -\frac{gy(ydx - xdy)}{cq^3} = \frac{-g}{c(ab-k^2)}\,d\left[\frac{ax+ky}{q}\right]$$

oder durch Integration:

$$3)\quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{g}{c(ab-k^2)}\left[\frac{by+kx}{q} - \alpha\right] \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{-g}{c(ab-k^2)}\left[\frac{ax+ky}{q} - \beta\right] \end{aligned}$$

und durch Substitution in (2) erhält man die Gleichung der Bahn

$$(\gamma + \alpha y + \beta x)^2 = ax^2 + 2kxy + by^2$$

worin

$$\gamma = \frac{c^2}{g}(ab - k^2)$$

gesetzt ist.

Für die nähere Untersuchung der Bahn ist es vorteilhaft, die ursprüngliche Lage der Coordinatenaxen zu nehmen und also $k = 0$ zu setzen. Alsdann heisst die Gleichung der Bahn

$$4)\quad x^2(\beta^2 - a) + 2\alpha\beta xy + y^2(\alpha^2 - b) + 2\beta\gamma x + 2\alpha\gamma y + \gamma^2 = 0$$

und dieselbe ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$A = (\beta^2 - a)(\alpha^2 - b) - \alpha^2\beta^2 \gtreqless 0 \text{ ist.}$$

Zur Elimination von α und β dienen die Gleichungen (3). Mit Benutzung derselben erhält man:

$$A = \frac{2a^2b^2c^2}{gq} - \frac{a^2b^2c^2}{g^2}\left(b\frac{dy^2}{dt^2} + a\frac{dx^2}{dt^2}\right)$$

Wenn ferner die Geschwindigkeit mit v, ihre Neigung zur x-Axe mit μ und die zur Erreichung der Geschwindigkeit v notwendige Fallhöhe mit h bezeichnet wird, so ist

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\mu,\quad \frac{dy}{dt} = v\sin\mu,\quad h = \frac{v^2}{2gr}q^3$$

und wenn endlich noch zur Abkürzung

$$\delta = b\sin^2\mu + a\cos^2\mu$$

gesetzt wird, so erhält man

$$5)\quad A = \frac{2a^2b^2c^2}{gq}\left(1 - \frac{hr\delta}{q^2}\right)$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind

$$x_0 = \frac{b\beta\gamma}{A}, \quad y_0 = \frac{a\alpha\gamma}{A}$$

und für das Product der Axen des Kegelschnitts findet man:

$$\frac{c}{2\sqrt{2g}}\left(\frac{q}{1-\frac{hr\delta}{q^2}}\right)^{3/2}$$

so dass die Umlaufszeit

$$6)\quad T = \frac{n}{\sqrt{2g}}\left(\frac{q}{1-\frac{hr\delta}{q^2}}\right)^{3/2}$$

sich ergiebt.

Durch diese Formel ist die Umlaufszeit unmittelbar durch die gegebenen Anfangsbedingungen bestimmt. Eine leichte Umformung ergiebt übrigens die Uebereinstimmung mit dem in § 3. angegebenen Resultate.

Für Newton's Centralbewegung hat man

$$a = b = 1, \quad k = 0, \quad q = r, \quad \delta = 1, \quad A = \frac{2c^2}{gr}\left(1-\frac{h}{r}\right)$$

$$T = \frac{n}{\sqrt{2g}}\left(\frac{r}{1-\frac{h}{r}}\right)^{3/2}$$

Wenn die beiden geraden Linien L_1, L_2 reell sind, und wenn

$$q = p = \sqrt{x^2\sin^2\lambda - y^2\cos^2\lambda}$$

gesetzt wird, so ist die Kraft

$$\varphi = \frac{gr}{p^2}$$

bei reellem g nur in demjenigen Scheitelwinkelraum (L_1, L_2) reell, in welchem die x-Axe liegt, und in demselben ist φ eine Attractions- oder eine Repulsionskraft, je nachdem g und p gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Es mögen nun im folgenden g und p als positiv vorausgesetzt werden. Dann ist die Bahn Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\frac{hr\delta}{p^2} \lesseqgtr 1$ ist, und da

$$\delta = b\sin^2\mu + a\cos^2\mu = \sin^2\lambda\cos^2\mu - \cos^2\lambda\sin^2\mu = \sin^2\lambda - \sin^2\mu,$$

$$p^2 = x^2\sin^2\lambda - y^2\cos^2\lambda$$

$$h = \frac{v^2}{2gr}\cdot p^2$$

zu setzen ist, so kann das Kriterium über die Art der Bahn auch in folgende Form gesetzt werden:

$$\frac{\gamma^2}{2g}\sqrt{x^2\sin^2\lambda - y^2\cos^2\lambda}\,(\sin^2\lambda - \sin^2\mu) \lesseqgtr 1$$

Hieraus folgt:

Diejenigen Anfangsrichtungen, für welche von einem Punkte P_0 aus bei einer gewissen Geschwindigkeit v_0 die Bahn eine Parabel ist, liegen zu den Coordinatenaxen symmetrisch. Dieselben bestimmen zwei Scheitelwinkelräume; in demjenigen, welcher die x-Axe enthält, sind die Bahnen (cet. par.) hyperbolisch, und in demjenigen, welcher die Richtung der y-Axe enthält, sind dieselben elliptisch.

Wenn die Anfangsrichtung mit der von L_1 oder L_2 übereinstimmt (d. h. wenn $\mu = \pm\lambda$), oder wenn dieselbe sich noch mehr der Richtung der y-Axe nähert ($\sin^2\mu > \sin^2\lambda$), so ist die Bahn elliptisch, welches auch sonst die Anfangsbedingungen sein mögen.

Wenn bei gewisser Grösse der Anfangsgeschwindigkeit v_0 die Richtung derselben für die parabolische Bahn mit derjenigen der x-Axe übereinstimmt, so sind von demselben Punkte aus bei derselben Geschwindigkeit v_0 nur elliptische Bahnen möglich. Die Lage dieser Grenzpunkte, durch welche für $v = v_0$ nur eine parabolische Bahn hindurchführt, sind durch die Gleichung

$$x^2\sin^2\lambda - y^2\cos^2\lambda = \left(\frac{2g}{v_0^2\sin^2\lambda}\right)^2$$

bestimmt, dieselben liegen also auf einer Hyperbel, welche die Geraden L_1, L_2 zu Asymptoten hat, und deren Axen mit dem Quadrate der Anfangsgeschwindigkeit umgekehrt proportional sind.

Durch diese Hyperbel wird die ganze Ebene in zwei Teile geteilt; in demjenigen Teile, welcher die y-Axe enthält, liegen die Punkte, von denen aus für $v = c_0$ nur elliptische Bahnen möglich sind; im anderen Teile ist die Art des Kegelsschnitts erst durch die Anfangsrichtung bedingt.

Endlich ändert sich die Art des Kegelschnitts nicht, wenn (cet. par.) der Anfangspunkt sich auf irgend welcher Hyperbel verschiebt, welche die Geraden L_1, L_2 zu Asymptoten hat (weil auf derselben $x^2 \sin^2\lambda - y^2 \cos^2\lambda = \text{const}$).

Dritter Teil.

§ 6.

Die Frage, ob Newton's Voraussetzungen — elliptische Bahn und constante Flächengeschwindigkeit des von einem Brennpunkt ausgehenden Radius-Vectors — beide durchaus notwendig seien, um den Schluss auf das Gravitationsgesetz zu ermöglichen, ist zuerst von Bertrand gestellt und durch den Satz beantwortet: ([1])

> Si Kepler n'avait déduit de ses observations qu'une seule de ses lois: Les planétes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe le foyer, on aurait pu de ce seul resultat, érigé en principe général, conclure que la force qui les gouverne est dirigée vers de Soleil et inversement proportionnelle au carré de la distance.

Der wol nicht ganz correcte Zusatz „ce seul résultat érigé en principe général" bedeutet die Annahme, dass, welches auch die Anfangsbedingungen der Bewegung hätten sein mögen, stets eine elliptische, parabolische, hyperbolische oder geradlinige Bewegung erfolgt wäre.

Es ist von Interesse zu sehen, dass bei dieser Voraussetzung das Newton'sche Gesetz sich ohne jede Rechnung ergiebt.

Zunächst stellt Halphen den Satz auf: ([2])

> Si une force, dépendant seulement de son point d'application, fait décrire à ce point, quelles que soient les circonstances initiales, une trajectoire plane, cette force passe par un point fixe ou est parallèle à une direction fixe.

Halphen beweist seinen Satz nach den Principien der Variationsrechnung. Dasselbe leistet auch folgende geometrische Betrachtung:

Wenn ein frei beweglicher Punkt sich in einer Curve bewegt, so liegt die Kraft in jedem Augenblick in der Schmiegungsebene

wenn also die Curve eine ebene ist, so werden alle Kraftrichtungen in ihrer Ebene liegen. Nach der Annahme von Halphen wird also jede Kraftrichtung im ganzen Raume von jeder unendlich nahen geschnitten, und je zwei unendlich nahe Kraftrichtungen bestimmen eine Ebene. Denkt man sich nun einen dritten beiden unendlich nahen Punkt ausserhalb der Ebene, so muss die ihm zugehörige Kraftrichtung die vorigen beiden schneiden, d. h. auch diese muss durch den vorigen Schnittpunkt hindurchgehen. Dieser Schluss gilt von Punkt zu Punkt durch den ganzen Raum, und somit ist der Satz von Halphen bewiesen.

Mit Hilfe dieses Satzes folgt aus den Voraussetzungen von Bertrand, dass der gemeinschaftliche Brennpunkt aller elliptischen Bahnen das Attractionscentrum ist; und nun kann man, wie Bertrand selbst ([3]), auf Newton's Rechnung verweisen. Aber man darf nicht übersehen, dass, während bei Newton's Voraussetzung die Rechnung notwendig war, wie sie bei Bertrand's Voraussetzungen überflüssig wird.

Wenn nämlich ein beliebiger Punkt (P) im Raume angenommen wird, so würde von diesem aus der Massenpunkt eine gerade Linie beschreiben, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit 0 ist; er würde, wenn ihm eine hinreichend kleine Geschwindigkeit in senkrechter Richtung gegen den Radius-Vector erteilt wird, eine Ellipse beschreiben, in welcher P das Aphelium ist, und wenn die Geschwindigkeit allmählich wächst, so würde die Bahn in einen Kreis, dann in eine Ellipse, in welcher P das Perihelium ist, endlich in eine Parabel und zuletzt in eine Hyperbel übergehen. Es ist nämlich der Parameter (p) der Curve oder der Krümmungsradius im Perihel oder Aphel durch die Gleichung

$$p = \frac{v^2}{\varphi}$$

bestimmt, in welcher φ die in P wirkende Kraft bezeichnet; und es wächst also der Parameter wie das Quadrat der Geschwindigkeit.

Wenn nun r und r_1 beliebige Längen sind, so kann man dieselben also als Perihel- und Apheldistanzen einer der unendlich vielen elliptischen Bahnen ansehen. Im Perihel und Aphel aber verhalten sich die Kräfte wie die Quadrate der Geschwindigkeit und also auch — nach dem Flächensatz — umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen r und r_1. Somit ist Newton's Satz abgeleitet. ([4])

Bertrand hat selbst die oben angegebene Voraussetzung modificirt und folgende Aufgabe gestellt:

En sachant que les planètes décrivent des sections coniques et sans rien supposer de plus: trouver l'expression des composantes de la force qui les sollicite, exprimées en fontion des coordonnés de son point d'application.

Diese Aufgabe ist von Darboux, (5) Halphen, (6) Imchénetsky, (7) Glaisher (8) behandelt und gelöst worden.

Man darf aber trotz des von Bertrand gemachten Zusatzes „sans rien supposer de plus" nicht übersehen, dass Bertrand an die Stelle von Newton's durch die Beobachtung festgestellten Voraussetzungen unendlich viele andere setzt, die sich der Controle durch die Erfahrung entziehen. Denn so viele elliptische Bahnen auch beobachtet sein mögen, es hindert a priori nichts, den Anfangszustand der Bewegung als eine wesentliche Bedingung für die Möglichkeit der elliptischen Bahn anzusehen.

Im folgenden wird nun die Bertrand'sche Voraussetzung grundsätzlich ausgeschlossen.

§ 7.

Durch den Lehrsatz von Hamilton ist zwar für jede beliebige Stellung des Attractionscentrums in der Ebene der elliptischen Bahn sofort auch das Attractionsgesetz gegeben, aber dasselbe wird im allgemeinen Consequenzen ergeben, die jeglicher Erfahrung widersprechen. Es enthält nämlich der Lehrsatz von Hamilton ausser der Entfernung (r) vom Attractionscentrum noch die variabele Entfernung (ϱ) des bewegten Punktes von der festen Polare des Attractionscentrums. Wenn nun dieselbe (ϱ) nicht eine eindeutige Function der Entfernung (r) ist, so ist auch die Kraft nicht eine eindeutige Function der Entfernung (r).

Hoppe (1) setzt voraus, dass das Potential der Kraft (und somit diese selbst) durch die Entfernung eindeutig bestimmt sein müsse. Er findet, dass bei dieser Voraussetzung das Attractionscentrum — abgesehen vom Ellipsenmittelpunkt — auf diejenigen Teile der Axen beschränkt ist, welche ausserhalb der Evolutenfläche liegen. Seine Resultate leitet er durch ermüdende Rechnungen aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen der Centralbewegung her. Aus dem Satze von Hamilton ergeben sie sich unmitelbar:

Wenn nämlich das Attractionscentrum (F) (s. Fig 6) zunächst ausserhalb der Axen stünde, so wäre der zu MF conjugirte Durchmesser (MB) schief gegen MF, also ebenso auch die Polare von F (d. h. GE), und je zwei Ellipsenpunkte (A, A_1), welche von der

Polare gleiche Abstände (ϱ, ϱ_1) haben, würden von P verschiedene Entfernungen (r, r_1) haben, und umgekehrt. In diesem Falle wäre also die Kraft eine mehrdeutige Function der Entfernung.

Wenn ferner das Attractionscentrum zwar in einer der Axen, aber innerhalb der Evolutenfläche und nicht im Ellipsenmittelpunkte stände, so könnte man von ihm aus eine Normale auf die Ellipse fällen, deren Fusspunkt in keiner der Axen liegt (²). Im Endpunkte dieser Normalen (A) (s. Fig. 7) wäre die Bewegungsrichtung schief gegen die Axen und also auch schief gegen die Polare (GE) des Centrums (F) gerichtet. In je zwei unendlich nahen Punkten (B, B_1) zu beiden Seiten des Fusspunktes (A), für welche die Entfernungen (r, r_1) gleich gross sind, würden also die Entfernungen (ϱ, ϱ_1) von der Polare verschieden gross sein.

Das Attractionscentrum ist somit auf solche Punkte der Axen beschränkt, von denen es andere Normalen als die Axenrichtungen nicht giebt, d. h. es ist der Mittelpunkt oder ein Punkt der Axen ausserhalb der Evolutenfläche.

§ 8.

Die Voraussetzungen von Hoppe sind vom physikalischen Standpunkt aus ganz unbedenklich, aber sie führen nicht zur vollständigen Bestimmung des Attractionsgesetzes. Um dies zu erreichen, muss man sie durch andere ersetzen. Zunächst wird man es als selbstverständlich ansehen dürfen, dass nur solche Attractionscentren vorkommen können, für welche sich ein derartiges Attractionsgesetz ergiebt, dass für alle reellen Entfernungen (r), auch wenn dieselben in der zu Grunde gelegten speciellen Ellipse nicht vorkommen, die Kraft einen reellen Wert besitze. Es soll nun untersucht werden, auf welche Lagen das Attractionscentrum durch diese Annahme beschränkt wird.

Zu diesem Zwecke muss zunächst in der Gleichung (§ 2.)

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{r}{\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^3}$$

$\frac{\varrho}{\varrho_0}$ als Function der Entfernung (r) ausgedrückt werden.

Die Coordinaten des Attractionscentrums (F) seien f, k; die des beweglichen Punktes xy; die irgend eines Punktes der Polare des Attractionscentrums $\xi\eta$; dann gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{f\xi}{a^3}+\frac{k\eta}{b^2}=1$$

und nach den Regeln der analytischen Geometrie ist

$$1)\quad \frac{\varrho}{\varrho_0}=1-\frac{fx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}$$

Aus dieser und den beiden folgenden

$$2)\quad 0=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

$$3)\quad r^2=(x-f)^2+(y-k)^2$$

muss x und y eliminirt werden. Alsdann findet man $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ als Function von r ausgedrückt, und es soll dieselbe für jeden positiven Wert von r einen reellen Wert besitzen. Es muss also auch

$$\lim_{r=\infty}\left[\frac{\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)}{r}\right]$$

reell sein.

Nun ergiebt sich aber aus der zweiten Gleichung, dass y und x gleichzeitig unendlich gross werden, und daher kann man aus der dritten Gleichung schliessen, dass mit r zugleich sowol x als auch y unendlich werden. Für $r=\infty$ erhält man demnach:

$$\frac{y^3}{x^2}=\frac{-b^2}{a^2},\quad \frac{r^2}{x^2}=\frac{\varrho^2}{a^2},\quad \frac{e^2}{y^2}=\frac{-e^2}{b^2}$$

und

$$\frac{r}{\varrho_0}:r=-\frac{f}{a^2}\frac{x}{r}-\frac{k}{b^2}\frac{x}{r}$$

Da aber $\frac{x}{r}$ reell und $\frac{y}{r}$ imaginär sich ergeben hat, so folgt, dass der Grenzwert von $\frac{\varrho}{\varrho^0}:r$ reell ist, nur dann, wenn $k=0$ genommen wird. Hiermit ist das Attractionscentrum zunächst auf die grosse Axe der Ellipse beschränkt.

Ferner ergeben die beiden letzten Gleichungen durch Elimination von y:

$$\frac{e^2}{a^2}x^2 - 2fx + b^2 + f^2 - r^2 = 0$$

also ist

$$x = \frac{a^2}{e^2} f \pm \frac{a}{e}\sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}$$

Aus dieser Gleichung kann ferner geschlossen werden, dass das Attractionscentrum nicht zwischen dem Mittelpunkt und einem Brennpunkt stehen darf.

Wäre dieses nämlich der Fall, so wäre

$$0 < f^2 < e^2$$

und für hinreichend kleine Werte von r würde x imaginär und mit x zugleich auch $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ (nach der ersten Gleichung) und endlich also auch die Kraft φ.

Wenn dagegen entweder $f = 0$ oder $f^2 = e^2$ oder $f^2 > e^2$ ist, so hat $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ für alle positiven Werte von r einen reellen Wert, und hiermit zugleich auch φ.

In dem Falle, dass $f^2 \geqq e^2$ ist, lässt sich auch das Vorzeichen der in dem Ausdruck für x vorkommenden Wurzel bestimmen Da nämlich dieselbe niemals durch null hindurchgeht, so tritt kein Zwischenwechsel ein, wie sich auch r ändern möge Da nun während der Bewegung auch $x = 0$ vorkommt, so muss das Zeichen immer dem von f entgegengesetzt sein. Sieht man also f als positiv an, so muss

$$x = \frac{a^2}{e^2} f - \frac{a}{e}\sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}$$

gesetzt werden; und alsdann ist

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 - \frac{xf}{a^2}$$

und also auch φ eine eindeutige reelle Function von r.

Hierdurch ist folgender Lehrsatz bewiesen:

> Wenn unter der Wirkung einer nach einem festen Centrum gerichteten Attractionskraft eine elliptische Bewegung erfolgt, so ist die erstere für jede beliebige Entfernung eine

reelle Function nur unter der Bedingung, dass der attra-
hirende Punkt entweder der Mittelpunkt oder einer der
Brennpunkte oder ein Punkt der grossen Axe ausserhal-
der Brennweite ist.

§ 9.

Der im vorigen gewonnene Ausdruck:

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{f^2}{e^2} + \frac{f}{ae}\sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}\right)^3}$$

hat für alle Entfernungen r einen reellen Wert, wenn die absolute Entfernung (f) des Attractionscentrums vom Mittelpunkt der Ellipse entweder 0 oder gleich e oder grösser als e ist.

Wenn zunächst $f = 0$ ist, so wird

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

Wenn aber $f \geqq e$ ist, so wird, je grösser r wird, die Gleichung sich mehr und mehr der Form

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{a^3 e^3}{f^3 v^2}$$

nähern, die freilich nur in dem Falle, dass $f = e$ ist, das Gesetz genau darstellt. Aber wenigstens für unendlich grosse Werte von r wird φ verschwinden, sobald $f \geqq e$ vorausgesetzt wird.

Im übrigen ist die Natur des Attractionsgesetzes wesentlich davon abhängig, ob das Attractionscentrum sich ausserhalb oder innerhalb der Ellipsenfläche befindet.

Wenn erstens sich das Attractionscentrum ausserhalb der Ellipse befindet, d. h. wenn $f > a$ ist, so lassen sich von demselben zwei Tangenten an die Ellipse ziehen. In den Berührungspunkten ist die Geschwindigkeit unendlich gross, weil sie ja der senkrechten Entfernung des Attractionscentrums von der Bewegungsrichtung umgekehrt proportional ist. Mit der Geschwindigkeit wird aber zugleich die Kraft (φ) unendlich gross, während r gleich der Tangentenlänge (r_0) ist. Für $r = r_0$ verschwindet also der Nenner des Ausdruckes für φ; für $r < r_0$ wird der Nenner negativ, d. h. φ ist nun eine

Repulsionskraft, und dieselbe wird kleiner, je kleiner r wird, bis dieselbe für $r = 0$ verschwindet. Dagegen ist der Nenner, in φ für $r > r_0$ positiv, d. h. φ ist nun eine Attractionskraft und dieselbe wird kleiner, je grösser r wird, bis dieselbe für $r = \infty$ verschwindet.

Wenn zwischen sich das Attractionscentrum in einem Endpunkte der grossen Axe befindet, d. h. wenn $f = a$ ist, so wird die Geschwindigkeit und die Kraft φ in diesem Punkte, also für $r = 0$, unendlich gross, bei wachsendem r findet endliche Attraction statt, die erst für $r = \infty$ verschwindet.

Wenn dritttens sich das Attractionscentrum innerhalb der Ellipsenfläche befindet, wenn also $e < f < a$ ist, so wird zunächst der in φ enthaltene Nenner für keinen reellen Wert von r verschwinden.

Denn gesetzt, er wäre null, so müsste

$$\left(\frac{f^2}{e^2} - 1\right)^2 = \frac{f^2}{a^2 e^2}\left[r^2 + b^2\left(\frac{f^2}{e^2} - 1\right)\right]$$

und also

$$r = \frac{ae}{f}\sqrt{\left(\frac{ef}{22} - 1\right)\left(\frac{f^2}{a^2} - 1\right)}$$

imaginär sein.

Hieraus folgt, dass für $r = 0$ auch φ verschwindet, dass ferner für wachsende Werte von r stets endliche Attraction stattfindet, die bis zu einem gewissen Maximum ansteigt, dann aber wieder abnimmt bis dieselbe für $r = \infty$ verschwindet.

Wenn nun z B. durch Beobachtung festgestellt ist, dass gewisse Körper in allen Entfernungen eine Anziehung ausüben, die mit wachsender Entfernung fortwährend abnimmt, so sind um dieselben nur derartige elliptische Bewegungen möglich, dass sie in einem der Brennpunkte oder der Endpunkte der grossen Axe stehen, und wenn die Anziehung mit wachsender Entfernung fortwährend zunimmt, so müssen sie im Mittelpunkte der Ellipse stehen.

§ 10

Es werde ferner vorausgesetzt, dass um ein und dasselbe Attractionscentrum zwei verschiedene Bewegungen erfolgen, und dass die aus beiden Bewegungen abgeleiteten Attractionsgesetze für alle reellen Werte der Entfernungen reelle und übereinstimmende Werte für die Kraft ergeben. [1] Es soll untersucht werden, wie durch diese Annahme die Lage der Centren beschränkt wird.

Aus den gemachten Voraussetzungen folgt unmittelbar, dass Centren in den grossen Axen der elliptischen Bahnen stehen müss und während in der einen Bahn a, b, e, f, T die früheren Bed tungen haben, mögen a_1, b_1, e_1, f_1, T_1 die entsprechende Bedeut für die andere elliptische Bahn haben. Ferner folgt aus der V aussetzung, dass für jeden reellen Wert von r

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{f^2}{e^2} + \frac{f}{ae}\sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}\right)^3}$$

$$= \frac{4\pi^2}{T_1^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2} + \frac{f_1}{a_1 e_1}\sqrt{r_2 - b_1^2 + \frac{b_1^2 f_1^2}{e_1^2}}\right.}$$

sein muss, also folgt auch

$$1)\quad T^{2|3}\left(1 - \frac{f^2}{e^2} + \frac{f}{ae^2}\sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}\right).$$

$$= T_1^{2|3}\left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2} + \frac{f_1}{a_1 e_1}\sqrt{r^2 \quad b_1^2 + \frac{b_1^2 f_1}{e_1^2}}\right.$$

also auch (durch Differentiation)

$$T^{2|3} \frac{f}{ae}\sqrt{r^2 - b_1^2 + \frac{b_1^2 f_1^2}{e_1^2}} = T_1^{2|3} \frac{f_1}{a_1 e_1}\sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn f von 0 verschieden ist,

$$T^{2|3} \frac{f}{ae} = T_1^{2|3} \frac{f_1}{a_1 e_1}$$

$$b^2\left(1 - \frac{f^2}{e^2}\right) - b_1^2\left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2}\right)$$

und aus 1)

$$T^{2|3}\left(1 - \frac{f^2}{e^2}\right) = T_1^{2|3}\left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2}\right)$$

Diese Gleichungen sind zunächst für $f = e$ und $f_1 = e_1$ erfü wenn

$$\frac{T^{2|3}}{a} = \frac{T_1^{2|3}}{a_1}$$

(drittes Kepler'sches Gesetz) ist.

Wenn nun aber die bekannten Fälle

$$f = 0,\quad f_1 = 0$$

$$f = e,\quad f_1 = e_1$$

ausgeschlossen werden, so folgt aus den obigen Gleichungen, wenn

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{T_1}{T}}$$

gesetzt wird

$$2)\quad \tau = \frac{b_1}{b}$$

und da ferner

$$\frac{f}{a\,e} = \tau^2 \frac{f_1}{a_1\,e_1}$$

$$b^2\left(1 - \frac{f^2}{e^2}\right) = b_1^2\left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2}\right)$$

sein muss, so ergiebt sich durch Auflösen beider Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{f}{e} = a\tau\sqrt{\dfrac{1 - \tau^2}{a^2\tau^2 - a_1^2}} \\[2ex] \dfrac{f_1}{e_1} = \dfrac{a_1}{\tau}\sqrt{\dfrac{1 - \tau^2}{a^2\tau^2 - a_1^2}} \end{cases}$$

Bei der oben gemachten Annahme können also zwar die Formen der beiden elliptischen Bahnen selbst beliebig angenommen werden, aber alsdann ist das Verhältniss der Umlaufszeiten und die Stellung des Attractionscentrums und somit das Attractionsgesetz selbst durch die Gleichungen 2) und 3) völlig bestimmt.

Eine bemerkenswerte Folgerung ist ferner, dass, wenn der obigen Annahme noch das dritte Keppler'sche Gesetz als Voraussetzung hinzugefügt wird, sich das Newton'sche Gesetz als Folgerung ergiebt.

Wenn nämlich

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{a_1^2}{a^2}$$

vorausgesetzt wird, so folgt

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{T_1}{T}} = \sqrt{\frac{a_1}{a}}$$

und somit

$$\frac{f}{c} = \sqrt{a\,a_1}\sqrt{\frac{a - a_1}{aa_1\,(a - a_1)}} = 1$$

und ebenso

$$\frac{f_1}{e_1} = 1$$

Also muss die Attraction dem Newton'schen Gesetz entsprechen, d. h.:

Wenn um das nämliche Attractionscentrum zwei elliptische Bewegungen erfolgen, und wenn die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen verhalten, so ist das Attractionscentrum notwendig der gemeinschaftliche Brennpunkt, (da sonst die aus beiden Bewegungen abgeleiteten Ausdrücke für die Centralkraft nicht identische reelle Functionen der Entfernung wären).

Vierter Teil.

§ 11.

Wenn die Kraft, welche einen frei beweglichen Punkt durch eine gegebene Curve treibt, stets nach einem festen Centrum gerichtet ist, so ist durch den Satz von der Constanz der Flächengeschwindigkeit des Radius-Vectors auch die Geschwindigkeit eine gegebene Function der Coordinaten, und es ist also die Aufgabe, unter den angegebenen Bedingungen die Kraft zu bestimmen, nur eine Specialisirung der allgemeineren Aufgabe:

Es soll diejenige Kraft bestimmt werden [1], *welche einen frei beweglichen Punkt durch eine gegebene Cuvve treibt und ihm eine beliebig gegebene veränderliche Geschwindigkeit erteilt.*

Diese Aufgabe ist schon durch die von Huyghens ([2]) für die normale und tangentiale Componente angegebener Ausdrücke $\frac{v^2}{\varrho}$ und $v\frac{dv}{ds}$ gelöst worden.

Es können aber zwei der Richtung und Grösse nach bestimmte Kräfte auf unendlich viele Weisen durch zwei andere ersetzt werden.

Man kann zunächst z. B. die tangentiale ([3]) Richtung für eine der beiden Componenten beibehalten, und um über die zweite Richtung frei zu verfügen, kann man zu der tangentialen Kraft $v\frac{dv}{ds}$ eine ganz willkürliche Kraft $(-\psi)$ addiren, und endlich die tangentiale Kraft $(+\psi)$ und die normale Kraft $\frac{v^2}{\varrho}$ zu einer Kraft (F_1) zusammen setzen. Durch passende Bestimmung der Kraft (ψ) kann man erreichen, dass diese Resultante (F_1) durch einen gegebenen festen Punkt geht oder einer gegebenen Richtung parallel ist, oder mit der Tangente einen gegebenen Winkel bildet etc. ([4]).

Man kann ferner auch die Richtungen beider von Huyghens bestimmten Componenten ändern, so dass die eine Componente (F_1) nach einem festen Punkte (O) gerichtet ist, die andere (F_1) auf derselben senkrecht steht. (5).

Bezeichnet α den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und dem Radius-Vector (r oder PO), so ist

$$F_1 = \frac{v^2}{\varrho}\sin\alpha + v\frac{dv}{ds}\cos\alpha$$

$$F_2 = -\frac{v^2}{\varrho}\cos\alpha + v\frac{dv}{ds}\sin\alpha$$

Bezeichnet ferner D die von O auf die Bewegungsrichtung gefällte Senkrechte, so ist

$$\sin\alpha = \frac{D}{s}$$

Endlich hat man noch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{-dr}{ds}$$

$$r\,dr = \varrho\, dD \quad (^6)$$

Substituirt man diese Werte in die vorigen Ausdrücke, so erhält man nach wenigen Reductionen:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{v^2 r}{\varrho D} - \dfrac{v}{D}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d(Dv(}{ds} \\ F_2 = \dfrac{v}{r}\dfrac{d(Dv)}{ds} \end{cases}$$

Wenn die gesamte wirkende Kraft nach O gerichtet ist, so folgt:

$$T_2 = 0, \quad \text{und also}$$

$$Dv = \text{const.}$$

$$F_1 = \text{cons}^2\frac{r}{\varrho D^2}$$

d. h es gilt der Satz von der Constanz der Flächengeschwindigkeit und der Satz von Moivre.

Die obigen Formeln enthalten ausserdem folgenden allgemeinen **Satz:**

Eine beliebige ebene Curve werde mit beliebig veränderlicher Geschwindigkeit von einem frei beweglichen Punkte

durchlaufen. In jedem Punkte (P) der Curve ist die Kraft nach solchen Punkten (O) gerichtet, für welchen die Flächengeschwindigkeit des Radius-Vectors in P einen Maximal- oder Minimalwert erreicht.

§ 12.

Anstatt die Richtungen der Componenten dadurch zu bestimmen, dass die eine durch einen festen Punkt geht, die zweite aber auf der ersten senkrecht steht, kann man auch verlangen, dass beide Richtungen je durch einen Punkt (O, O_1) hindurchgehen. Die zu lösende Aufgabe ist dann folgende:

Es sollen diejenigen nach zwei festen Centren (O. O_1) gerichteten Attractionskräfte bestimmt werden, welche einen frei beweglichen Massenpunkt durch eine gegebene Curve treiben und ihm eine gegebene veränderliche Geschwindigkeit erteilen.

Die nach O, O_1 gerichteten Kräfte seien resp. P, P_1. Mit Anwendung der früheren Beziehungen erhält man:

$$1)\quad \begin{cases} N = \dfrac{v^2}{\varrho} = P \sin\alpha + P_1 \sin\alpha_1 \\[2ex] T = v\dfrac{dv}{ds} = P \sin\alpha + F_1 \cos\alpha_1 \end{cases}$$

$$\frac{v'}{\varrho}\cos\alpha_1 - v\frac{dv}{ds}\sin\alpha_1 = P \sin)a - \alpha_1)$$

$$\frac{v^2}{\varrho}\cos\alpha - v\frac{dv}{ds}\sin\alpha = P_1 \sin(\alpha_1 - \alpha)$$

oder da

$$\cos\alpha = \frac{-dr}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{D}{r}, \quad r\,dr = \varrho\, dD$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{-dr_1}{ds}, \quad \sin\alpha_7 = \frac{D_1}{r_1}, \quad r_1\,dr_1 = \varrho\, dD_1$$

ist, so folgt:

$$\begin{cases} P\sin(\alpha_1 - \alpha) = \dfrac{v}{r_1}\,\dfrac{d(rD_1)}{ds} \\[2ex] P_1 \sin(\alpha_1 - \alpha) = \dfrac{-v}{r}\,\dfrac{d(vD)}{ds} \end{cases}$$

Bezeichnet man endlich den Abstand der beiden Centren mit $2e$, so folgt

$$\frac{2e}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} = \frac{r}{\sin(r_1 e)} = \frac{r_1}{\sin(r e)}$$

und also

$$2)\quad \begin{cases} P\,2e \sin(re) = v\,\dfrac{d(vD_1)}{ds} \\[2ex] P_1\,2v \sin(r_1 e) = -v\,\dfrac{d(uD)}{ds} \end{cases}$$

$P \sin(re)$ und $P_1 \sin(r_1 e)$ sind diejenigen Componenten Q, Q_1, deren Richtungen auf der Verbindungslinie der beiden Attractionscentren senkrecht stehen.

Für diese folgt

$$R : Q_1 = d(vD_1) : -d(vD)$$

d. h. die genannten Componenten stehen im umgekehrten Verhältniss der Flächenbeschleunigungen.

Ferner enthalten die Gleichungen 2) den Lehrsatz:

> Wenn in einem Punkte der Bahn, welcher nicht zugleich auf der Verbindungslinie der beiden Attractionscentren liegt, eine der um die beiden Centren vorhandenen Flächengeschwindigkeiten einen Maximal- oder Minimalwert erreicht, so muss in diesem Punkte die nach dem andern Centrum gerichtete Kraft verschwinden.

Wenn die Gleichungen 2) im besonderen auf eine elliptische Bahn angewendet werden, bei welcher die Brennpunkte die Attractionscentren sind, so erhält man aus ihnen:

$$P = \frac{av^2}{2rr_1} - \frac{v}{2}\frac{dv}{dr}$$

$$P_1 = \frac{av^2}{2rr_1} - \frac{v}{2}\frac{dv}{dr_1}$$

Diese speciellen Formeln erhält man freilich leichter direct in folgender Weise:

Die normale und tangentiale Componente seien (s. Fig. 8)

$$N = \frac{v^2}{\varrho} = \overline{AC}$$

$$T = v\frac{dv}{ds} = \overline{AB}$$

Jede derselben werde in zwei nach den Brennpunkten F, F_1 gerichtete Componenten zerlegt, so dass AC durch AD und AE, AB durch AG und AK ersetzt werden dürfen.

Dadurch erhält man die gesuchten nach dem Brennpunkte gerichteten Kräfte P, P_1, nämlich

$$P = AD - AG$$
$$P_1 = AE + AK$$

Da ferner die Kräfteparallelogramme gleichseitige sind, (weil Wkl. EAC = Wkl. CAD = β), so folgt

$$AD = AE - \frac{T}{2\cos\beta}$$

$$AG = AK = \frac{T}{2\sin\beta}$$

In den für die Ellipse gebräuchlichen Bezeichnungen ist nun:

$$\sin\beta = \frac{dr}{ds} = \frac{-dr_1}{ds}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{rr_1}} = \frac{rr_1}{a\varrho}$$

Durch Substitution dieser Werte erhält man das oben angegebene Resultat.

§ 13.

Die zuletzt behandelte Aufgabe ist wiederum eine Specialisirung von folgender:

Es werde eine gegebene Curve von einem frei beweglichen Massenpunkte unter der Wirkung beliebig vieler Centralkräfte durchlaufen, die nach gegebenen Punkten gerichtet sind. Es soll die Bedingung angegeben werden, welche diese Centralkräfte erfüllen müssen.

Diese Aufgabe ist von Curtis ([1]) behandelt worden. In die von ihm gegebene Lösung gehen auch diejenigen Attractionskräfte (Φ) ein, welche einzeln einen frei beweglichen Massenpunkt bei passenden Anfangsbedingungen durch dieselbe Curve treiben würden. Es werden aber häufig diejenigen Kräfte, welche einzeln die gegebene

Bahn zulassen würden, complicirtere Functionen der Entfernung sein, als die, welche bei ihrem Zusammenwirken dieselbe Bahn hervorbringen.

Wenn z. B. beliebig viele Attractionscentren verschiedener Masse (m) einen Punkt mit einer der Entfernung (L) und der eigenen Masse proportionalen Kraft (mL) anziehen, und wenn sie so verteilt sind, dass ihr Schwerpunkt in den Mittelpunkt der Ellipse fällt, so ist bei passenden Anfangsbedingungen die gegebene elliptische Bahn möglich. ([2]) In diesem Falle sind die Attractionskräfte (Φ) complicirtere Functionen als die Kräfte (F), welche bei gemeinsamem Wirken die elliptische Bahn ermöglichen.

Im übrigen findet man die gesuchte Bedingung nach der Methode von Curtis sofort:

Es seien xy die Coordinaten des bewegten Punktes,
$f_1 k_1$, $f_1 k_2$ . . . die der Attractionscentren,
L_1, L_2 . . . ihre Entfernungen von xy,
d_1, q_2 . . . ihre senkrechten Entfernungen von den Bewegungsrichtungen,
P_1, P_2 . . . die einzelnen Attractionskräfte,
N_1, N_2 . . . ihre normalen,
T_1, T_2 . . . ihre tangentialen Componenten.

Nach den oft gebrauchten Bewegungsgleichungen ist:

$$\Sigma O - \frac{v^2}{\varrho} = \Sigma \frac{Pq}{L} \quad ([3])$$

$$\Sigma T = v \frac{pv}{ds} = \Sigma \frac{P\,dL}{ds}$$

und zwar erstreckt sich die Summation über die verschiedenen Attractionscentren.

Die letzte Gleichung wird integrirt und der für v^2 erhaltene Wert in die erstere eingesetzt. Man erhält alsdann die gesuchte Bedingung:

$$\varrho \Sigma \frac{Pb}{L} = 2 \Sigma \int P dB = \text{const.}$$

Wenn im speciellen

$$P = eL^n$$

angenommen wird, so ist

$$\int PdL = \frac{cL^{n+1}}{n+1}$$

zu setzen, und bei dieser Annahme erhält die Bedingungsgleichung die Form:

$$\Sigma eL^{n-1}\left[q\varrho + \frac{2L^2}{n+1}\right] = \text{const.}$$

und, wenn diese Gleichung auf eine elliptische Bewegung angewendet werden soll, so muss

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$pq = (a^2 - \varepsilon x^2)\left(1 - \frac{xf}{a^2} - \frac{yk}{b^2}\right)$$

$$L^2 = b^2 + f^2 + k^2 - 2fx + \varepsilon^2 x^2 - 2ky$$

gesetzt worden.

Fünfter Teil.

§ 14.

Im vorigen § ist eine gewisse Verteilung der Attractionscentren erwähnt, unter deren Wirkung eine elliptische Bewegung möglich ist, wenn die Attractionsgesetze sämtlich der Gleichung

$$P = cK$$

entsprechen. Es muss aber noch untersucht werden, ob diese Verteilung die einzig zulässige ist. Zu diesem Zweck wird in der allgemeinen Bedingungsgleichung des vorigen § $n = 1$ gesetzt. Man erhält somit:

$$\Sigma c(q\varrho + L^2) = C$$

Zu jedem Werte von x gehören zwei einander entgegengesetzte Werte y. Wenn nun die obige Summe einen constanten Wert haben soll, so muss derjenige Teil, welcher mit y sein Zeichen wechselt, verschwinden, d. h.

$$\Sigma ck\left[\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{b^2} + 2\right] = 0$$

Hieraus folgt, dass

$$\Sigma ck = 0$$

sein muss; und da nun auch das Zeichen von x beliebig geändert werden kann, so ergiebt sich in derselben Weise, dass auch

$$\Sigma cf = 0$$

sein muss. Es reducirt sich also die obige Bedingungsgleichung auf

$$C = \Sigma(a^2 + b^2 + f^2 + k^2)$$

wodurch bloss der Wert der Constanten C bestimmt ist. Die Gleichungen

$$\Sigma cf = 0, \quad \Sigma ck = 0$$

lehren, dass, wenn die Attractionskräfte proportional der Masse und der Entfernung sind, die Centren so verteilt sein müssen, dass der Ellipsenmittelpunkt ihr Schwerpunkt ist.

§ 15.

Es werde ferner vorausgesetzt, dass alle Attractionscentren nach Gravitationsgesetzen anziehen. Die Bedingungsgleichung für elliptische Bewegung reducirt sich dann auf

$$\Sigma g \left[\frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)\left(1 \quad \frac{xf}{a^3} - \frac{yk}{b_2}\right)}{L^2} - \frac{2}{L} \right] = C$$

Zunächst soll hieraus der bekannte Satz abgeleitet werden, dass, wenn nur eine Gravitationskraft vorhanden ist, diese nach einem Brennpunkte gerichtet sein muss.

In diesem Falle heisst die obige Gleichung:

$$(a^2 - \varepsilon^2 x^2 \varepsilon)\left(1 - \frac{xf^2}{a^2} + \frac{yk}{b^2}\right) - 2L^2 = \frac{C}{g} L^3$$

Durch Quadriren der Gleichung, durch Ordnen nach der Irrationalität

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und abermaliges Quadriren erhält man hieraus eine ganze Function von x, die für alle Werte von x zwischen $+a$ und $-a$ verschwinden muss. Hieraus folgt, dass dieselbe identisch verschwinden muss, dass also auch $x = \infty$ gesetzt werden darf. Für $x = \infty$ erhält man aber

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{-b^2}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{K^2}{x^2} = \varepsilon^2$$

und aus der obigen Bedingungsgleichung:

$$\varepsilon^2\left(\frac{f}{a^2} + \frac{k}{b^2}\frac{y}{x}\right) = \frac{C}{g}\frac{L^2}{x^2}$$

Da nun hierin $\frac{y}{x}$ der einzige imaginäre Wert ist, so folgt zunächst, dass $k = 0$ sein muss. Hierdurch vereinfacht sich die Bedingungsgleichung zu:

$$(a^2 - \varepsilon^2 x^2)\left(1 - \frac{xf}{a^2}\right) - 2L^2 = \frac{C}{g} L^3$$

in welcher

$$L^2 = b^2 + f^2 - 2fx + \varepsilon^2 x^2$$

zu setzen ist.

Nun verschwindet aber L höchstens für zwei verschiedene Werte von x, folglich darf auch

$$(a^2 - \varepsilon^2 x^2)\left(1 - \frac{xf}{a^2}\right)$$

höchstens für zwei verschiedene Werte verschwinden, und daher muss entweder $f = 0$ oder

$$\frac{a^2}{f} = \pm \frac{a}{\varepsilon}$$

d. h. $f = \pm e$ sein. Die Annahme $f = 0$ ist aber nicht statthaft, weil sonst L nur für imaginäre Werte von x verschwinden würde, nicht aber für

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$$

Es bleibt also nur die einzige Annahme $f = \pm e$, für welche Bedingungsgleichung erfüllt ist, wenn

$$C = \frac{-g}{a}$$

gesetzt wird.

§ 16.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Summe der Functionen

$$\Sigma g \left[\frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)\left(1 - \frac{xf}{a^2} - \frac{yk}{b^2}\right)}{L^2} - \frac{2}{L} \right]$$

constant sein könne.

Man denke sich für irgend einen Anfangswert

$$x = x_0$$

einen der zugehörigen Werte

$$y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$$

berechnet; damit ist auch der Anfangswert für jedes L^2 eindeutig bestimmt. Um nun y und L^2 in eindeutiger Weise über die ganze Ebene der Variabeln x auszubreiten, denke man sich zunächst eine sich von $+a$ bis $-a$ erstreckende Linie ausgeschieden. Wenn x von x_0 aus sich über die ganze Ebene ausbreitet, ohne jedoch die angegebene Grenze zu überschreiten, so wird y und damit auch L^2 eindeutig über die ganze Ebene ausgebreitet. Dadurch wird aber noch nicht der ganze Wertvorrat beider Functionen erschöpft. Um auch dieses zu erreichen, denkt man sich unter die erste Ebene noch eine zweite geheftet und ordnet jedem x der unteren Ebene dasjenige y zu, welches dem vorigen gerade entgegengesetzt ist. Beide Ebenen werden längs der Grenzlinie kreuzweise aneinander geheftet, und alsdann sind y und L^2 eindeutig und stetig über die zweiblättrige Fläche ausgebreitet Im oberen Blatte mögen die Werte mit y und L^2, und im unteren mit y' und $L^{2\prime}$ bezeichnet werden.

Wenn nun x sich in einem geschlossenen Teile bewegt, der keinen Nullpunkt von L^2 enthält, so ist in demselben auch L eindeutig, wenn aber in demselben ein Nullpunkt vorkommt, so kann bei der Umkreisung desselben ein Zeichenwechsel eintreten. Im letzteren Falle möge der Nullpunkt als singuläre Stelle bezeichnet werden. Um nun die singulären Stellen von L^2 zu finden, müssen die Nullpunkte von L^2 bestimmt werden. Dieselben mögen mit ξ bezeichet werden; sie genügen der biquadratischen Gleichung:

$$(b^2 + f^2 + k^2 - 2f\xi + \varepsilon\xi^2)^2 - \frac{4b^2k^2}{a^2}(a^2 - \xi^2) = 0$$

Diese Gleichung zerfällt nach einigen Reductionen in die beiden quadratischen

$$\begin{cases} b^2 + (f + k\sqrt{-1})^2 - 2\xi(f + k\sqrt{-1}) + \varepsilon^2\xi^2 = 0 \\ b^2 + (f - k)\sqrt{-1})^2 - 2\xi(f - k\sqrt{-1}) + \varepsilon^2\xi^2 = 0 \end{cases}$$

die Function L^2 hat also im allgemeinen vier Nullpunkte $\xi_1, \xi_2, \xi_3,$

ξ_1, ξ_2 genügen den Gleichungen

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{2}{\varepsilon^2}(f + k\sqrt{-1})$$

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{b^2 + (f + k\sqrt{-1})^2}{\varepsilon^2}$$

und ξ_3 und ξ_4 sind zu ξ_1, ξ_2 conjugirt. Die Nullpunkte ξ_1 und sind von einander verschieden, ausser wenn

$$(f + k\sqrt{-1})^2 = \varepsilon^2 b^2 + \varepsilon^2(f + k\sqrt{-1})^2$$

d. h. wenn

$$k = 0 \quad \text{und} \quad f^2 = e^2$$

ist; und die Nullpunkte ξ_1; ξ_2 sind auch von ξ_3, ξ_4 verschieden, aus e wenn die obigen beiden quadratischen Gleichungen eine Wurzel e meinschaftlich haben, wenn dieselbe also auch der Differenz bei e Gleichungen

$$4k(f - \xi)\sqrt{-1}$$

zukommt, wenn also entweder $k = 0$ oder $f = \xi$ ist.

Wenn aber $f = \xi$ eine Wurzel der biquadratischen Gleichu g sein soll, so muss

$$b^2 + f^2 - k^2 - 2f^2 + \varepsilon^2 f^2 = 0$$

d. h.

$$b^2 f^2 + a^2 k^2 = a^2 b^2$$

sein; es muss also der Punkt (fk) ein Punkt der Ellipse sein.

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sind also sämtlich von einander verschieden, aus r wenn $k = 0$, oder wenn (fk) ein Punkt der Ellipse ist.

Wenn aber (fk) ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und n-nerhalb des Ellipsenumfanges ist, so ist

$$\xi_1 - \xi_2 = f$$

dagegen ist ξ_1 nach der Gleichung

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{2}{\varepsilon^2}(f + k\sqrt{-1})$$

imaginär und also sowol von ξ_1 wie auch von dem conjugirten Werte ξ_4 verschieden. In diesem Falle sind also zwei Nullpunkte einander *gleich*, die beiden anderen aber von diesen und unter sich verschieden.

Wenn endlich $k = 0$ ist, so reducirt sich L^2 auf $b^2 + f^2 - 2f\xi + \varepsilon^2\xi^2$, und diese Function hat zwei Nullpunkte ξ_1, ξ_2, welche von einander verschieden sind, ausser, wenn $f^2 = e^2$ ist.

Die obige biquadratische Gleichung hat also:

1) vier verschiedene Wurzeln, wenn fk ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und ausserhalb der Ellipse ist;

2) zwei Wurzeln $(= f)$ und zwei verschiedene einander conjugirte, wenn (fk) ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und innerhalb des Ellipsenumfanges ist;

3) zwei Paare von gleichen Wurzeln, wenn fk ein Punkt der grossen Axe ausserhalb der Brennpunkte ist;

4) vier einander gleiche Wurzeln, wenn fk einer der beiden Brennpunkte ist.

Ferner sind die Wurzeln von $\pm a$ verschieden, ausser wenn

$$b^4 + f^2 + k^2 \mp 2fa + \varepsilon^2 a^2 = 0$$

d. h.

$$a = \pm f \quad \text{und} \quad k = 0 \quad \text{ist.}$$

§ 17.

Es soll nun untersucht werden, welche der Nullpunkte ξ singuläre Stellen der Function L sind. Die linke Seite der biquadratischen Gleichung für ξ ist das Product $L^2 \,.\, L'^2$. Man hat also nach der Theorie der Gleichungen:

$$LL' = \varepsilon^2 \sqrt{(x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)(x - \xi_4)}$$

Wenn nun ξ ein Nullpunkt erster Ordnung ist, so wechselt $\sqrt{x - \xi_1}$ bei der Umkehrung von ξ_1 das Vorzeichen, während $\sqrt{(x - \xi_1)(x - \xi_2(x - \xi_3)}$ zu dem ursprünglichen Werte zurückkehrt; es muss aber auch diejenige der Functionen L, L' das Vorzeichen wechseln, welcher ξ_1 als Nullpunkt angehört. Jeder Nullpunkt erster Ordnung ist also zugleich ein singulärer Punkt.

Wenn dagegen ξ_1 ein Nullpunkt zweiter Ordnung ist, so tritt bei seiner Umkehrung ein Vorzeichen in

$$\sqrt{(x-\xi_1)(x-\zeta_1)} = x - 1$$

nicht ein, also werden L und L' entweder beide das Zeichen wechseln oder beide zum ursprünglichen Werte zurückkehren. Wenn nun L und L' von einander verschieden sind, d. h. wenn $k \gtrless 0$ ist, so gehört ξ_1 nur einer der beiden Functionen, z. B. L als Nullpunkt an; alsdann muss L' zu seinem ursprünglichen Werte zurückkehren, somit muss auch L zum urspünglichen Werte zurückkehren, und in diesem Falle ist ξ_1 nicht singulärer Punkt.

Wenn dagegen $k = 0$ und also $L = L'$ ist, und wenn ξ_1 ein Nullpunkt zweiter Ordnung der biquadratischen Gleichung, also ein Nullpunkt erster Ordnung von

$$L^2 = b^2 + f^2 - 2fx + \varepsilon^2 x^2$$

ist, so ist es zugleich singulärer Punkt von L, und wenn ξ_1 ein Nullpunkt vierter Ordnung ist, so ist L eine eindeutige Function ohne singuläre Stellen.

Somit sind folgende Sätze bewiesen:

1) Wenn fk ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und ausserhalb des Ellipsenumfanges ist, so hat L vier getrennte singuläre Stellen.

2) Wenn fk ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und innerhalb des Ellipsenumfanges ist, so hat L zwei verschiedene singuläre Stellen.

3) Wenn fk ein Punkt der grossen Axe und ausserhalb der Brennpunkte ist, so hat L verschiedene singuläre Stellen.

4) Wenn fk ein Brennpunkt ist, so hat L keine singulären Stellen.

Uebrigens sind die singulären Stellen sämtlich von $\pm a$ verschieden, ausser wenn $f = \pm a$ und $k = 0$ ist.

§ 18.

Endlich muss noch folgender Lehrsatz bewiesen werden:

Wenn zwei Functionen L und L_1, welche sich auf die Attractionscentren fk, $f_1 k_1$ beziehen, alle singulären Stellen gemeinschaftlich haben, so sind sie identisch.

1) L und L_1 mögen zunächst vier singuläre Stellen gemeinschaftlich haben; dann müssen die biquadratischen Gleichungen, welche aus ihnen abgeleitet sind, identisch übereinstimmen, also auch die daraus abgeleiteten quadratischen, und also auch

$$f + k\sqrt{-1} = f_1 + k_1\sqrt{-1}$$

Die beiden Punkte fk und $f_1 k_1$ könnten sich also höchstens im Vorzeichen von k unterscheiden. Aber auch dieser Unterschied ist nicht möglich, da sonst L und L_1 durchaus von einander verschieden wären, also die Nullpunkte nicht gemeinschaftiich haben könnten.

2) L und L_1 mögen ferner ihre beiden singulären Stellen gemein haben.

Unter dieser Voraussetzung liegen die Punkte fk und $f_1 k_1$ entweder in der grossen Axe oder im Ellipsenumfange.

Liegen sie beide in der grossen Axe, so müssen nach der Gleichung

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{2}{\varepsilon^2} f = \frac{2}{\varepsilon^2} f_1$$

die Functionen L und L_1 übereinstimmen; liegen sie beide im Ellipsenumfange, so müssen nach den Gleichungen

$$f + \xi_3 = \frac{2}{\varepsilon^2}(f + k\sqrt{-1})$$

$$f_1 + \xi_2 = \frac{2}{\varepsilon^2}(f_1 + k_1\sqrt{-1})$$

da, wie schon oben bemerkt, ein Unterschied im Zeichen k unmöglich ist, die Functionen L und L_1 ebenfalls übereinstimmen.

Die Annahme endich, dass einer der Punkte (fk) in der grossen Axe, der andre $(f_1 k_1)$ ausserhalb derselben im Ellipsenumfange liege, ist nicht statthaft, weil wenn L^2 und $L_1{}^2$ in einem der beiden Blätter einen Nullpunkt gemeinsam haben, der im andern Blatt entsprechende Punkt ebenfalls Nullpunkt von L'^2 ist, aber nicht von $L'_1{}^2$ verschieden ist, während L^2 und L'^2 mit einander übereinstimmen.

§ 19.

Mit Hilfe dieser Lehrsätze lassen sich nun die Bedingungen finden, unter denen

$$S = \Sigma g \left[\frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)\left(1 - \frac{xf}{a^2} - \frac{yk}{b^2}\right)}{L^2} - \frac{2}{L} \right]$$

constant ist.

Der obige Ausdruck besteht aus so vielen Summanden, als Attractionscentren vorhanden sind. Für jeden Summanden denke man sich die singulären Stellen der in ihm enthaltenen Function L bestimmt. Nach dem zuletzt bewiesenen Satze haben keine zwei Summanden sämtliche singulären Stellen gemein. Es lässt sich nun zuletzt zeigen, dass Summanden mit je vier singulären Stellen nicht vorkommen können.

Gesetzt nämlich, s wäre ein solcher Summand mit den singulären Stellen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, so könnte man die Variabele x von x_0 aus auf irgend einem Wege zuerst in die Nähe von ξ_1 führen. Es hätten dann alle Summanden in S gewisse bestimmte Werte; würde man x um ξ_1 herumführen (welches von $\pm a$ verschieden ist), so würden in S nur diejenigen Summanden s, s_1 . . . ihr Zeichen ändern, welche die singuläre Stelle ξ_1 mit s gemeinsam haben. Es muss also gleichgültig sein, ob die Summanden s, s_1 . . . mit positivem oder negativem Zeichen genommen werden; in beiden Fällen muss S denselben Wert annehmen.

In der Umgebung von ξ_1 muss also $s + s_1 + \ldots$ verschwinden. Hieraus folgt, dass diese Summe identisch verschwinden muss

Jetzt denke man sich die Variabele x auf irgend einem Wege in die Nähe von ξ_1, dann um ξ_2 herumgeführt und wiederhole für die Summe $s + s_1 + \ldots$ den vorigen Schluss. Man erhält als Resultat, dass die Summe aller derjenigen Functionen verschwinden muss, welche die beiden singulären Stellen ξ_1, ξ_2 gemeinsam haben.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man zuletzt die Folgerung, dass der eine Summand s mit den vier singulären Stellen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 identisch verschwinden muss.

Es ist aber schon bewiesen worden, dass ein Summand einen constanten Wert nur dann haben kann, wenn

$$f = \pm e, \quad k = 0$$

ist, wenn also singuläre Stellen überhaupt nicht vorkommen.

Hiermit ist zunächst bewiesen, dass Summanden s mit vier singulären Stellen in S nicht vorkommen dürfen.

Auf die Summanden mit je zwei singulären Stellen kann man nun genau dieselbe Schlussfolgerung anwenden. Jedesmal, wenn die Variabele x einen singulären Punkt umkreist, tritt im zugehörigen L ein Zeichenwechsel ein, und damit auch im zugehörigen Summanden s, auch in dem Falle, dass

$$f = \pm a, \quad k = 0$$

und also a eine singuläre Stelle ist, weil ja dann y in dem Summanden nicht mehr vorkommt.

Es dürfen also auch Summanden mit je zwei singulären Stellen nicht vorkommen. Es bleiben somit nur Summanden ohne singuläre Stellen, in denen

$$f = \pm e, \quad k = 0$$

ist; solcher Summanden giebt es aber höchstens zwei. Damit ist der Satz bewiesen:

> Unter der Wirkung von Gravitationskräften ist eine elliptische Bewegung nur dann möglich, wenn dieselben nach den Brennpunkten gerichtet sind.

§ 20.

Der Schluss, dass, wenn S constant sein soll, auch die einzelnen Summanden s constant sein müssen, kann ohne jede Veränderung gemacht werden, auch wenn zu S noch $\Sigma e(q\varrho + L^2)$ hinzugenommen wird. Es folgt also, dass, wenn $S + \Sigma e(q\varrho + L^2)$ constant sein soll, S und $\Sigma e(q\varrho + L^2)$ einzeln constant sein müssen; und hieraus folgt der allgemeinere Satz:

> Unter der Wirkung von Gravitationskräften $\left(\frac{g}{L^2}\right)$ und Elasticitätskräften (mL) ist eine elliptische Bewegung nur dann möglich, wenn die ersteren nach den Brennpunkten gerichtet sind, und wenn die Centren der letzteren so verteilt sind, dass ihr Schwerpunkt der Ellipsenmittelpunkt ist.

Anmerkungen.

§ 1.

1) Unter einer elementaren Behandlungsweise ist eine solche verstanden, welche weder die Kenntniss der Kegelschnitte voraussetzt noch auch Verhältnisse unendlich kleiner Grössen benutzt.

In diesem Sinne scheint eine elementare Ableitung des Gravitationsgesetzes noch nicht gegeben zu sein. Die meisten derjenigen Autoren, welche eine solche zu geben beabsichtigen, scheitern an der elementaren Berechnung des Krümmungsradius, so z. B. Schellbach (Neue Elemente der Mechanik S. 267), der den Krümmungsradius nach einem Verfahren berechnet, das von dem der Differentialrechnung nur in der Bezeichnungsweise abweicht; Rodet, der wegen des Krümmungsradius auf Salmon verweist (Nouv. Ann. de math. XII 1883), und Helm, der zwar ausdrücklich erklärt, den Krümmungsradius vermeiden zu wollen, der aber wenigstens den Begriff desselben nicht entbehren kann. (Grunert's Archiv Bd. 63, S. 326. 1879.). Vermieden ist der Krümmungsradius in der eleganten Methode von Resal, die aber nicht elementar ist, weil die Beschleunigung durch einen unendlich kleinen Bogen dargestellt ist, und der Satz benutzt wird, dass die Beschleunigung in der Bahn gleich der Geschwindigkeit im Hodographen ist. (Resal, traité de cinématique pure. 1892. S. 31.)

Whitworth endlich (The messenger of math. Vol, S. 160. 1871) benutzt die Methode der orthogonalen Projection und legt seiner Betrachtung die von Newton gegebene Lösung des Problemes von der kreisförmigen Bewegung um ein beliebiges Attractionscentrum zu Grunde; aber eine solche kreisförmige Bewegung selbst ist bisher elementar nicht behandelt worden.

Es ist auffallend, dass, während die meisten elementaren Lehrbücher der Physik die elliptische Bewegung um den Mittelpunkt nach der Methode der orthogonalen Projection behandeln, sich die entsprechende Behandlungsweise für die Planetenbewegung in keinem derselben findet.

Newton. Principia. Prop. VII Probl. II.

Dieselbe Aufgabe wird von Jullien gestellt. (Problèmes

mécanique rationnelle 1866. S. 340.) Er giebt aber das Newtonsche Resultat in algebraischer Form. Dass dasselbe auch von Whitworth übernommen wird, ist bereits erwähnt.

3) Dieses Hilftstheorem ersetzt folgendes schwierigere Hilfstheorem Newton's (Prop. VII. Probl. II. Cor. 3):

> Vis qua corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim qua corpus idem P in eodem orbe, eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $SP \times RP^2$, contentum utique sub distantia corporis a primo virium centro S et quadrato distantiae eius a secundo virium centro R, ad cubum rectae SG, quae a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur et corporis a secundo virium centro distantiae RP parallela est.

4) Principia. Prop. I. Theor. I.:

> Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, et in planis immobilibus consistere et esse temporibus proportionales.

5) Die erstere dieser beiden Formen enthält den für die kreisförmige Bewegung specialirten Moivre'schen Satz; die zweite wird — abgesehen von dem constanten Factor — von Newton angegeben.

Dass auch der allgemeine Moivre'sche Satz selbst:

> Sit MPO curva quaecunque data, PG radius concavitatis . . . erit vis centripeta ubique proportionalis quantitati
>
> $$\frac{SP}{PG \, . \, ST^3} \quad \text{(s Fig. 9.)}$$

in derselben Weise für jede beliebige Curve abgeleitet werden kann, wenn man unter dem im Texte angenommenen Kreise den Krümmungskreis einer beliebigen Gurve versteht, — ist selbstverständlich. Moivre selbst beweist einen Satz (Moivre Miscellanea analytica. Lib. VIII, 1790) nach zwei Methoden. Die letztere war ihm von Joh. Bernoulli brieflich (1706) mitgeteilt worden. In derselben heisst es: . . . notum est radium concavitatis PG esse ad PQ ut PQ ad QL. Man wird nicht übersehen, dass an Stelle von PG stehen müsste $2\,PG$.

Ein anderer — freilich sehr umständlicher — Beweis des Moivre'schen Satzes findet sich bei Schell (Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1879, Bd. I, S. S. 375). Uebrigens kann den verschiedenen (z. B. bei Schell l. c. zusammengestellten Ausdrücken

derjenigen Centralkraft, unter deren Wirkung ein frei beweglicher Punkt eine gegebene Curve durchläuft, noch folgender einfache Ausdruck hinzugefügt werden:

$$P = -\frac{c^2}{x^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{x}\right)}{dn^2}$$

in welchem $n = \frac{y}{x}$ gesetzt ist. Man findet denselben, wenn man aus den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = xP, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = yP$$

mit Hilfe der Gleichung

$$ydx - xdy = cdt$$

die Zeit eliminirt. Es wird nämlich

$$cd\left[\frac{dx}{ydx - xdy}\right] = xP\frac{ydx - xdy}{c} \quad \text{oder}$$

$$d\left[\frac{d\frac{1}{x}}{dn}\right] = \frac{-x^2 Pdn}{c^2}, \quad \text{also}$$

$$P = \frac{-c}{x^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{x}\right)}{dn^2}$$

6) Newton. Princ. Prop. XI, Probl. VI

7) Whitworth, welcher (l. c.) ebenfalls die orthogonale Projection anwendet, bestimmt nicht die Lage der Projectionsebene; daher braucht er den Satz

$$AA_1 \,.\, PP_1 = DD_1^2 \quad \text{(s. Fig. 10).}$$

8) Führt man die im Text angegebene Projection aus, so erhält man eine bei P_1 rechtwinklige Ecke (s. Fig. 11) $(F - BP_1P)$ und also ist $(\alpha = PBP_1)$

$$\sin\alpha = \frac{\sin PFP_1}{\sin(PFB)}$$

und da nach Voraussetzung

$$\sin\alpha = \frac{e}{a} = \frac{\sin(MPF)}{\sin(PFB)}$$

ist, so folgt

$$\sin PFP_1 = \sin MPF$$

und also $\triangle PFP_1 \backsim \triangle PFG$; folglich

$$PG = PP_1 \quad \text{und} \quad FG = FP_1 \quad \text{(q. e. d.)}$$

§ 2.

1) Principia. Prop. XVII. Probl. IX.

Newton nimmt eine Bahn als gegeben an, und aus dieser lehrt er, bei gegebenen Anfangsbedingungen die gesuchte finden.

Moivre's Construction (Misc. Lib. VIII) ergiebt sich leicht aus den im Texte gegebenen Gleichungen. Er nimmt diejenige Geschwindigkeit (v_0) als gegeben an, bei welcher der Körper einen Kreis beschreiben würde, und da

$$v_0^2 = \frac{g}{r}$$

ist, so folgt

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{r_1}{a} = \frac{2r_1}{r + r_1}$$

Wenn diese Gleichung auf die Anfangsstellung bezogen wird, so ist r_1 die einzige Unbekannte.

Resal's Construction (Mécanique générale I, S. 67. 1873) enthält zwar in ihrer Begründung alle die Resultate, welche die im Texte gegebene Construction ermöglichen, aber dieselben sind nicht elementar abgeleitet, und die aus ihnen geschlossene Construction ist wenig elegant.

Schellbach's Construction (Crelle Bd. 80, S. 194. 1875) ist ausserordentlich einfach und elegant. Die Begründung derselben ist aber nicht elementar. Ausserdem hat die von ihm benutzte Hilfsgrösse

$$\varrho = \frac{k}{v^1 q^1}$$

keine physikalische Bedeutung.

Schell (l. c. S. 376) zerlegt die nach dem Brennpunkt (F) gerichtete Beschleunigung $\frac{\mu}{r_0^2}$ in zwei Componenten. Die normale Componente: (s. Fig. 12) $\frac{\mu}{r_0^2}\cos\beta$ ist gegeben, und da sie auch durch $\frac{v_0^2}{\varrho}$ ausgedrückt wird, so kennt man auch $M_0C = \varrho$; und durch zweimalige Projection findet man denjenigen Punkt Q auf M_0C, welcher zugleich der grossen Axe FQ angehört.

2) Elementar lässt sich diese Formel folgendermassen beweisen; Fig. 11.)

Für die Beschleunigung (a) in der kreisförmigen Bewegung hat die Proportion:

$$1)\quad \varphi : PF = \frac{v^2}{2} : FG. \quad (\S\ 1.)$$

Bezeichnet man die Projection von v mit v_1, so ist

$$2)\quad v : v_1 = PD : P_1D$$

Da nun, wie oben bewiesen

$$PP_1 = PG\ (= LF)$$

ist, so folgt

$$PP_1 : PD = ML : MP \text{ und}$$

$$\triangle\, PP_1D \sim \triangle\, MLQ, \text{ also}$$

$$3)\quad PD : P_1D = a : LQ$$

also ergiebt die Gleichung 2):

$$4)\quad v^2 : v_1^2 = a^2 : FG\,.\,F_1G_1$$

und da das Verhältniss $\varphi : PF$ bei der Projection seinen Wert nicht ändert, so kann es durch $\frac{g}{r^2}$ ersetzt werden, wenn unter r der Radius-Vector FP_1 verstanden wird. Endlich ist zu bemerken, dass

$$PG = r\,(= FP_1) \text{ und } F_1G_1 = r_1\,(= F_1P_1)$$

gesetzt werden muss. Somit ergiebt die Gleichung 1) durch Substitution aus 4):

$$\frac{g}{r^2} = \frac{v_1^2 a}{r^2 r_1} \text{ oder}$$

$$v_1^2 = \frac{g r_1}{a r} \quad (q.\ e.\ d)$$

3) Die Wichtigkeit dieser Hilfsgrösse (k) scheint Schellbach nach der Veröffentlichung seiner Arbeit erkannt zu haben Wenigstens findet sie sich in dem Referat über seine Arbeit (Fortschritte der Math. Bd. 7, S. 566), und nach den dort ohne Beweis angegebenen Formeln ergiebt sich die im Text angegebene Construction unmittelbar.

§ 3.

1) Diese für den Kreis geltende Gleichung kann nach derselben Methode bewiesen werden, wie sie Glaisher auf die entsprechende für die Ellipse geltende Gleichung anwendet. Monthly Notices of the royal astron. Soc. 1878. Bd. 39, S. 79.)

2) Diese Gleichung lässt sich am leichtesten trigonometrisch beweisen: (s. Fig. 3.)

$$PE = \varrho = a(\cos\beta + \cos\varphi) = 2a \cos\tfrac{1}{2}(\beta + \varphi)\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \varphi)$$

$$PG_1 = p_1 = a\,(1 + \cos\beta - \varphi) = 2a\cos^2\tfrac{1}{2}(\beta - \varphi)$$

$$PG_2 < p_2 = a\,(1 + \cos\beta - \varphi) = 2a\cos^2\tfrac{1}{2}(\beta + \varphi)$$

$$\sqrt{p_1 p_2} = 2a \cos\frac{\beta-\varphi}{2}\cos\frac{\beta+\varphi}{2} = \varrho \quad \text{(q. e. d.)}$$

Fällt man noch vom Attractionscentrum (F) auf die Tangente in P die Senkrechte FC (oder s) und von M die Senkrechte MH auf FC, so erhält man

$$s = a + FM\cos\varphi \quad \text{oder da} \quad FM = \frac{a}{\cos\beta} \quad \text{ist,}$$

$$s = \frac{a}{\cos\beta}(\cos\beta+\cos\varphi) = \frac{\varrho}{\cos'\beta'}, \quad \text{also} \quad \cos\beta \text{ d. h. } \frac{\varrho_0}{a} = \frac{\varrho}{s}$$

Dies ist die erste Gleichung des Textes.

3) Proceedings of the royal Irish Academy, vol. III, p. 308 Nov. 1847.

Sir William R. Hamilton stated the following theorems of central forces, which he had proved by bis calculus of quaternions, but which, as he remarked, might be also deduced from principles more elementary:

> If a body be attracted to a fixed point, with a force which varies directly as the distances from that point, and inversely as the cube of the distance from a fixed plane, the body will describe a conic section, of which the plane intersects the fixed plane in a straight line, which is the polar of the fixed point with respect to the conic section.

Im Text ist die Umkehrung dieses Satzes bewiesen, jedoch unter der Voraussetzung, dass die Bahn auf eine Ebene beschränkt sei. Dieselbe specielle Umkehrung ist geometrisch aber nicht einfach und nicht elementar von Casey bewiesen (Quarterly Journal of math. 1862 p. 233) und von Glaisher (l. c.) mit Anwendung des schon in § 1 unter 3) citirten Satzes von Newton (Prop. VII. Probl. II).

Die von Hamilton angedeuteten „principles more elementary" iden sich für den directen und allgemeinen Satz selbst in § 4 an- reben.

4) Comptes Rendus. Bd. 84. S. 760.

Darbaux legt der Berechnung derjenigen Centralkraft, unter Wirkung ein frei beweglicher Punkt einen Kegelschnitt durch- die Formel von Binet

$$F = \frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\omega^2}\right)$$

ide. Dasjenige seiner zwei Resulate, auf welches im Texte enommen wird, spricht er in folgender Weise aus:

Nous aurons pour l'expression de la force

$$5)\quad F = \frac{\mu}{r^2(\alpha\cos 2\omega + \beta\sin 2\omega + h)^{3/2}}$$

et pour équation de la trajectoire:

$$\frac{1}{r} = a\cos\omega + h\sin\omega + \vartheta\sqrt{\alpha\cos 2\omega + \beta\sin 2\omega + h}$$

Cette formule, contenant trois constantes arbitraires a, h, ϑ, ne figurant pas dans l'expression de la force, est donc l'équation la plus générale de la trajectoire, quand la force est représentée par l'équation 51).

Dass das im Text angegebene Kraftgesetz auch durch Darboux Gleichung 5) ausgedrückt wird, erkennt man am leichtesten aus den weiteren Entwicklungen, in denen es heisst) S. 938):

Enfin si l'on exprime les deux lois trouvées en introduisant les coordonnées rectilignes au lieu des coordonnées polaires, on obtient les deux formules:

$$8)\quad F = \frac{\mu r}{(ax^2 + bxy + cy^2)^{3/2}}$$

$$9)\quad F = \frac{\mu r}{(ax + by + c)^2}$$

Eine elementare Ableitung des Satzes von Darboux scheint nirgends versucht worden zu sein. Daher kommt es auch, dass die einfache Formel für die Umlaufszeit sich nirgends findet.

§ 4.

1) Comptes Rendus. Bd. 84. S. 762.

L'équation:

$$\frac{1}{r} = a\cos\psi + b\sin\omega + \sqrt{A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H}$$

contenant trois constantes A, B, H ne figurant pas dans l'expression de la force

$$F = \frac{\mu}{r^2\left(\frac{1}{r} - a\cos\omega - b\sin\omega\right)^2}$$

représente la trajectoire la plus générale qu'un point matériel puisse décrire sous l'action de cette force.

2) Battaglini (Giornale di matematiche; vol. XVII. 1879. S. 49) leitet aus der Gleichung des Kegelschnitts:

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 \; (= P^2)$$

die Kraft

$$F = \frac{Kr}{P^3}$$

ferner die Geschwindigkeitscomponenten $\xi\eta$ ab; er drückt dann die Constanten des Kegelschnitts $\mu\nu$ durch die gegebenen Anfangsbedingungen aus und findet als Kriterium für die Art des Kegelschnitts:

$$\frac{\alpha^3 x_0}{\alpha(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) + \gamma\eta_0} + \frac{\beta^2 y_0}{\beta(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) - \gamma\xi_0} \lesseqgtr \frac{P_0}{(x_0\eta_0 - y_0\xi_0)}$$

Eine Deutung dieses Resultates wird von ihm nicht versucht.

§ 5.

Das in diesem § angegebene Integrationszeichen lässt sich auf Newton's Centralbewegung übertragen und giebt alsdann eine Methode, welche schneller als die sonst übliche zum Ziele führt.

Die Sätze von Hamilton und von Darboux durch directe Integrationen nachzuweisen, und die Art des Kegelschnitts zu bestimmen, welcher unter den von Darboux angegebenen Bedingungen durchlaufen wird, — scheint nirgends versucht zu sein.

§ 6.

1) Comptes Rendus. 1877. Bd. 84. S. 671.

2) Comptes Rendus. 1877. Bd. 84. S. 939.

3) l. c : La solution du problème rentre dès lors dans la théorie classique.

4) Freilich setzt der im Text gegebene Beweis voraus, dass die Attraction eine Function der Entfernung sei. Man braucht aber nur zu berücksichtigen, dass, wie im Texte angegeben ist, unter den Ellipsen sich auch alle die Kreise befinden müssen, deren Mittelpunkt mit dem Attractionscentrum zusammenfällt; und man weiss, dass in solchen Kreisbahnen die Centralkraft constant ist. Folglich ist dieselbe nicht sowol eine Function von den Coordinaten, als vielmehr blos von der Entfernung (r). Somit ist auch unter der allgemeinen Voraussetzung, die Bertrand aufstellt, das Gesetz von Newton ohne jede Rechnung nachgewiesen.

5) Comptes Rendus. Bd. 84, S. 760 und 936.

6) Comptes Rendus. Bd. 84, S. 939.

7) Mémoires de la Société des sciences phys. et nat. à Bordeau[illegible] IV (2). S. 31—40.

8) Monthly Notices of the royal Astr. Society. Bd. 39. 187[illegible] S. 79.

§ 7.

1) Grunert's Archiv. Bd. 66. S. 107. („Eine weitere Fo[illegible]derung ist, dass v eindeutige Function von r sei.) Man wird nic[illegible] übersehen, dass der Formel für das Potential (v) als Nebenbedingu[illegible] für ihre Giltigkeit irrtümlicher Weise hinzugefügt ist (in Formel 9[illegible]

$$-\frac{c^2}{a} < \alpha < \frac{c^2}{a}$$

Dieser Zusatz sagt gerade das Gegenteil aus von dem, was au[illegible] gesagt werden sollte. Es hätte heissen müssen:

$$\alpha^2 > \left(\frac{c^2}{a}\right)^2$$

Uebrigens ist das Resultat nachher (S. 329) richtig gedeutet.

2) Legendre. Traité des fontions elliptiques. 1825. Bd. I. p. 349:

D'un point quelconque pris dans l'intérieur de la développée de l'ellipse il est toujours possible de mener quatre normales à la circonférence de l'ellipse; de tout point pris hors de l'aire de cette courbe on n'en pourra mener que deux et d'un point pris sur le contour de cette courbe, on pourra toujours faire passer trois normales.

§ 10.

1) Diese Voraussetzung lässt Hoppe (l. c.) nicht zu. Bei den grossen Planeten z. B. sind die Intervalle, in denen die Entfernungen von der Sonne variiren, von einander getrennt und (S. 329)

> obgleich das Anziehungsgesetz wegen Ungleichheit der Constanten in Bezug auf beide verschieden formulirt ist, so lässt sich die eine Function ohne Widerspruch als Fortsetzung der andern ansehen.

Dieser Satz ist nur dann richtig, wenn von zwei Functionen, die in getrennten Intervallen irgend wie definirt sind, stets die eine als Fortsetzung der andern angesehen werden darf, wenn also der Begriff der analytischen Function in physikalischen Untersuchungen nicht zugelassen wird.

Greifen hingegen, wie vielfach bei den kleinen Planeten, die Intervalle für r über einander, so bildet die Identität der Ausdrücke in den sich deckenden Intervallteilen eine neue Bedingung, an deren Erfüllung, so lange irrationale Wurzeln darin vorkommen, gewiss nicht gedacht werden kann.

Durch diesen Satz scheint eine Schwierigkeit mehr verschleiert als beseitigt zu werden.

Für die im Texte gemachte Voraussetzung kann man sich auf Newton's Autorität berufen, der das aus einer oder mehreren elliptischen Bewegungen abgeleitete Gesetz auch für diejenigen Entfernungen gelten lässt, die sich der Beobachtung entziehen.

§ 11.

1) Giornale di matematiche. Bd. XVIII. S, 272.

Dainelli stellt die Aufgabe:

> *Conoscendo la trajetoria di un punto mobile. trovare le componenti della forza. che la sollecita espresse in funzione delle coordinate del mobile.*

Diese Aufgabe ist unbestimmt, da noch die Geschwindigkeit beliebig angenommen werden darf. Daher geht in die Lösung derselben eine willkürliche Function ein.

2) Sturm. Cours de mécanique. Leçon 20 (256).

3) Comptes Rendus. Bd. 88, S. 909—911, oder Atti di Torino. Bd. XIV, 1879. S. 750.

Siacci stellt folgenden Satz auf:

> Quando un punto percorre una linea piana, se si decompone la forza in due, l'una passante per un punto fisso qualunque, l'altra secondo la tangente della curva etc.

Die tangentiale Richtung für die eine Componente wird auch Battaglini beibehalten (Giorn. d. mat. 1879, Bd. XVII), eher die von Siacci gestellte Aufgabe für einen Kegelschnitt dessen Gleichung

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 \text{ ist.}$$

Siacci, Battaglini und Dainelli scheinen sich die Rechnen dadurch zu erschweren, dass sie nicht die Geschwindigkeit selbst als willkürliche Function annehmen. Freilich muss man als eine solche Function der Coordinaten denken, die, wenn die Coordinaten zu ihren Anfangswerten zurückkehren, nicht

notwendig selbst ihren ursprünglichen Wert wieder erreicht, da ja sonst die Bewegung in einer geschlossenen Curve periodisch sein müsste.

Siacci setzt
$$xdy - ydx = T4t$$

Hier ist T die willkürliche Function. Die Componenten der Beschleunigung findet er:

$$F_1 = \frac{r}{D^3}\frac{T^3}{\varrho} \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{T}{D^3}\frac{dT}{ds}\left(v = \frac{T}{D}\right)$$

wo F_1 die nach dem festen Punkte O gerichtete, F_2 die tangentiale Componente bedeutet.

Dieses bei Battaglini und Dainelli wiederkehrende Resultat kann man fast ohne Rechnung folgendermassen ableiten:

Nach dem in § 1. gegebenen Hilfssatze wird F_1 durch eine Gerade dargestellt, deren Endpunkt mit dem von $\frac{v^2}{\varrho}$ auf einer zur Tangente parallelen Geraden liegt, also ist

$$F_1 : \frac{v^2}{\varrho} = r : D, \quad \text{d h} \quad F_1 = \frac{e^2 r}{\varrho D}$$

Durch diese Componente F_1 allein würde v so geändert (um $a_0 v$) dass
$$vdD + Dd_0 v = 0$$

wäre. Wenn sich nun die Geschwindigkeit um dv ändert, so muss der Ueberschuss

$$4_1 v = dv - d_0 v = dv + \frac{vdD}{D}$$

durch eine tangentiale Kraft hervorgebracht werden, deren Grösse (wie in der Huyghen'schen Formel):

$$F_2 = v\frac{d_1 v}{ds} = \frac{a}{D}\frac{d(vD)}{ds}$$

sein muss.

Battaglini setzt für den von ihm behandelten Kegelschnitt·

$$P = ax + \beta y + \gamma, \quad \mu x = P\cos\vartheta, \quad \nu y = P\sin\vartheta$$

und sieht ϑ als willkürliche Function der Zeit an. Durch zweimaliges Differentiiren der Coordinaten nach der Zeit findet er die Componenten X, Y, jede als eine Summe zweier Kräfte ausgedrückt.

Es erscheint also wie ein Zufall, dass sich die Summanden so ergeben haben, dass zwei sich zu einer Kraft zusammensetzen, welche nach dem Coordinatenanfangspunkte gerichtet ist, während die zwei anderen eine tangentiale Kraft ergeben.

Dainelli definirt die willkürliche Function f durch die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \pm k \frac{d\varphi}{dy} f, \quad \frac{dy}{dt} = \mp k \frac{d\varphi}{dx} f$$

in denen $\varphi xy = 0$ die Gleichung der Curve ist.

Dass diese Wahl nicht eine glückliche war, scheint sich im Verlaufe der Rechnungen an der Stelle zu zeigen, wo es heisst (Bd. XIX, S. 171)

„Prendiano ora la funzione arbitraria f della forma seguente:

$$f = \frac{T}{x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy}}$$

dove T indica una funzione pure arbitraria delle coordinate xy."

Da nämlich

$$D = \left(x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy}\right) : \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2} \quad \text{und}$$

$$v^2 = k^2 f^2 \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)^2\right]$$

ist, so ergiebt sich:

$$v = \frac{kT}{D}$$

und diese Function T ist dieselbe wie bei Siacci und freilich nicht wesentlich complicirter als die Geschwindigkeit selbst. Aber der lange Umweg wäre vermieden, wenn die Geschwindigkeit selbst von vornherein als die willkürliche Function genommen wäre.

4) Alle diese Aufgaben sind ausführlich von Dainelli (l c.) behandelt worden. Es tritt aber bei seiner Behandlungsweise nicht hervor, dass dieselben sämtlich darauf hinauslaufen, die normale Kraft $\frac{v^2}{\varrho}$ in gewisse zwei Componenten zu zerlegen. Die von Huyghens gegebenen Componenten findet er nach ziemlich umständlichen Rechnungen (Bd. XIX, S. 179). Nach der im Texte gegebenen Methode lassen sich die Aufgaben von Dainelli sehr leicht behandeln.

5) Diese Aufgabe findet sich bei Schell (l. c. S. 324). Aber das daselbst angegebene Resultat:

$$F_1 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2; \quad F_2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)$$

ist im Sinne des Textes keine Lösung der Aufgabe, da die Zeit noch nicht eliminirt ist. Uebrigens erhält man aus dem Resultate des Textes die von Schell gegebenen Gleichungen, wenn man

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad D = \frac{r^2 d\vartheta}{ds}, \quad \varrho = \frac{r\,dr}{dD}$$

setzt

6) Schell. l. c. S. 375.

§ 13.

1) The messenger of mathematics. X. S. 3.

2) Der Beweis dieses Satzes findet sich bei Schell S. 375.

3) Diese Gleichungen bilden auch bei Curtis den Ausgangspunkt. Im übrigen hat seine Methode mit der des Textes nichts gemein. Als Bedingung dafür, dass unter Wirkung der Kräfte F die gegebene Bahn möglich sei, findet er:

$$\Sigma c\,\Phi d\left(\frac{F}{\varphi}\right) = 0$$

§§ 14—20

Die in diesen §§ behandelte Frage scheint nirgends aufgestellt worden zu sein.

XVII.

Miscellen.

1.

Lineare Relationen zwischen Mengen relativer Primzahlen.

1.

Aus der einfachen Beziehung zwischen den Mengen relativer Primzahlen $\varphi(t)$

$$\Sigma \varphi(t) = n$$

oder

$$\frac{1}{n} \Sigma \varphi(t) = 1 \qquad (1)$$

wo sich die Summirung auf alle Teiler $t \leqq n$ von n bezieht, lassen sich sehr allgemeine Relationen ableiten, in welchen die Stellenvariable die natürliche Zahlenreihe durchläuft.

Zufolge (1) besteht nämlich die Identität

$$\begin{aligned} & A_2 + A_2 \pm A_3 \ldots + A_m \\ = & \frac{\varphi(1)}{1} A_1 + \frac{\varphi(1)+\varphi(2)}{2} A_2 + \frac{\varphi(1)+\varphi(3)}{3} A_3 \ldots \\ & \ldots + \frac{\Sigma \varphi(t)}{n} A_n \ldots + \frac{\Sigma \varphi(t)}{m} A_m \end{aligned}$$

woraus nach Ordnung nach den φ der aufeinander folgenden Zahlen die allgemeine Relation

$$\begin{aligned} & A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_m \\ = & \left(\frac{A_1}{1} + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{3} \ldots + \frac{A_m}{m}\right) \varphi(1) \\ + & \left(\frac{A_2}{2} + \frac{A_4}{4} + \frac{A_6}{6} \ldots\right) \varphi(2) \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{A_3}{3}+\frac{A_6}{6}\cdots\right)\varphi(3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{A_n}{n}+\frac{A_{2n}}{2n}\cdots\right)\varphi(n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{A_m}{m}\varphi(m) \qquad (2)$$

hervorgeht.

Das Bildungsgesetz der als Factor irgend eines $\varphi(n)$ auftretenden endlichen Reihe ist ein leicht erkennbares: es erscheinen als Glieder nur solche A, deren Zeiger Vielfache von n und $\leqq m$ sind.

Werden den A bestimmte Werte erteilt, so gehen specielle Relationen hervor, von welchen einige die Eigenschaft der Summirbarkeit der Coefficienten von φ besitzen.

Es zeigt sich unter anderem, dass manche bekannte Beziehung zwischen den φ aus der gemeinsamen Quelle, der Formel Nr. 2. herstammt.

2.

$$A_n = 1.$$

$$m=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{m}$$

$$+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{\left|\frac{m}{2}\right|}\right)\frac{\varphi(2)}{2)}$$

$$+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{\left|\frac{m}{3}\right|}\right)\frac{\varphi(3)}{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{\left|\frac{m}{n}\right|}\right)\frac{\varphi(a)}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\varphi(m)}{m} \qquad (3)$$

wo $\left|\frac{m}{n}\right|$ die grösste in $\frac{m}{n}$ enthaltene ganze Zahl vorstellt.

3.

$$A_n = n.$$

$$\frac{m^3+m}{2} = m\varphi(1) + \left|\frac{m}{2}\right|\varphi(2) + \left|\frac{m}{3}\right|\varphi(3)\,.\,.\,.$$
$$.\,.\,. + \varphi(k) + \varphi(k+1]\,.\,\,.\,. + \varphi(m) \tag{4}$$
$$k > \frac{m}{2}$$

Wird m der Reihe nach $= 1, 2, 3, \ldots, r$ genommen, so entsteht ein System von r Gleichungen, aus welchen sich

$$\varphi(s) = \left|\begin{array}{llllll} 1, & 0, & 0, & \ldots 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots \binom{2}{2} \\ 2, & 1, & 0, & \ldots 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots \binom{3}{2} \\ 3, & \left|\frac{3}{2}\right|, & 1, & \ldots 9, & 0, & \ldots\ldots\ldots \binom{4}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ n, & \left|\frac{n}{2}\right|, & \left|\frac{n}{3}\right|, & \ldots 1, & 0, & \ldots\ldots\ldots \binom{n+1}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r, & \left|\frac{r}{2}\right|, & \left|\frac{r}{3}\right|, & \ldots \left|\frac{r}{n}\right|, & \left|\frac{r}{n+1}\right|, & \ldots \binom{r+1}{2} \end{array}\right| \tag{5}$$

ergiebt, womit die zahlentheoretische Function „φ“ durch die zahlentheoretische Functionen $\left|\frac{p}{q}\right|$ ausgedrückt erscheint; $p \geqq q$ durchlaufen hiebei alle Werte von 1 bis r.

4.

$$A_n = n^r \quad r > 1 \text{ ganzl. Zahl}$$

$$\begin{aligned} & 1^r + 2^r + 3^r \ldots + m_r \\ & = (1^{\varrho-1} + 2^{r-1} \ldots + m^{r-1})\varphi(1) \\ & + (2^{r-1} + 4^{r-1} \ldots)\,\varphi(3) \\ & + (3^{r+4} + 6^{r-1} \ldots)\,\varphi(3) + \ldots \end{aligned}$$

woraus nach Summirung der Potenzen mittelst der Bernoulli'schen Function B

$$\frac{r}{r+1} B_{r+1}(m+1) - B_r(m+1) = 2^{r-1} B_r\left(\left|\frac{m}{2}\right|+1\right) \varphi(2)$$
$$+ 3^{r-1} B_r\left(\left|\frac{m}{3}\right|+1\right) \varphi(3) + 4^{r-1} B_r\left(\left|\frac{m}{4}\right|+1\right) \varphi(4) \ldots \qquad (6)$$

hervorgeht.

5.

$$A_n = \binom{m}{n-1}.$$

$$2^{m+1} = \frac{2^{m+1}-1}{m+1} \varphi(1) + \left(\frac{1}{2}\binom{m}{2} + \frac{1}{4}\binom{m}{3} \ldots\right) \varphi(2)$$
$$+ \left(\frac{1}{3}\binom{m}{2} + \frac{1}{6}\binom{m}{5} \ldots\right) \varphi(3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{m+1}\binom{m}{m}\Big) \varphi(m)$$

Beiderseits mit $m+1$ multiplicirt und $m-1$ für m geschrieben, ergiebt

$$1 + (n-1)2^m - \left(\binom{m}{2} + \binom{m}{4} \ldots\right) \varphi(2)$$
$$+ \left(\binom{m}{3} + \binom{m}{6} \ldots\right) \varphi(3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \binom{m}{m} \varphi(m-1) \qquad (7)$$

Werden die Coefficienten der φ mittels der Formel

$$\binom{m}{r} + \binom{m}{2r} + \binom{m}{3r} \ldots = \frac{2^m}{r} \sum_{v=1}^{r-1} \cos^m \frac{v\pi}{r} \cos \frac{nv\pi}{r} + \frac{2^m}{r} - 1$$

summirt, wodurch sie des zahlentheoretiscchen Charakters entkleidet werden, so findet sich

$$(2^{m-1} -)\varphi(2) + \left[\frac{2^m}{3} \sum_{v=1}^{2} \cos^m \frac{\pi v}{3} \cos \frac{\pi v m}{3} + \frac{2^m}{3} - 1\right] \varphi(3)$$
$$+ \left[\frac{2^m}{4} \sum_{v=1}^{3} \cos^m \frac{\pi v}{4} \cos \frac{\pi v m}{4} + \frac{2^m}{4} - 1\right] \varphi(4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left[\frac{2^m}{r} \sum_{v=1}^{r-2} \cos^m \frac{\pi v}{r} \cos \frac{\pi \cdot m}{r} + \frac{2^m}{r} - 1\right] \varphi(r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$

$$+\left[\frac{2^m}{m}\sum_{v=1}^{m-1}\cos^m\frac{\pi v}{m}\cos\frac{\pi m v}{m}+\frac{2^m}{m}-1\right]\varphi(m) \tag{8}$$
$$=1+(m-1)2^m\ldots$$

Nimmt man diese Relation für $m=2,3,\ldots,r$ in Anspruch, so erhält man $r-1$ Gleichungen, woraus sich $\varphi(r)$ in Form einer aus stetigen Functionen gebildeten Determinante ergiebt.

6.

$$A_n=\frac{1}{n^r},\ m=\infty,\ r \text{ ganze Zahl.}$$

$$\sum_{m=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^r}\equiv S_r=S_{r+1}\varphi(1)+\frac{1}{2^{r+1}}S_{r+1}\varphi(2)+\frac{1}{3^{r+1}}S_{r+1}\varphi(3)\ldots,$$

woraus die bekannte Beziehung

$$\sum_{v=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\varphi(v)}{v^{r-1}}=\frac{S_r}{S_{r+1}}\ldots \tag{9}$$

hervorgeht.

7.

$$A_n=z^n,\quad m=\infty\infty,\quad |z|<1,$$

$$\frac{z}{1-z}=\log\frac{1}{1-z}\varphi(1)+\log\frac{1}{1-z^2}\varphi(2)\ldots,$$

$$\frac{z}{1-z}=\sum_{r=1,2,\ldots}^{\infty}\varphi(v)\log\frac{1}{1-z^v}\ldots \tag{10}$$

$$|z|<1$$

oder

$$\prod_{v=1,2,\ldots}^{\infty}(1-z^v)^{\varphi(v)}=e^{-\frac{z}{1-z}},\quad |z|<1,\ldots \tag{11}$$

8

$$A_n=n^r z^n,\quad m=\infty,\quad |z|<1,\quad r>1 \text{ positiv und ganz.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^r z^n\equiv P_r(z)$$
$$=P_{r-1}(z)\varphi(1)+2^{r-1}P_{r-1}(z^2)\varphi(2)+3^{r-1}P_{r-1}(z^3)\varphi(3)+\ldots$$

oder

$$P_r(x) = \sum_{v=1,2,\ldots}^{\infty} v^{r-1} P_{r-1}\,\varphi(v)\ .\ .\ . \tag{12}$$

$$|z| < 1.$$

Die Reihen $P_r(z)$ *) können summirt werden, wenn man sich dieselben als Nullwerte des $r$ten Differentialquotienten vor

$$Z = e^v z + e^{2v} z^2\ .\ .\ . = \frac{e^v z}{1 - e^v z}$$

denkt. Für

$$P_r(z) = D_{c_z}^r \left\{\frac{e^v z}{1 - e^v z}\right\}_{v=0}$$

findet sich mit Benutzung einer bekannten Formel von Hoppe ein Ausdruck, der auf gleichen Nenner gebracht die Form

$$P_r(z) = \frac{C_1 z + c_2 z^2\ .\ .\ . + c_r z_r}{(1-z)^{r+1}} \tag{13}$$

annimmt. Schreibt man diese Gleichung

$$(1^r z + 2^r z^2 + 3^r z^3\ .\ .\ .)(1-z)^{r+1} = c_1 z + c_2 z^2\ .\ .\ . + c_r z^r$$

differentiirt k-mal bezüglich z, und setzt $z = 0$, so findet sich für den beliebigen Coefficienten C_k der Ausdruck

$$C_{k,r} = \binom{r+1}{0} k^r - \binom{r+1}{1} \overline{k-1}^r + \binom{r+1}{2} \overline{k-2}^k\ .\ .\ .$$

$$.\ .\ . + (-1)^{r-1} \binom{r+1}{k-1} 1^r;\quad k \leqq r,\ .\ .\ . \tag{14}$$

$$C_{1,r} = 1$$

welcher die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt für $k > r$ zu verschwinden.

Die Relation erhält jetzt folgende Gestalt

$$\frac{1}{(1-z)^{r+1}} \sum_{k=1}^{k=r} C_{k,r} z^k = \sum_{v=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{v^{r-1}\varphi(v)}{(1-z^v)^r} \sum_{k=1}^{k=r-1} C_{k,r-1} z^{kv},\ .\ .\ . \tag{15}$$

$$r > 1,\quad |z| < 1.$$

---

*) Allgemeinere Reihen dieser Reihen wurden vom Verfasser summirt in der Abhandlung: „Die Nullwerte höherer Ableitungen gewisser zusammengesetzter Functionen". Archiv d. Math. u. Phys. (2). T. XI. p. 60 ff.

9.

$$A_n = \frac{z^n}{u^n}, \quad m = \infty, \quad |z| < 1, \quad k \text{ positive ganze Zahl.}$$

$$\xi_k(z) \equiv \sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^k} - \sum_{\lambda=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{k+1}} \xi_{k+1}(z^\lambda), \quad |z| < 1, \ldots \tag{16}$$

10.

$$A_n = \frac{\cos 2\pi\, nx}{n^k}, \quad m = \infty, \quad k \text{ positive ganze Zahl.}$$

$$\sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \nu x}{\nu^n} = \sum_{\lambda=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{k+1}} \sum_{a=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \lambda \nu x}{\nu^{k+1}} \ldots \tag{17}$$

Die zweite Summe rechter Hand lässt sich für ungerade k summiren mittelst der Function $| x |$, welche einen echten Bruch (die Nulle inbegriffen) bezeichnet, der entweder zu x addirt oder von x subtrahirt werden muss, um eine ganze Zahl zu erhalten

Es ist

$$\sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \nu x}{\nu^{4h}} = (-1)^{h-1} \frac{(2\pi)^{2h}}{2(2h)!} B_{2h}(\, |x|\,) - S_{2h}, \ldots \tag{18}$$

wo $B\,2h$ das Functionszeichen für die Bernoulli'sche Function $2h$ter Ordnung bedeutet.

Zufolge (9) ist aber

$$\sum_{\lambda=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h}} S_{2h} = S_{2h-1}$$

daher

$$\sum_{\nu=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \nu x}{\nu^{2h-1}} = (-1)^{h-1} \frac{(2\pi)^{2o}}{2(2h)!} \sum_{\lambda=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h}} B_{2h}(\, |\lambda x|\,) + S_{2h-1}, \ldots \tag{19}$$

wo $h > 1$ sein muss, weil sonst S_{2h-1} divergirt.

Die linksseitige Reihe kann, wie es der Verfasser in dem Aufsatze: „Ueber harmonische Reihen ungerader Ordnung“ [Archiv, (2) T. VIII. p 320 ff.] zeigte, in eine Potenzreihe umgewandelt werden, wenn

$$0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}$$

ist. Tritt an die Stelle von x die Function $[x]$, welche die kleinste Zahl darstellt, die entweder zu x addirt oder von x subtrahirt

werden muss, um eine ganze Zahl zu geben, so gilt diese Transformation für jedes x; es ist dann

$$\frac{2\pi^2}{(2h)!} \sum_{\lambda=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h}} B_{2h}(\,|\,\lambda x\,|\,)$$

$$= (-1)^h \frac{S_{2h-3}}{2!\,(2\pi)^{2h-4}} [x]^2 \ldots + \frac{S_5}{(2h-6)!\,(2\pi)^4} [x]^{2k-4}$$

$$- \frac{S_3}{(2h-4)!\,(2\pi)^2} [x]^{2h-4}$$

$$+ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{2h-2} - \log 2\pi\,[x]\right) \frac{[x]^{2h-2}}{(2h-2)!}$$

$$+ \frac{2!}{1} \frac{S_2}{(2h)!} [x]^{2h} + \frac{4!}{2} \frac{S_4}{(2h+2)!} [x]^{2h-2} \ldots \tag{20}$$

11.

$$A_n = \frac{\cos 2\pi\, nx}{n^{2h}}, \quad n \text{ ungerade}, \quad m = \infty.$$

$$\sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\,\nu x}{n^{2h}} = \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h+1}} \sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\,\lambda\nu x}{\nu^{2h+1}}$$

Für die linksseitige Reihe erhält man mittelst der vom Verfasser in seiner „Theorie der Euler'schen Functionen" (Sitzgs.-Ber. d. königl. böhmischen Ges. d. Wiss. 1893) abgeleiteten Formel (120) die Summe

$$(-1)^{h-1} \frac{1}{2(2h-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2h} E_{2h-1}(1 - 4[x])$$

wo $[x]$ die obige Bedeutung hat; somit gilt

$$\sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\,\nu x}{\nu^{2h-1}} = \frac{(-1)^{h-1}}{2(2h-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2h} \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h}}$$

$$\cdot\, E_{2h-1}(1 - 4[\lambda x]) \ldots \tag{21}$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Für $h = 1$ ist die linksseitige Reihe summirbar und zwar ist

$$\sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\nu x}{\nu} = \tfrac{1}{2} \log \cot \pi x$$

$$0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{4}$$

folglich besteht

$$\sum_{\lambda=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^2}(1 - 4\{\lambda x\}) = \frac{8}{\pi^2}\log\cot \pi\{x\} \ldots \tag{22}$$

$$0 < x < +\infty$$

wo

$$x = m + \{x\}, \quad m \text{ positive ganze Zahl,}$$

$$0 \leqq \{x\} \leqq \tfrac{1}{4}$$

giltig also für alle positiven x-Werte, welche höchstens um $\frac{1}{4}$ grösser sind als eine ganze Zahl.

Barmen, December 1896. Franz Rogel.

2.

Ueber rationale Richtungscosinus.

Sind

$$\frac{x}{u}, \quad \frac{y}{u}, \quad \frac{z}{u}$$

die Richtungscosinus einer Geraden gegen 3 rechtwinklige Axen, so lassen sich (wie in Tl. LXI. S. 438 bewiesen) die ganzen Zahlen x, y, z, u allgemein in 4 ganzen Zahlen a, b, c, d wie folgt darstellen:

$$x = 2(ac + bd); \quad y = 2(ad - bc); \quad z = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \tag{1}$$

$$u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{2}$$

und drücken demnach alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \tag{3}$$

in ganzen Zahlen aus. Hieraus folgt der Satz:

„Kennt man die Zerlegung einer ganzen Zahl u in die Summe von 4 Quadratzahlen, so ist auch die Zerlegung von u^2 in die Summe von 3 Quadratzahlen bekannt.“

Nun hat Jacobi bewiesen, dass jede ganze Zahl die Summe von 4 Quadratzahlen ist. Folglich ist jede Quadratzahl die Summe von 3 Quadratzahlen; die Zerlegung selbst bleibt noch Problem.

Um indes für gegebene u alle Lösungen zu erhalten, ist es nicht nötig die geraden u zu berücksichtigen. Denn da x und y gerade

sind, so ist es auch z, und Gl. (3) lässt sich durch Division reduciren und zwar wiederholt, bis u ungerade wird.

Steht die Anzahl der Lösungen für ein ungerades u in Frage, so ist diese zunächst, wenn a, b, c, d von $-\sqrt{u}$ bis $\sqrt{u}$ variiren,

$$< (2\sqrt{u}+1)^4$$

Da ein Vorzeichenwechsel von a, b, c oder d nur einen Vorzeichenwechsel und Vertauschung von x, y bewirkt, so brauchen deren Werte nur von 0 bis $\sqrt{u}$ gezählt zu werden.

Weitere Reductionen ergeben sich, wenn man die Combinationen der a, b, c, d für

$$a \leqq b \leqq c \leqq d$$

bildet und von deren Permutationen alle äquivalenten in x, y, z ausschliesst. Aequivalent zeigen sich die gleichzeitigen Permutationen je zweier Pare von Elementen, so dass die 24 Permutationen 6 Gruppen zu 4 äquivalenten ergeben. Die dann übrig bleibenden 6 Lösungen aus jeder Combination findet man leicht, indem man ein beliebiges der 4 Elemente unverändert lässt und nur die 3 übrigen permutirt. Die 6 Permutationen fallen parweise in 3 zusammen, wenn 2 Elemente gleich sind; alle fallen zusammen, wenn 3 Elemente oder 2 Pare von Elementen gleich sind. Andre Reductionen der Anzahl sind speciellen Wertsystemen eigen. Ich lasse eine Tabelle der Lösungen der Gl. (3) folgen, welche aus der Variation der Elemente von 0 bis 4 hervorgehen, und gebrauche dabei die Abkürzung:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}$$

T a b e l l e.

$1 = (0, 0, 1)$	$27 = (2, 14, 23)$
$3 = (1, 2, 2)$	$= (2, 7, 26)$
$5 = (0, 3, 4)$	$= (7, 14, 22)$
$7 = (2, 3, 6)$	$29 = (3, 16, 24)$
$9 = (1, 4, 8)$	$= (11, 12, 24)$
$= (4, 4, 7)$	$= (12, 16, 21)$
$11 = (2, 6, 9)$	$31 = (5, 6, 30)$
$= (6, 6, 7)$	$33 = (1, 8, 32)$
$13 = (0, 5, 12)$	$= (8, 8, 31)$
$= (3, 4, 12)$	$= (4, 17, 28)$

15 = (2, 10, 11)	33 = (7, 16, 28)
17 = (0, 8, 15)	35 = (1, 18, 30)
= (8, 9, 12)	= (15, 18, 26)
19 = (1, 6, 18)	37 = (3, 8, 36)
= (6, 6, 17)	= (3, 24, 28)
= (6, 10, 15)	= (8, 24, 27)
21 = (4, 5, 20)	41 = (9, 24, 32)
= (4, 8, 19)	= (23, 24, 24)
= (4, 13, 16)	43 = (6, 7, 42)
= (8, 11, 16)	45 = (5, 8, 44)
23 = (3. 6, 22)	= (8, 19, 40)
= (3, 14, 18)	49 = (15, 24, 40)
= (6, 13, 18)	57 = (7, 8, 56)!
25 = (0, 7, 24)	

ngen, die sich durch Division mit einem Factor von u re- sind hier nicht aufgenommen, da sie durch Multiplication :hungen leicht hinzugefügt werden können.

r den aufgeführten Lösungen tritt eine sehr einfach fort- le Reihe bemerklich hervor und führt zur Entdekung der

$$(h^2 + h + 1)^2 = h^2 + (h + 1)^2 + \{h(h + 1)\}^2 \qquad (4)$$

ch:

$$h^2 + h + 1 = 1 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots h)$$

er zeigt die Tabelle, dass die meisten Pare verschiedener ür dasselbe u eine der 3 Zahlen x, y, z gemeinsam haben, ıus ihrer Verbindung jedesmal eine Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2 \qquad (5)$$

ıt.

ist bekanntlich jede Primzahl $4n + 1$ zerlegbar auf eine eine Art in die Summe zweier Quadrate. Ist daher $x^2 + y^2$, so ist Gl. (5) unmöglich (wo nicht identisch).

also p, q zwei Primzahlen, so hat man:

$$q = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma \pm \beta\delta)^2 + (\alpha\delta \mp \beta\gamma)^2 \qquad (6)$$

erfüllen die 2 Werte der rechten Seite die Gl. (5) ein- ach derselben Formel ist, wenn $r = \varepsilon^2 + \zeta^2$, weiter pqr in edenen Darstellungen eine Summe zweier Quadrate, nämlich

$$pqr = \{(\alpha\gamma \pm \beta\delta)\varepsilon \pm (\alpha\delta \mp \beta\gamma)\zeta\}^2 + \{(\alpha\gamma \pm \beta\delta)\zeta \mp (\alpha\delta \mp \beta\gamma)\varepsilon\}^2 \quad (7)$$

u. s. f. allgemein ein Product von m Primfactoren $4n+1$ in 2^{m-1} Darstellungen, und man findet aus einer Lösung von Gl. (3) alle auf diesem Wege zu ermittelnden Lösungen in a priori bekannter Anzahl, indem man x^2+y^2, dann x^2+z^2, dann y^2+z^2 in Primfactoren zerlegt, dann jeden Primfactor als Summe zweier Quadrate darstellt und die Producte nach Gl. (6), (7) etc. transformirt.

Kommt ein Factor $4n-1$ in einem der Producte vor, so ist dieses von der Operation auszuschliessen.

Ein Factor 2 hat für die Operation keine Wirkung, da

$$2p = (1^2+1^2)(\alpha^2+\beta^2) = (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2$$

nur ein Resultat ergibt.

R. Hoppe.

3.

Zum Beweise des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält.

In unserem Beweise des oben genannten Satzes (im 12. Teil der 2. Reihe dieses Archivs, Seite 439—441) haben wir behauptet, dass die in einer arithmetischen Reihe mit constanter Differenz, in der das Anfangsglied zur Differenz relativ prim sei, etwa vorkommenden Zahlen von der Form $6n \mp 1$ nie alle teilbar sein könnten. Diese Behauptung wollen wir hier noch besonders beweisen.

Die Doppelreihe $6n \mp 1$ enthält, nach Absonderung der mit 5 endigenden teilbaren Zahlen, die folgenden Zahlen:

5, 11, 17, 23, 29, . . .
7, 13, 19, ., 31, . . .

Die in dieser Doppelreihe vorkommenden teilbaren Zahlen lassen sich dadurch ermitteln, dass man für jede Primzahl $p > 5$ eine mit p^2 anfangende Doppelreihe mit der Differenz $6p$ bildet und dabei die mit 5 endigenden Zahlen überspringt. Dabei ist zu bemerken, dass, wenn p die Form $6n-1$ hat, die Differenz zwischen einer

oberen und einer unteren Zahl der Doppelreihe $= 2p$ und die Differenz zwischen einer unteren und der nächstfolgenden oberen Zahl $= 4p$ ist. Hat p aber die Form $6n+1$, so ist die Differenz zwischen einer oberen und einer unteren Zahl $= 4p$ und die Differenz zwischen einer unteren und der nächstfolgenden oberen Zahl $= 2p$. Für die Vielfachen der Potenzen von p sind die Zahlen in den Reihen für die Vielfachen von p mit enthalten.

Beispiel:

$$\underline{p = 7.}$$

$$\begin{array}{lll} 49, & 91, & 133, \ldots \\ 77, & 119, & 161, \ldots \end{array}$$

Diese Reihen sind arithmetische Reihen, bei denen das Anfangsglied und die Differenz den gleichen Teiler p haben. Sie stellen alle teilbaren Zahlen der Reihe $6n\mp 1$ in gleichmässig fortschreitender Weise dar. — Sollen nun andere Reihen mit bestimmter Differenz dieselben teilbaren Zahlen darstellen, so müssen Anfangsglied oder Differenz derselben entweder Teiler oder Vielfache der Anfangsglieder und der Differenzen der ersteren Reihen sein. Dividirt man Anfangsglied und Differenz, bzhw. nur das Anfangsglied oder nur die Differenz einer der ersteren Reihen durch den Teiler p bzhw. durch die Teiler 2 und drei, so trifft man wieder auf aufeinanderfolgende Glieder der Reihe $6n\mp 1$ oder man erhält Reihen, bei denen Anfangsglied und Differenz den gleichen Teiler haben. Bildet man aber Vielfache vom Anfangsgliede und der Differenz der ersteren Reihen, so kann man damit auch keine Reihen herstellen, bei denen Anfangsglied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Ist also eine Reihe gegeben, in welcher Anfangsglied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, und enthält diese Reihe unendlich viele Zahlen von der Form $6n\mp 1$, so müssen diese Zahlen jedenfalls wechselweise aus der Reihe der Primzahlen von der Form $6n\mp 1$ und aus der Reihe der teilbaren Zahlen von der Form $6n\mp 1$ entnommen werden, denn ein dauernder Fortlauf einer solchen Reihe in der Reihe der teilbaren Zahlen von der Fom $6n\mp 1$ ist nach den obigen Ausführungen unmöglich. Eine arithmetische Reihe, in welcher Anfangsglied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, wird also, wenn sie in's Unendliche ausgedehnt wird, unendlich oft eine Zahl aus der Reihe der Primzahlen von der Form $6n\mp 1$ und unendlich oft eine Zahl aus der Reihe der teilbaren Zahlen von der Form $6n\mp 1$ entnehmen müssen. — Wir können also getrost die Behauptung aufstellen, dass mit dem Nachweise, dass in den Reihen der 7 Reihenarten

	Anfangsglied:	Differenz:
1)	$6n \mp 1$	$2n$
2)	$6n + 3$	$6n \mp 2$
3)	$6n$	$6n \mp 1$
4)	$6n \mp 2$	$6n \mp 1$
5)	$6n \mp 2$	$6n + 3$
6)	$6n \mp 1$	$6n + 3$
7)	$6n + 3$	$6n \mp 1$

denen noch eine 8. Reihenart mit dem Anfangsgliede $6n \mp 1$ und der Differenz $6n \pm 1$ hinzuzufügen ist, unendlich viele Zahlen von der Form $6n \mp 1$ enthalten sind, auch zugleich der Nachweis geführt ist, dass in jeder unendlichen arithmetischen Reihe mit constanter Differenz, in der das Anfangsglied und die Differenz teilerfremde Zahlen sind, unendlich viele Primzahlen enthalten sein müssen.

Oldenburg i. Gr.

G. Speckmann.

4.

Ueber die Zerlegung der Zahlen in Quadrate.

I. Zerlegung dor Zahlen von der Form $4n+1$ in 2 Quadrate.

Diejenigen Zahlen Z von der Form $4n+1$, die sich in 2 Quadrate zerlegen lassen, kann man in Classen einteilen, innerhalb deren die Zahlen Z sowol wie die Grundzahlen der Quadrate a^2 und b^2 arithmetische Reihen bilden. Es mögen einige dieser Classen hier folgen.

Classe 1.

Z.	Quadrate $a^2 + b^2$
5	$1^2 + 2^2$
13	$2^2 + 3^2$
25	$3^2 + 4^2$
41	$4^2 + 5^2$
61	$5^2 + 6^2$
85	$6^2 + 7^2$
u. s. w.	u. s. w.

Die Zahlen Z bilden eine arithmetische Reihe 2. Ordnung nach der Formel $2x^2+6x+5$. Die Grundzahlen a sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe ven 1 an und die Grundzahlen der Quadrate b^2 sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 2 an.

Classe 2.

Z.	Quadrate a^2+b^2
17	1^2+4^2
29	2^2+5^2
45	3^2+6^2
65	4^2+7^2
89	5^2+8^2
117	6^3+9^2
u. s. w.	u. s. w.

Die Zahlen Z bilden eine arithmetische Reihe 2. Ordnung nach der Formel $2x^2+10x+17$. Die Grundzahlen der Quadrate a^2 sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 an und die Grundzahlen der Quadrate b^2 sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 4 an.

Classe 3.

Z.	Quadrate a^2+b^2
37	1^2+6^2
53	2^2+7^2
73	3^2+8^2
97	4^2+9^2
125	5^2+10^2
147	6^2+11^2
u. s. w.	u. s. w.

Die Zahlen Z bilden eine arithmetische Reihe nach der Formel $2x^2+14x+37$. Die Grundzahlen der Quadrate a^2 sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 an und die Grundzahlen der Quadrate b^2 sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 6 an.

Die 1. Classe beginnt mit dem Quadrat der Zahl 1, also 1^2 und mit dem Quadrat der ersten geraden Zahl, also 2^2; die 2. Classe beginnt mit dem Quadrat 1^2 und mit dem Quadrat der zweiten geraden Zahl, also 4^2; . . . ; die $n$te Classe beginnt mit dem Quadrat

der $n$ten geraden Zahl, also $(2n)^2$. Die Formeln für die Reihen der Zahlen Z zu den jeweiligen Classen sind die folgenden:

Classe.	Formel der Zahlenreihe Z:
1	$2x^2 + 6x + 5$
2	$2x^2 + 10x + 17$
3	$2x^2 + 14x + 37$

u. s. w.

Allgemein lautet die Formel für die Zahlen Z zur $n$ten Classe:

$$2x^2 + (6 + 4m)x + (2n)^2 + 1 \begin{pmatrix} x = 0, 1, 2, \ldots \\ m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

Die Grundzahlen der Quadrate a^2 zur $n$ten Classe sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 an und die Grundzahlen der Quadrate b^2 zur $n$ten Classe sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 2n an.

Bei der 1. Classe ist die Differenz zwischen den Grundzahlen der zu einer jeweiligen Zahl Z gehörigen Quadrate gleich 1, bei der 2. gleich 3, bei der 3. gleich 5, bei der $n$ten gleich $2n - 1$.

Da innerhalb jeder Classe die Reihe der Grundzahlen der Quadrate a die natürliche Zahlenreihe von 1 an ist, so kann man aus diesen Classen auch Zahlformen entnehmen, zu denen je ein Quadrat der Zahlen 1, 2, 3, . . . gehört. Solche Formen sind diese:

Zahlformen. $(x = 0, 1, 2, 3 \ldots)$	Zugehörige Quadrate.
$4x^2 + 8x + 5$	1^2
$4x^2 + 12x + 13$	2^2
$4x^2 + 16x + 25$	3^2

u. s. w.

Die Differenz zwischen diesen Formen ist

$$4x + z \begin{pmatrix} x = 1, 2, 3, \ldots \\ z = 8, 12, 16, \ldots \end{pmatrix}$$

und die Constanten dieser Formen sind nach einander die Zahlen der Reihe

$$2x^2 + 6x + 5 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

II. Zerlegung von Zahlen in die Form $a^2 + pb^2$.

In ganz ähnlicher Weise, wie oben für diejenigen Zahlen, welche in 2 Quadrate zerlegt werden können, Classen gebildet sind, können auch für diejenigen Zahlen, welche in die Form $a^2 + pb^2$ (p = Primzahl) zerlegt werden können, Classen gebildet werden, innerhalb deren die Zahlen Z sowol wie die Grundzahlen der Quadrate a^2 und b^2 arithmetische Reihen sind.

III. Zerlegung einer einzelnen Zahl in 2 Quadrate oder in 1 Quadrat und ein p faches Quadrat.

Zur Zerlegung einer einzelnen Zahl in 2 Quadrate oder in ein Quadrat und ein p faches Quadrat werden, nachem die Wurzel r der Congruenz $x^2 \equiv -p \pmod{Z}$ gefunden ist, die reducirten Formen und die Kettenbrüche mit Bildung von Näherungsbrüchen angewandt Beides ist nicht erforderlich, da sich bei der einfachen Anwendung des Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Teilers auf $\frac{Z}{r}$ die Grundzahlen der betreffenden Quadrate von selbst ergeben, indem sie in der Reihe der auftretenden Teiler mit vorkommen.

Beispiele:

1) $Z = 653$. — Die Congruenz $x^2 \equiv -1$) (mod 653) hat die Wurzeln ± 149.

$$653 : 149 : 57 : 35 : \underline{22} : \underline{13} : 9 : 4$$

$$Z = 13^2 + 22^2$$

2) $Z = 587$. — Die Congruenz $x^2 \equiv -2$ (mod. 587) hat die Wurzeln ± 207.

$$587 : 207 : 173 : \underline{34} : \underline{3} : 1$$

$$Z = 3^2 + 2 \,.\, 17^2$$

3) $Z = 829$. — Die Congruenz $x^2 \equiv -3$ (mod. 829) hat die Wurzeln ± 251.

$$829 : 251 : 76 : \underline{23} : 7 : 2 : 1$$

$$Z = 23^2 + 3 \,.\, 10^2$$

4) Z = 989 — Die Congruenz $x^2 \equiv -5$ (mod. 989) hat die Wurzeln ± 77, ± 353.

$$989 : 77 : \underset{\cdots}{65} : \underline{12} : 5 : 2$$

$$Z = 12^2 + 5 \,.\, 13^2.$$

$$989 : 353 : 283 : \underline{70} : \underline{3} : 1$$

$$Z = 3^2 + 5 \,.\, 14^2.$$

G. Speckmann.

5.

Systeme von arithmetischen Reihen *n*ter Ordnung.

Durch Aneinanderreihung von Verticalreihen lässt sich die natürliche Zahlenreihe wie folgt in Systeme von Horizontalreihen zerlegen:

1) 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...
   3, 5, 8, 12, 17, ...
   6, 9, 13, 18, ...
   10, 14, 19, ...
   15, 20, ...
   21, ...

Die Horizontalreihen sind arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe resp. aus den Zahlen 1, 2, 3, . . ., 2, 3, 4, ... 3, 4, 5, . . . u. s. w. besteht

2) 1, 3, 7. 13, 21, ...
   2, 4, 8, 14, 22. . . . .
   5, 9, 15, 23, ...
   6, 10, 16, 24, ...
   11, 17, 25, ...
   12, 18, 26, ...
   19, 27, ...
   20, 28, ...
   29, ...
   30, ...

Die Horizontalreihen sind arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe resp. aus den Zahlen 2, 4, 6, ... 4, 6, 8, . . . besteht.

3)

1, 4, 10, 19, 31, ...
2, 5, 11, 20, 32, ...
3, 6, 12, 21, 33, ...
7, 13, 22, 34, ...
8, 14, 23, 35, ...
9, 15, 24, 36, ...
16, 25, 37, ...
17, 26, 38, ...
18, 27, 39, ...
28, 40, ...
29, 41, ...
30, 42, ...
43, ...
44, ...
45, ...

Die Horizontalreihen sind arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe resp. aus den Zahlen 3, 6, 9, . . ., 6, 9, 12, . . . u. s. w. besteht.

In ähnlicher Weise kann man fortfahren und unendlich viele Systeme von arithmetischen Reihen bilden.

Richtet man ein solches System so ein, dass in der obersten Horizontalreihe die Quadrate der Zahlen der nat. Zahlenreihe zu stehen kommen, so gestaltet sich dasselbe wie folgt:

4)

1, 4, 9, 16, 25, ...
2, 5, 10, 17, 26, ...
3, 6, 11, 18, 27, ...
7, 12, 19, 28, ...
8, 13, 20, 29, ...
14, 21, 30, ...
15, 22, 31, ...
23, 32, ...
24, 33, ...
34, ...
35, ...

Die Horizontalreihen sind arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe aus aufeinander folgenden ungeraden

Zahlen, nämlich resp. aus den Zahlen 3, 5, 7, . . . , 5, 7, 9, . . . u. s. w. besteht.

In ähnlicher Weise lassen sich aus der nat. Zahlenreihe Systeme von arithmetischen Reihen 3ter, 4ter, . . . $n$ter Ordnung bilden, in denen die oberste Reihe aus 3ten, 4ten, . . . $n$ten Potenzzahlen besteht.

Oldenburg i. Gr. G. Speckmann.

6.

Ueber Potenzreihen.

Aus den 3ten Potenzen der Zahlen a der natürlichen Zahlenreihe kann man durch Hinzunahme geeigneter Quadratzahlen b eine Reihe von Quadratzahlen c bilden. Es mögen die Reihen der betreffenden Zahlen hier folgen.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{n} & & \underline{b} & & \underline{c} \\ 2^3 & + & 1^2 & = & 3^2 \\ 3^3 & + & 3^2 & = & 6^2 \\ 4^3 & + & 6^2 & = & 10^2 \\ 5^3 & + & 10^2 & = & 15^2 \end{array}$$

u. s. w.

Die Reihe der Wurzeln a ist die natürliche Zahlenreihe von 2 an, die Reihe der Wurzeln b ergiebt sich aus der Formel

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 1 \, (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Reihe der Wurzeln c ergiebt sich aus der Formel

$$\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x + 3 \, (x = 0, 1. 2, \ldots)$$

Aus den vorstehenden Reihen für die dritte und zweite Potenz lassen sich dadurch, dass man die Wurzelzahlen b resp. mit 2, 3, 4, . . . , 2^x. 3^x, 4^x, . . . multiplicirt und die Quadrate der so entstandenen Zahlen zu den Potenzen von der Form a^{2n-1} hinzunimmt, Quadratzahlen von der Form

$$a^{2x-1} + b^2 = c^2$$

bilden. Alle Wurzelzahlen c erhält man auch dadurch, dass man die oben für c angegebenen Zahlen resp. mit 2^x, 3^x. 4^x, . . . multiplicirt.

So ist z. B.

$$2^5 + 2^2 = 6^2$$
$$3^5 + 9^2 = 18^2$$
$$4^5 + 24^2 = 40^2$$

u. s. w.

$$2^7 + 4^2 = 12^2$$
$$3^7 + 27^2 = 54^2$$
$$4^7 + 96^2 = 160^2$$

u. s. w.

G. Speckmann.

7.

Ueber die Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv a \,(\text{mod.}\, p)$.

Auf Seite 446--448, Teil 14, 2. Reihe dieses Archivs haben wir eine Auflösungsmethode für die Congruenz $x^2 \equiv a \,(\text{mod.}\, p)$ bekannt gegeben. Diese Auflösungsmethode gilt natürlich auch allgemein für jede ungerade Modulzahl. — Jetzt möchten wir noch mitteilen, dass das angegebene Verfahren noch bedeutend dadurch verkürzt werden kann, dass man in die Formel $pn + a - r$ für u nicht alle Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . einsetzt, sondern nur einige besonders ausgewählte Zahlen. Setzt man nämlich in $z^2 + z$ für z nach einander die Zahlen 1, 2, 3, . . . ein, so entstehen die folgenden Summen: 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, . . . Die Endziffern dieser Summe wiederholen sich von 10 zu 10 Summen und können nur gleich 2, 6 oder 0 sein. Dieser Umstand führt zu einer grossen Abkürzung der Rechnung. Es sei z. B. die Congruenz $x^2 \equiv 300 \,(\text{mod.}\, 897)$ gegeben. $\left(\frac{897-1}{2}\right)^2 \equiv 673 \,(\text{mod.}\, 897)$. Es ist also die Formel $897\,n - 373$ zu benutzen. Setzt man in diese Formel die Zahlen 1, 2, 3, . . . ein, so entstehen Summen mit den Endziffern 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0. Da nur diejenigen Summen, welche die Endung 2, 6 oder 0 haben, Zahlen von der Form $z^2 + z$ sind, so brauchen wir hier auch nur solche Summen zu benutzen, nämlich 5 . 897—373, 7 . 897—373, 9 . 857 — 373 u. s. w. Die Rechnung stellt sich dann wie folgt dar:

$$897n - 373$$

$n = 5.$	$5 \,.\, 897 - 373 = 4112 = 64^2 + 16$
$n = 7.$	$7 \,.\, 897 - 373 = 5906 = 76^2 + 130$
$n = 9.$	$9 \,.\, 897 - 373 = 7700 = 87^2 + 131$
$a = 25.$	$4112 + 8970 = 13082 = 114^2 + 86$
$\pi = 17.$	$5905 + 8970 = 14876 = 121^2 + 235$
$n = 19.$	$7700 + 8970 = 16670 = 129^2 + 29$
$n = 25.$	$13082 + 8970 = 22052 = 148^2 + 148$

$\frac{897-1}{2} - 148$ und $\frac{897+1}{2} + 148$, d. i. 300 und 596 sind Wurzeln der Congruenz $x^2 \equiv 300 \pmod{897}$

Oldenburg i. Gr. G. Speckmann.

XVIII.

Ueber die pythagoreischen Dreiecke und ihre Anwendung auf die Teilung des Kreisumfangs.

Von

Graeber,

Seminarlehrer in Aurich.

Pythagoreische Dreiecke heissen diejenigen Dreiecke, deren Hypotenuse und Katheten pythagoreische Zahlen zu Längeneinheiten haben. Die Zahlen a, b, c heissen pythagoreische Zahlen, wenn

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ist. ${}^c\underset{a}{\triangle}{}^b$ bezeichnet ein pythagoreisches Dreieck mit den pythagoreischen Zahlen a, b, c.

Die Hypotenusenwinkel sind β und γ; β liegt der Kathete b und γ der Kathete c gegenüber, ${}^4\underset{5}{\triangle}{}^3$ bezeichnet z. B. das pythagoreische Dreieck, dessen Hypotenuse 5 und dessen Katheten b und c 3 beziehungsweise 4 Längeneinheiten haben. ${\beta_3}^5$ liegt der Kathete $b = 3$ und $\gamma^4{}_5$ der Kathete $c = 4$ gegenüber. Ein pythagoreisches Dreieck, dessen Hypotenuse eine Primzahl ist, heisst ein ursprüngliches und hat die Bezeichnung $\underset{a}{\triangle}$, ein solches, dessen Hypotenuse ein Product aus zwei oder mehreren Primzahlen ist, heisst ein zusammengesetztes pythagoreisches Dreieck, dessen Bezeichnung $\underset{a_1 a_2 .. a_n}{\triangle}$ ist. Alle anderen pythagoreischen Dreiecke heissen abgeleitete und zwar einfach abgeleitete, wenn die Hypotenuse eine Potenz einer primzahligen Hypotenuse ist und zusammengesetzt abgeleitete py-

thagoreische Dreiecke, wenn die Hypotenuse ein Product aus Potenzen von primzahligen Hypotenusen ist. Jene werden mit $\underset{a^p}{\triangle}$, diese mit $\underset{a_1^q a_2^r \dots a_n^s}{\triangle}$ bezeichnet.

Alle pythagoreischen Dreiecke lassen sich aus dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck construiren. Dieses Dreieck ist $\triangle ABC$ mit AB als Hypotenuse und mit $AC = BC$ als Katheten. Figur 1.

§ 1.

Um ${}^4\triangle^3$ zu construiren, verbindet man A mit D, der Mitte von CB dann ist

$$2 \text{ Wkl. } DAE = \beta_5{}^3$$

und

$$2 \text{ Wkl. } CAD = \gamma_5{}^4$$

Es ist

$$\overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

oder da

$$AC = 2CD \quad \text{ist,}$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 + 4\overline{CD}^2 = 5\overline{CD}^2$$

und

$$AD = CD\sqrt{5}$$

Ferner ist:

$$CD\sqrt{5} : DB = \sin B : \sin DAB$$

und da

$$\sin B = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad DB = CD$$

ist:

$$\sin DAB = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{0,1}$$

$$\log \sin DAB = \tfrac{1}{2}\log 0,1 = 0,5000000 - 1$$

$$\text{Wkl. } DAB = 18^0\ 26'\ 5\frac{515''}{631}$$

Da

$$\text{Wkl. } CAD = 45^0 = \text{Wkl. } DAB \text{ ist,}$$

ist

$$\text{Wkl. } CAD = 26^0\ 33'\ 54\frac{116''}{631}$$

mithin ist

$$2 \text{ Wkl. } DAB = 36^0\ 52'\ 11\frac{349''}{631} \quad \text{und}$$

$$2 \text{ Wkl. } CAD = 53^0\ 7'\ 48\frac{232''}{631}$$

In ${}^4\underset{5}{\triangle}{}^3$ ist

$$\sin \beta_5{}^3 = \frac{3}{5}$$

$$\log 3 = 0{,}477\,1213$$

$$\log 5 = 0{,}698\,9700$$

$$\log \frac{3}{5} = 0{,}778\,1513 - 1;$$

$$\beta^3{}_5 = 36^\circ\, 52'\, 11\, \frac{9''}{14}$$

2 Wkl. $DAB = \beta^3{}_5$

Der Beweis ohne Logarithmen ist: Da

$$\sin CAD = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \cos CAD = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

ist, so ist

$$\sin 2\, CAD = 2\, \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

Nun ist

$$\sin \gamma^4{}_5 = \frac{4}{5}, \quad \text{also ist} \quad \sin 2\, CAD = \sin \gamma^4{}_5$$

oder

$$2 \,.\, CAD = \gamma_5$$

2 Wkl. DAB und 2 Wkl CAD sind die Hypotenusenwinkel von ${}^4\triangle^3$.

Wird CB in drei gleiche Teile geteilt, und werden die Teilpunkte mit A verbunden, so bilden die Transversalen mit der Hypotenuse die halben Hypotenusenwinkel von ${}^4\underset{5}{\triangle}{}^3$ und ${}^{12}\underset{13}{\triangle}{}^5$.

Bei der Teilung in vier gleiche Teile erhält man die Hypotenusenwinkel von ${}^4\underset{5}{\triangle}{}^3$, ${}^{15}\underset{17}{\triangle}{}^8$, ${}^{28}\underset{25}{\triangle}{}^4$.

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Die Transversalen nach den Teilpunkten des einen Schenkels im gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke gezogen, bilden mit der Hypotenuse halbe Hypotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken.

Eine nach § 18. berechnete Tabelle für Teilungen in 2 bis 8 gleiche Teile wird diesen Satz bestätigen

§ 2.

Der Unterschied der beiden Hypotenusenwinkel von $^{4}\underset{5}{\triangle}^{3}$ Hypotenusenwinkel von $^{24}\underset{25}{\triangle}^{7}$.

$$\text{I.}\quad \gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5} = \beta^{7}_{25}$$

Es ist:

$$\sin(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = \sin\gamma^{4}_{5} \cdot \cos\beta^{3}_{5} - \sin\beta^{6}_{5} \cdot \cos\gamma^{4}_{5}$$

Setzt man

$$\sin\gamma^{4}_{5} = \cos^{3}_{5}, \quad \sin\beta^{4}_{5} = \cos\varepsilon^{4}_{5}$$

so erhält man

$$\sin(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = \sin^2\gamma^{4}_{5} - \sin^2\beta^{3}_{5} = \cos^2\beta^{3}_{5} - \cos^2\gamma^{4}_{5}$$

oder

$$\text{I.}\quad \sin(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = \cos 2\beta^{3}_{5}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned}\text{II.}\quad \cos(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) &= \cos\gamma^{4}_{5} \cdot \cos\beta^{3}_{5} + \sin\gamma^{4}_{5} \cdot \sin\beta^{3}_{5} \\ &= \sin\beta^{3}_{5} \cdot \sin\gamma^{4}_{5} + \sin\gamma^{4}_{5} \cdot \sin\beta^{3}_{5} \\ &= 2\sin\beta^{3}_{5} \cdot \sin\gamma^{4}_{5} = 2\sin\beta^{3}_{5} \cdot \cos\beta^{3}_{5} \\ &= 2\sin 2\beta^{3}_{5}\end{aligned}$$

Für

$$\sin\beta^{3}_{5} = \frac{3}{5} = \cos\gamma^{4}_{5} \quad \text{und} \quad \sin\gamma^{4}_{5} = \frac{4}{5} = \cos\beta^{3}_{5}$$

wird

$$\sin(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = \frac{7}{25} \text{ und } \cos(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = \frac{24}{25}$$

Da

$$\sin^2(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) + \cos^2(\gamma^{4}_{5} - \beta^{4}_{5}) = 1$$

oder

$$25^2 = 7^2 + 24^2$$

ist, so ist $\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}$ ein Hypotenusenwinkel von $^{24}\underset{25}{\triangle}^{7}$.

Es ist nun

$$\text{III.}\quad \sin(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = \frac{4}{25} = \sin\beta^{7}_{24}$$

also ist

$$\text{a)}\quad \gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5} = \beta^{7}_{25}$$

Der andere Hypotenusenwinkel ist, da

$$\text{IV.}\quad \cos(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = 2\beta^{7}_{25} = \frac{24}{25} = \sin\gamma^{24}_{25} \text{ ist,}$$

$$\text{b)}\quad 2\beta^{3}_{5} = \gamma^{24}_{25}$$

$$2.\quad \gamma^{24}_{25} - \beta^{7}_{25} = \gamma^{4}_{5}.$$

Folgende Gleichungen, die sich aus (I, II., III., IV) ergeben,

$$\text{IIIa.}\quad \sin(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = \cos 2\beta^{3}_{5} = \sin\beta^{7}_{25} = \cos\gamma^{24}_{25} = \frac{7}{25}$$

$$\cos(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = \sin 2\beta^{3}_{5} = \sin\gamma^{24}_{25} = \cos\beta^{7}_{25} = \frac{24}{25}$$

formen die Gleichungen

$$\sin(\gamma^{24}_{25} - \beta^{7}_{25}) = \sin\gamma^{24}_{25} \,.\, \cos\beta^{7}_{25} - \cos\gamma^{24}_{25} \,.\, \sin\beta^{7}_{25}$$

$$\cos(\gamma^{24}_{25} - \beta^{7}_{25}) = \cos\gamma^{24}_{25} \,.\, \cos\beta^{7}_{25} + \sin\gamma^{24}_{25} \,.\, \sin\beta^{7}_{25}$$

um in:

$$\text{V.}\quad \sin(\gamma^{24}_{25} - \beta^{11}_{25}) = \sin 2\beta^{3}_{5} \,.\, \sin 2\beta^{3}_{5} - \cos 2\beta^{3}_{5} \,.\, \cos 2\beta^{3}_{5}$$

$$= -\cos 4\beta^{3}_{5} = +\frac{527}{625}$$

$$\text{VI.}\quad \cos(\gamma^{24}_{25} - \beta^{7}_{25}) = \cos 2\beta^{3}_{5} \,.\, \sin 2\beta^{3}_{5} + \cos 2\beta^{3}_{5} \,.\, \sin 2\beta^{3}_{5}$$

$$= 2\sin 2\beta^{3}_{5} \,.\, \cos 2\beta^{3}_{5} = \sin 4\beta^{3}_{5} = \frac{336}{625}$$

Nun ist

$$\sin^2(\gamma^{24}_{25} - \beta^{7}_{25}) + \cos^2(\gamma^{24}_{25} - \beta^{7}_{25}) = 1 \quad \text{und}$$

$$625^2 = 336^2 + 527^2$$

folglich ist $\gamma^{24}_{25} - \beta^{7}_{25}$ ein Hypotenusenwinkel von $^{527}\underset{625}{\triangle}{}^{336}$.

Es ist

$$\sin\beta_5{}^4 = \cos\gamma_5{}^4 = \frac{336}{625}$$

mithin ist

$$\cos(\gamma^{24}_{25} - \beta^{7}_{25}) = \frac{336}{625} = \cos\gamma_5{}^4 \quad \text{und}$$

$$\gamma^{24}_{25} - \beta^{7}_{25} = \gamma_5{}^4$$

Der andere Hypotenusenwinkel ist

$$90^0 - \gamma^{24}_{25} + \beta^{7}_{25} = 2\beta^{7}_{25} = 2(\gamma^{4}_{5} - \beta^{3}_{5}) = 2\beta^{4}_{5}$$

Da man ebenso erhält:

$$\sin(\gamma_5{}^4 - \beta_5{}^4) = \cos 8\beta^{3}_{5}$$

$$\cos(\gamma_5{}^3 - \beta^{4}_{5}) = -\sin 8\beta^{4}_{5}$$

so ergiebt sich der Satz:

A. Der Unterschied der beiden Hypotenusenwinkel von $\underset{a^n}{\triangle}$ ist ein Hypotenusenwinkel von $\underset{a^{2n}}{\triangle}$

Mittels der Gleichungen

$$\sin 2\beta_{\frac{3}{5}} = \sin 2\gamma_{\frac{4}{5}} \quad \text{und} \quad \cos 2\beta_{\frac{3}{5}} = -\cos 2\gamma_{\frac{4}{5}}$$

erhält man aus V. und VI.:

$$\sin(\gamma_{\frac{24}{25}} - \beta_{\frac{7}{25}}) = 2\sin 2\beta_{\frac{3}{5}} \,.\, \sin 2\gamma_{\frac{4}{5}} + \cos 2\beta_{\frac{3}{5}} \,.\, \sin 2\gamma_{\frac{4}{5}}$$
$$= \cos 2\gamma_{\frac{4}{5}} - \beta_{\frac{3}{5}})$$

$$\cos(\gamma_{\frac{24}{25}} - \beta_{\frac{7}{25}}) = \sin 2\gamma_{\frac{4}{5}} \,.\, \cos 2\beta_{\frac{3}{5}} - \cos 2\gamma_{\frac{4}{5}} \,.\, \sin 2\beta_{\frac{3}{5}}$$
$$= \sin 2(\gamma_{\frac{1}{5}} - \beta_{\frac{3}{5}})$$

Hieraus folgt:

B. Der doppelte Unterschiedswinkel der beiden Hypotenusenwinkel von $\underset{a^n}{\triangle}$ ist ein Hypotenusenwinkel von $\underset{a^{4n}}{\triangle}$, wenn derselbe Wkl. 1 *R* ist.

§ 3.

1. $\beta_{\frac{3}{5}} - \beta_{\frac{7}{25}} = \beta_{\frac{44}{125}}$.

Mit Zuhilfenahme der Gleichungen § 2. IIIa., IVa. erhält man nach der Sinus- und Cosinusformel für die Differenz zweier Winkel:

$$\text{I.} \quad \sin(\beta_{\frac{3}{5}} - \beta_{\frac{7}{25}}) = \sin\beta_{\frac{3}{5}} \,.\, \sin 2\beta_{\frac{3}{5}} - \cos 2\beta_{\frac{3}{5}} \,.\, \cos\beta_{\frac{3}{5}}$$
$$= -\cos 3\beta_{\frac{3}{5}} = \frac{44}{125}$$

$$\text{II.} \quad \cos(\beta_{\frac{3}{5}} - \beta_{\frac{7}{25}}) = \cos\beta_{\frac{3}{5}} \,.\, \sin 2\beta_{\frac{3}{5}} + \sin\beta_{\frac{3}{5}} \,.\, \cos 2\beta_{\frac{3}{5}}$$
$$= \sin 3\beta_{\frac{3}{5}} = \frac{117}{125}$$

Da

$$\cos^2 3\beta_{\frac{3}{5}} + \sin^4 3\beta_{\frac{3}{5}} = \frac{44^2}{125^2} + \frac{117^2}{125^2} = 1$$

ist, so folgt daraus, dass $\beta_{\frac{3}{5}} - \beta_{\frac{7}{25}}$ ein Hypotenusenwinkel von $\underset{5^3}{\triangle}$ ist.

Da

$$\sin(\beta_{\frac{3}{5}} - \beta_{\frac{7}{25}}) = \frac{44}{125} = \sin\beta_{\frac{44}{125}}$$

ist, so ist

$$\text{a)} \quad \beta_{\frac{3}{5}} - \beta_{\frac{7}{25}} = \beta_{\frac{44}{125}}$$

Ist $\beta_{\frac{3}{5}} - \beta_{\frac{7}{25}}$ der eine Hypotenusenwinkel, so ist

$$\text{b)}\quad 90^0 - \beta\frac{3}{5} + \beta\frac{7}{25} = \gamma\frac{4}{5} + \beta\frac{7}{25}$$

der andere Hypotenusenwinkel von ${}^{117}\underset{125}{\triangle}{}^{44}$.

$$2)\quad \beta\frac{3}{5} - \beta\frac{336}{5^4} = \beta\frac{237}{3125}$$

Es ist

$$\text{III a.}\quad \sin 4\beta\frac{3}{5} = \frac{336}{625} = \sin\beta_5{}^4 = \cos\gamma_5{}^4$$

$$\text{IV a.}\quad -\cos 4\beta\frac{3}{5} = \frac{527}{625} = \sin\gamma_5{}^4 = \cos\beta_5{}^4$$

Mittels dieser Gleichungen erhält man aus den Formeln für $\sin\left(\beta\frac{3}{5} - \gamma_5{}^4\right)$ und $\cos\left(\beta\frac{3}{5} - \beta_5{}^4\right)$:

$$\text{III.}\quad \sin\left(\beta\frac{3}{5} - \beta_5{}^4\right) = -\sin\beta\frac{3}{5} \cdot \cos 4\beta\frac{3}{5} - \cos\beta\frac{3}{5} - \sin 4\beta\frac{3}{5}$$

$$= -\sin 5\beta\frac{3}{5} = \frac{237}{3125} = \sin\left(\gamma_5{}^4 - \gamma\frac{4}{5}\right)$$

$$\text{IV.}\quad \cos\left(\beta\frac{3}{5} - \beta_5{}^4\right) = -\cos\beta\frac{3}{5} \cdot \cos 4\beta\frac{3}{5} + \sin\beta\frac{3}{5} \cdot \sin 4\beta\frac{3}{5}$$

$$= -\cos 5\beta\frac{3}{5} = \frac{3116}{3125} = \cos\left(\gamma_5{}^4 - \gamma\frac{4}{5}\right)$$

Da $3125^2 = 237^2 + 3116^2$ ist, so ist

$$\sin\left(\beta\frac{3}{5} - \beta_5{}^4\right) = \sin\beta_5{}^4 - \sin\left(\gamma_5{}^4 - \gamma\frac{4}{5}\right)$$

und

$$\text{a)}\quad \beta\frac{3}{5} - \beta_5{}^4 = \beta_5{}^5 = \gamma_5{}^4 - \gamma\frac{4}{5}$$

der eine Hypothenusenwinkel, der andere ist

$$90^0 - \beta\frac{3}{5} + \beta_5{}^4 = \gamma\frac{4}{5} + \beta_5{}^4 \quad \text{oder}$$

$$\text{b)}\quad 90 - \gamma_5{}^4 + \gamma\frac{4}{5} = \beta_5{}^4 + \gamma\frac{4}{5} = \gamma_5{}^5$$

$$3)\quad \beta\frac{7}{27} - \beta\frac{44}{125} = -\beta\frac{237}{3125}$$

Mit Benutzung § 2. III a., IV a. und der Gleichungen

$$\sin 3\beta{}^{3}_{5} = \frac{117}{125} = \cos \beta{}^{44}_{125} \quad \text{und}$$

$$-\cos 3\beta{}^{3}_{5} = \frac{44}{k25} = \sin \beta{}^{44}_{125} \quad \text{ist}$$

V. $$\sin\left(\beta{}^{7}_{25} - \beta{}^{44}_{125}\right) = \cos 2\beta{}^{3}_{5} \,.\, \sin \beta{}^{3}_{5} + \sin 2\beta{}^{3}_{5} \,.\, \cos 3\beta{}^{3}_{5}$$

$$= \sin 5\beta{}^{3}_{5}$$

$$\cos\left(\beta{}^{7}_{25} - \beta{}^{44}_{125}\right) = \sin 2\beta{}^{3}_{5} \,.\, \sin 3\beta{}^{3}_{5} - \cos 2\beta{}^{3}_{5} \,.\, \cos 3\beta{}^{3}_{5}$$

$$= -\cos 5\beta{}^{3}_{5}$$

Aus den Gleichungen 2) III. folgt, dass $\beta{}^{44}_{125} - \beta{}^{7}_{25}$ ein Hypotenusenwinkel ist. Da 5β im dritten Quadranten liegt, so ist der Sinus negativ, also ist

$$-\sin\left(\beta{}^{7}_{25} - \beta\frac{44}{125}\right) = -\sin 5\beta{}^{3}_{5} + \sin\left(\beta{}^{44}_{125} - \beta{}^{7}_{25}\right) \quad \text{und}$$

$$\beta{}^{44}_{125} - \beta{}^{7}_{25} = \beta{}^{237}_{3125}$$

Der andere Hypotenusenwinkel ist dann:

$$90^{\circ} - \beta{}^{44}_{125} + \beta\frac{7}{25} = \gamma{}^{117}_{125} + \beta{}^{7}_{25} = \gamma{}^{3116}_{3125}$$

Auf ebendieselbe Weise lassen sich die Hypotenusenwinkel zum $\triangle$ durch Combination zweier Hypotenusenwinkel aus Dreiecken von derselben primzahligen Hypotenuse niederer Potenz finden.

Man erhält:

VII. 1. $$\gamma{}^{4}_{5} - \beta{}^{237}_{3125} = \gamma{}^{11753}_{15625}$$

$$\beta{}^{3}_{5} + \beta{}^{237}_{3125} = \beta{}^{10296}_{15625}$$

2. $$\gamma{}^{24}_{25} - \beta{}^{336}_{625} = \beta{}^{10296}_{15625}$$

$$\beta{}^{7}_{25} + \beta{}^{336}_{625} = \gamma{}^{11753}_{15625}$$

VII. 3. $\gamma\frac{117}{125} - \beta\frac{44}{125} = \gamma\frac{11753}{15625}$

$$\beta\frac{44}{126} + \beta\frac{44}{125} = \beta\frac{10296}{15625}$$

Heissen die Winkel β oder γ unter sich gleichnamige und β und γ mit einander ungleichnamige Hypotenusenwinkel, so lassen sich die Sätze, die sich aus den Gleichungen 1. 2. 3. (a, b) und aus VII. ergeben, folgendermassen ausdrücken:

A. Die Summe oder der Unterschied zweier gleichnamigen Hypotenusenwinkel von $\underset{a^n}{\triangle}$ und $\underset{a^{n_1}}{\triangle}$ ist ein Hypotenusenwinkel von $\underset{a^{n+n_1}}{\triangle}$.

B. Die Summe oder der Unterschied zweier ungleichnamigen Hypotenusenwinkel von je einem aus $\underset{a^n}{\triangle}$ und $\underset{a^{n_1}}{\triangle}$ ist ein Hypotenusenwinkel von $\underset{a^{n+n_1}}{\triangle}$.

C. Ist die Summe oder der Unterschied zweier gleichnamigen Hypotenusenwinkel von $\underset{a^n}{\triangle}$ und $\underset{a^{n_1}}{\triangle}$ ein Hypotenusenwinkel von $\underset{a^{n+n_1}}{\triangle}$, so ist der Unterschied oder die Summe zweier ungleichnamigen Hypotenusenwinkel von je einem aus denselben Dreiecken der andere Hypotenusenwinkel von $\underset{a^{n+n_1}}{\triangle}$ und umgekehrt.

D. Der doppelte β-Winkel im $\underset{a^n}{\triangle}$ ist ein Hypotenusenwinkel von $\underset{a^{2n}}{\triangle}$.

Hierbei ist vorausgesetzt worden, dass die Summe der Winkel $< 1R$ ist. Beträgt dieselbe mehr als $1R$, so ist der Supplementwinkel ein Hypotenusenwinkel.

Aus den Gleichungen I—IV. folgt der Satz:

E. Der Sinus und Cosinus eines $n$fachen Hypotenusenwinkels von $\underset{a}{\triangle}$ geben die Sinusse oder Cosinusse der Hypotenusenwinkel

§ 4.

Kehrt man in den Sinus- und Cosinusformeln § 3. (1—4) die Vorzeichen um, so erhält man die Hypotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken von niederer Potenz derselben primzahligen Hypotenuse. Nämlich:

$$\text{I.}\quad \sin\left(\beta\tfrac{3}{5}+\beta\tfrac{7}{5^2}\right)=\frac{100}{125}=\frac{4}{5}=\sin\gamma\tfrac{4}{5}=\cos\beta\tfrac{3}{5}$$

$$\cos\left(\beta\tfrac{3}{5}+\beta\tfrac{7}{5^2}\right)=\frac{75}{125}=\frac{3}{5}=\sin\beta\tfrac{3}{5}=\cos\gamma\tfrac{4}{5}$$

$$\sin\left(\beta\tfrac{3}{5}+\beta_5{}^4\right)=\frac{2925}{3125}=\frac{117}{125}=\sin\gamma_5{}^3=\cos\beta_5{}^3$$

$$\cos\left(\beta\tfrac{3}{5}+\beta_5{}^4\right)=\frac{1100}{3125}=\frac{44}{125}=\sin\beta_5{}^3=\cos\gamma_5{}^3$$

$$\sin(\beta_5{}^2+\beta_5{}^4)=\frac{1875}{3125}=\frac{3}{5}=\sin\beta\tfrac{3}{5}=\cos\gamma\tfrac{4}{5}$$

$$\cos(\beta_5{}^2+\beta_5{}^4)=\frac{2500}{3125}=\frac{4}{5}=\sin\gamma\tfrac{4}{5}=\cos\beta\tfrac{3}{5}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende Winkelgleichungen:

$$\text{II.}\quad \beta\tfrac{3}{5}+\beta_5{}^2=\gamma\tfrac{4}{5}$$

$$\beta\tfrac{3}{5}+\beta_5{}^4=\gamma_5{}^3$$

$$\beta_5{}^2+\beta_5{}^3=\beta\tfrac{3}{5}$$

Ebenso erhält man aus 1, 2, 3 b:

$$\text{III.}\quad \gamma\tfrac{4}{5}-\beta_5{}^2=\beta\tfrac{3}{5}$$

$$\gamma\tfrac{4}{5}-\beta_5{}^4=\beta_5{}^3$$

$$\gamma_5{}^3-\beta_5{}^2=\gamma\tfrac{4}{5}$$

und aus VII., 1, 2, 3:

$$\gamma\tfrac{4}{5}+\beta_5{}^5=\gamma_5{}^4$$

oder gleich $\pi-\gamma_5{}^4$, wenn $\gamma_5{}^4+\beta_5{}^5>1R$

$$\text{IV.}\quad \beta\tfrac{3}{5}-\beta_5{}^5=\beta_5{}^4$$

$$\gamma_5{}^2+\beta_5{}^4=\pi-\gamma_5{}^2$$

$$\beta_5{}^4-\beta_5{}^2=\beta_5{}^2$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit den Gleichungen aus § 3. die Sätze:

A. Ist die Summe zweier Hypotenusenwinkel von je einem aus $\triangle_{a^n}$ und $\triangle_{a^{n_1}}$ ein Hypotenusenwinkel von $\triangle_{a^{n+n_1}}$, so ist ihr Unterschied ein Hypotenusenwinkel von $\triangle_{a^{n-n_1}}$.

B. Ist der Unterschied zweier Hypotenusenwinkel von je einem aus $\triangle_{a^n}$ und $\triangle_{a^{n_1}}$ ein Hypotenusenwinkel von $\triangle_{n+n_1}$, so ist ihre Summe oder der Supplementwinkel zu derselben ein Hypotenusenwinkel von $\triangle_{a^{n-n_1}}$.

Aus den Gleichungen II., III., IV lassen sich der Reihe nach folgende Gleichungen ableiten:

$$\gamma\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{5}-\beta\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}=\beta_5{}^2,, \qquad \gamma\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{5}+\beta\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}=1R$$

$$\gamma_5{}^3-\beta_5{}^1=\beta_5{}^4, \qquad \gamma_5{}^3+\beta_5{}^1=\pi-\gamma_2$$

$$\beta\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}-\beta_5{}^2=\beta_5{}^3, \qquad \beta\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}+\beta_5{}^2=\gamma\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{5}$$

$$\gamma\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{5}-\beta\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}=\beta_5{}^2, \qquad \gamma\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{5}+\beta\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}=1B$$

$$\gamma_5{}^4-\beta_5{}^3=\beta\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}, \qquad \gamma_5{}^4+\beta_5{}^3=\gamma_5{}^7$$

$$\gamma_5{}^3-\gamma_5{}^1=\beta_5{}^2, \qquad \gamma_5{}^3+\gamma_5{}^1=\pi-\gamma_5{}^4$$

$$\gamma_5{}^4-\beta_5{}^5=\gamma_5{}^1, \qquad \gamma_5{}^4+\beta_5{}^5=\gamma_5{}^4$$

$$\beta_5{}^4+\beta_5{}^5=\beta_5{}^1, \qquad \beta_5{}^4-\beta_5{}^5=\beta_5{}^9$$

$$\pi-\gamma_5{}^2-\beta_5{}^4=\gamma_5{}^2, \qquad \pi-\gamma_5{}^2+\beta_5{}^4=\pi-\beta_5{}^6$$

$$\beta_5{}^2+\beta_5{}^2=\beta_5{}^4\ {}^{*)}.$$

Ein Vergleich mit den in nachstehender Tabelle berechneten Winkeln wird diese Gleichungen bestätigen.

---

*) Zur Abkürzung ist statt der pythagoreischen Zahlen nur die Potenzhypotenuse gesetzt.

$\beta\frac{3}{5} = 36^0\ 52'\ 11\frac{9''}{14}$ | $\gamma\frac{4}{5} = 53^0\ 7'\ 48\frac{5''}{14}$

$\beta_5^2 = 16^0\ 15'\ 36\frac{9''}{14}$ | $\gamma_5^2 = 73^0\ 44'\ 23\frac{5''}{14}$

$\beta_5^3 = 20^0\ 36'\ 34\frac{64}{79}''$ | $\gamma_5^3 = 69^0\ 23'\ 25\frac{15}{79}''$

$\beta_5^4 = 32^0\ 31'\ 13\frac{6''}{14}$ | $\gamma_5^4 = 57^0\ 28'\ 46\frac{8''}{14}$

$\beta_5^5 = 4''\ 20'\ 58\frac{1''}{8}$ | $\gamma_5^5 = 85''\ 39'\ 1\frac{7''}{8}$

$\beta_5^6 = 41^0\ 13'\ 9\frac{147''}{192}$ | $\gamma_5^6 = 48^0\ 46'\ 50\frac{45''}{142}$

$\beta_5^7 = 11^9\ 54'\ 38\frac{2''}{3}$ | $\gamma_5^7 = 78^0\ 5'\ 21\frac{1''}{3}$

$\beta_5^8 = 24^0\ 57'\ 33\frac{2''}{14}$ | $\gamma_2^8 = 65^0\ 2'\ 26\frac{12''}{14}$

$\beta_5^9 = 28^0\ 10'\ 15\frac{1''}{3}$ | $\gamma_{55} = 61^0\ 49'\ 44\frac{2''}{3}$

$\beta_5^{10} = 8^0\ 41'\ 56\frac{1''}{3}$ | $\gamma_5^{10} = 81^0\ 18'\ 3\frac{2''}{3}$

$\beta_5^{11} = 44^0\ 25'\ 52''$ | $\gamma^{011} = 45^0\ 34'\ 8''$

Die Sätze A. und B. gelten auch bei Zusammenstellung voı zwei Winkeln. Folgende Gleichungen, die unmittelbar aus der Tabelle sich ergeben, mögen als Beweis dienen.

$\beta_5^1 + \beta_5^2 + \beta_5^3 = \gamma_5^0$ | $\beta_5^1 - \beta_5^2 + \beta_5^3 = \beta_5^6$
$\beta_5^2 + \beta_5^3 + \beta_5^4 = \gamma_5^3$ | $\beta_5^2 - \beta_5^3 + \beta_5^4 = \beta_5^9$
$\beta_5^3 + \beta_5^4 + \beta_5^5 = \gamma_5^4$ | $-\beta_5^3 + \beta_5^4 - \beta_5^5 = \beta_5^{12}$
$\beta_5^4 + \beta_5^5 + \beta_5^6 = \beta_5^7$ | $-\beta_5^4 + \beta_5^5 + \beta_5^6 = \beta_5^{15}$
$\beta_5^5 + \beta_5^6 + \beta_5^7 = \gamma_5^4$ | $\beta_5^5 + \beta_5^6 - \beta_5^7 = \beta_5^{18}$
$\beta_5^6 + \beta_5^7 + \beta_5^8 = \gamma_5^7$ | $\beta_5^6 - \beta_5^7 + \beta_5^8 = \gamma_5^{21}$
$\beta_5^7 + \beta_5^8 + \beta_5^9 = \gamma_5^8$ | $\beta_5^7 - \beta_5^8 + \beta_5^9 = \beta_5^{24}$
$\beta_5^8 + \beta_5^9 + \beta_5^{10} = \gamma_5^9$ | $\beta_5^8 - \beta_5^9 + \beta_5^{10} = \beta_5^{27}$
$\beta_5^9 + \beta_5^{10} + \beta_5^{11} = \gamma_5^{10}$ | $\beta_5^9 - \beta_5^{10} + \beta_5^{11} = \beta_5^{30}$

Ferner ist:

$$\beta_5{}^1 + \beta_5{}^3 + \beta_5{}^4 = 90^0 = \beta_5{}^0$$
$$\beta_5{}^1 + \beta_5{}^{10} + \beta_5{}^{11} = 90^0 = \beta_5{}^0$$
$$\beta_5{}^3 + \beta_5{}^8 + \beta_5{}^{11} = 90^0 = \beta_5{}^0$$

Aus diesen Gleichungen kann man den Satz aufstellen.

C. Alle möglichen Zusammenstellungen von Hypotenusenwinkeln, die zu derselben primzahligen Hypotenuse von verschiedener Potenz gehören, geben Hypotenusenwinkel von derselben primzahligen Hypotenuse zu einer Potenz, deren Exponent entweder die Summe aller Exponenten oder die Differenz aus einem Exponenten oder der Summe mehrerer Exponenten und der Summe der andern ist. Hiervon sind ausgenommen diejenigen Zusammenstellungen, die einen oder mehrere rechte Winkel oder 0^0 ergeben.

§ 5.

Nach § 2. B. ist:

$$2(\gamma - \beta) = \delta_4$$

wo δ_4 ein Hypotenusenwinkel eines einfach abgeleiteten Dreiecks von einer Hypotenuse zur vierten Potenz und γ und β die Hypotenusenwinkel des ursprünglichen Dreiecks bezeichnen.

Subtrahirt man auf beiden Seiten γ, so ist

$$\gamma - 2\beta = \delta_4 - \gamma$$

Nach § 4. A. und B. ist $\gamma - 2\beta$ entweder ein Hypotenusenwinkel von $\underset{a^3}{\triangle}$ oder von $\underset{a^4}{\triangle}$, also $\delta_4 - \gamma$ muss ein Winkel von $\underset{a^3}{\triangle}$ und $\delta_4 + \gamma$ ein Winkel von $\underset{a^5}{\triangle}$ sein.

Es ist also

$$\delta_4 + \gamma = \delta_5$$

oder für δ_4 den Wert eingesetzt:

$$2(\gamma - \beta) + \gamma = \delta_5 \quad \text{oder}$$

I. $$\delta_5 = 3\gamma - 2\beta$$

Ebenso ergiebt sich aus

$$2\gamma - \beta = \delta_4 + \beta$$

II. $$\delta_5{}' = 2\gamma - 3\beta = 2(\gamma - \beta) - \beta$$

Da δ_5 und $\delta_5{}'$ nicht gleich sein können, so muss, wenn sie ein Hypotenusenwinkelpaar bilden sollen,

$$\delta_5 + \delta_5' = 0$$

sein. Hieraus folgt, wenn $3\gamma - 2\beta < 1R$ ist:

$$\delta_5' = -[2(\gamma - \beta) - \beta]$$

Ist $3\gamma - 2\beta > 1R$ und $2\gamma - 3\beta < 1R$, so ist

$$\delta_5 = \pi - [2(\gamma - \beta) + \gamma] \quad \text{und}$$
$$\delta'_5 = 2(\gamma - \beta) - \beta$$

Aus I. folgt dann weiter:

$$\delta^5 + \beta = 3\gamma - \beta \quad \text{also}$$

$$\delta_6 = \delta_5 - \beta \quad \text{oder}$$

III. $$\delta_6 = 3(\gamma - \beta)$$

Denselben Wert erhält man auch für δ'_6. Da δ_6 und δ'_6 nicht einander gleich sein können, so ist, wenn

IV. $3(\gamma - \beta) < 1R$ ist, $\delta'_6 = 1R - 3(\gamma - \beta)$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich:

$$\delta_7 = 4\gamma - 3\beta \quad \text{oder gleich} \quad \pi - [3(\gamma - \beta) + \gamma]$$
$$\delta_7' = -(3\gamma - 4\beta) \quad \text{oder gleich} \quad 3\gamma - 4\beta$$

Ist $3\gamma - 4\beta > 1R$ aber $< 2R$, so muss $3(\gamma - \beta) + \gamma > 2R$ sein.

Es ist dann

V. $$\delta_7 = 3(\gamma - \beta) + \gamma - 2\pi$$

VI. $$\delta_7' = 2\pi - [3(\gamma - \beta) - \beta]$$

Berechnet man δ_7 und δ_7' nach Tabelle in § 4., so ist

$$\delta_7 = \gamma_5{}^7 = 78^0\ 5'\ 21\tfrac{1}{3}''.$$
$$\delta'_7 = \beta_5{}^7 = 11^0\ 54'\ 38\tfrac{2}{3}''$$

Folgende allgemeine Formeln ergeben sich aus III. und IV.

VII.
$$\delta_{2n} = \frac{n'+1}{2}\pi - n(\gamma - \beta)$$
$$\delta'_{2n} = \frac{\pi}{2} - \left[(n'+1)\frac{\pi}{2} - n(\gamma - \beta)\right] = n(\gamma - \beta) - \frac{n'}{2}\pi$$

und aus V. und VI.:

VII.

$$\delta_{2n+1} = n(\gamma - \beta) + \gamma - \frac{n'+1}{2}\pi$$

$$\delta'_{2n+1} = \frac{n'+1}{2}\pi - [n(\gamma - \beta) - \beta]$$

wo n und n' ganze Zahlen bedeuten und n' so gross gewählt werden muss, dass δ_{2n}, δ'_{2n}, δ_{2n+1}, $\delta'_{2n+1} < 1R$ ist.

Für die trigonometrische Berechnung der Winkel erhält man aus den Gleichungen III. bis VI. die Formeln:

$$\sin\delta_{2n} = \sin n(\gamma - \beta) \qquad \cos\delta_{2n} = \cos n(\gamma - \beta) = \sin\delta'_{2n}$$

$$\sin\delta_{2n+1} = \sin[(n+1)\beta - n\beta] \qquad \sin\delta'_{n+1} = [(n+1)\beta - n\gamma]$$
$$= \cos[(n+1)\beta] - n\gamma] \qquad = \cos[(n+1)\gamma - n\beta]$$

§ 6.

Bezeichnet man den Winkel, welchen die in Figur 1. nach dem Teilpunkt des einen Schenkels gezogene Transversale mit dem andern Schenkel bildet mit η_b, so erhält man das Kathetenpaar nach § 1. aus den Gleichungen:

$$\sin 2\eta_b = 2\sin\eta_b \,.\, \cos\eta_b$$
$$\cos 2\eta_b = 2\cos^2\eta_b - 1$$

Ist z. B. die Hypotenuse $17 = 4^2 + 1$, so ist

$$\sin\eta_b = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos\eta_b = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

und

$$\sin 2\eta_b = \frac{8}{17} = \sin\beta \; \frac{8}{17}$$

$$\cos 2\eta_b = \frac{15}{17} = \sin\gamma \; \frac{15}{17}$$

Die pythagoreischen Zahlen heissen:

17 8 15

Stellt $a = m^2 + n^2$, wo $m > n$ ist, eine Hypotenuse dar, so werden, wie man auch die Grundzahlen m und n wählen mag, ob grade oder ungrade, $\sin 2\eta_b$ und $\cos 2\eta_b$ ein Kathetenpaar, das aus relativen Primzahlen zusammengesetzt ist, geben.

Angenommen, m und n sind grade Zahlen, also

$$m = 2m' \quad \text{und} \quad n = 2n'$$

dann ist:

I.
$$\sin \eta_b = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$
$$\cos \eta_b = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

II.
$$\sin 2\eta_b = \frac{2 \,.\, m \,.\, n}{m^2 + n^2} = \frac{2m' \,.\, n'}{m'^2 + n'^2}$$
$$\cos 2\eta_b = \frac{2m^2}{m^2 + n^2} - 1 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = \frac{m'^2 - n'^2}{m'^2 + n'^2}$$

Nun kann der Fall eintreten, dass m' und n' noch grade sind, dann wird man die Brüche wieder mit 4 kürzen können, bis schliesslich m' und n' beide ungrade Zahlen sind oder nur eine eine grade Zahl ist. Sind m' und n' verwandte Zahlen, also

$$m' = m''p \quad \text{und} \quad n' = n''p$$

so ist

$$\sin 2\eta_b = \frac{2m''p \,.\, n''p}{m''^2 p^2 + n''^2 p^2}$$
$$\cos 2\eta_b = \frac{m''^2 p^2 - n''^2 p^2}{m''^2 p^2 + n''^2 p^2} = \frac{m''^2 - n''^2}{m''^2 + n''^2}$$

wo nunmehr m'' und n'' relative Primzahlen sind.

Sind m'' und n'' beide ungrade, so geben $2m'' \,.\, n''$, $m''^2 - n''^2$, $m''^2 + n''^2$ drei gerade Zahlen, da sowol die Differenz, also auch die Summe der Quadrate zweier ungeraden Zahlen grade Zahlen geben. Kürzt man die Brüche mit 2 und setzt

III.
$$\sin 2\eta_b = \frac{r}{t}$$
$$\cos 2\eta_b = \frac{s}{t}$$

dann ist $m'' \,.\, n'' = r$ eine ungerade Zahl und

$$\frac{m''^2 - n''^2}{2} = s = \frac{(m'' + n'')(m'' - n'')}{2}$$

eine gerade Zahl, da sowol die Summe als auch die Differenz zweier ungerader Zahlen gerade Zahlen geben und sowol

$$\frac{m''+n''}{2}(m''-n'') \text{ als auch } (m''+n'')\frac{m''-n''}{2}$$

gerade Zahlen sind.

Ist von den beiden relativen Primzahlen m'' und n'' nur n'' ungerade, dann ist

$$(m''^2-n''^2) = (m''+n'')(m''-n'')$$

ungerade, da sowol die Summe als auch die Differenz zweier Zahlen, von denen die eine ungerade ist, stets eine ungerade Zahl giebt.

Man erhält hieraus den Satz:

A. In welchem Verhältniss man auch immer den einen Schenkel im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck teilen mag, stets ist das Kathetenpaar aus zwei relativen Primzahlen zusammengesetzt, von denen eine ungerade ist.

Aus III. ergiebt sich die Gleichung:

$$\sin^2\eta_b+\cos^2\eta_b = \frac{r^2}{t^2}+\frac{s^2}{t^2} = 1$$

oder

$$t^2 = r^2+s^2$$

Nach Satz A. sind r und s als relative Primzahlen zu betrachten, von denen eine ungerade ist. Es ist mithin auch t^2 eine ungerade Zahl, da die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen eine ungerade ist, stets ungerade ist. Also hat man den Satz:

B. Die Hypotenuse ist stets eine ungerade Zahl.

§ 7.

1. Sind in den Gleichungen § 6. I. m und n relative Primzahlen, von denen nur eine gerade ist, so ist

$$t = m^2+n^2$$

eine Hypotenuse.

Die Gleichungen II. § 6. geben:

$$\sin^2\eta_b+\cos^2\eta_b = \frac{(2\,.\,m\,.\,n)^2}{(m^2+n^2)^2}+\frac{(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2} = 1$$

Da m und n relative Primzahlen sind, von denen eine gerade ist, so müssen auch $(2m\,n)$ und (m^2-n^2) relative Primzahlen sein;

denn wären sie dies nicht, so müssten sie einen gemeinsamen Factor haben; also müssten dann auch m und n verwandte Zahlen sein; dies aber widerspricht der Voraussetzung. Nun ist $2m \cdot n$ eine gerade und $m^2 - n^2$ eine ungerade Zahl, also bilden beide das Kathetenpaar zu der Hypotenuse

$$t = m^2 + n^2$$

2. Sind m und n gerade Zahlen, also

$$m = 2m' \quad \text{und} \quad n = 2n'$$

so ist

$$\sin \eta_b = \frac{2n'}{2\sqrt{m'^2 + n'^2}} = \frac{n'}{\sqrt{m'^2 + n'^2}}$$

$$\cos \eta_b = \frac{2m'}{2\sqrt{m'^2 + n'^2}} = \frac{m'}{\sqrt{m'^2 + n'^2}}$$

Erfüllen m' und n' die Fall 1) gestellte Bedingung, so ist

$$t = m'^2 + n'^2$$

eine Hypotenuse.

3. Sind m' und n' verwandte Zahlen, ist also

$$m' = pm'' \quad \text{und} \quad n' = p \cdot n''$$

wo m'' und n'' relative Primzahlen sind, von denen eine gerade ist, dann ist

$$t = m''^2 + n''^2$$

4. Sind m' und n' ungerade Zahlen, also

$$m' = 2m'' + 1 \quad \text{und} \quad n' = 2n'' + 1$$

dann ist, wenn $m' > n'$ ist,

$$\sin \eta_b = \frac{2n''+1}{\sqrt{(2m''+1)^2+(2n''+1)^2}} = \frac{2n''+1}{\sqrt{4m''^2+4m''+4n''^2+4n''+2}}$$

$$= \frac{2n''+1}{N\sqrt{2}}, \quad \text{wo } N = \sqrt{2m''^2+2m'+2n''^2+2n''+1}$$

ist und

$$\cos \eta_b = \frac{2m''+1}{N\sqrt{2}}$$

Ferner ist, wenn in Figur 1

$$AC = 2m'' + 1, \quad CD = 2n'' + 1 \quad \text{ist:}$$

$$AD = \sqrt{(2m'' + 1)^2 + (2n'' + 1)^2} = N\sqrt{2}$$

und

$$BD = 2(m'' - n'')$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Transversale mit der Hypotenuse bildet, mit η_b, so ist nach dem Sinussatze, wenn

$$\sin ABC = \sin 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{2} \,.\, N : 2(m'' - n'') = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sin \eta_a \quad \text{oder}$$

I. $$\sin \eta_a = \frac{m'' - n''}{N}$$

Nun ist $\eta_a + \eta_b = 45^0$. also ist

$$\sin(\eta_a + \eta_b) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sin \eta_a \,.\, \cos \eta_b + \cos \eta_a \,.\, \sin \eta_b$$

Werden die Werte für $\sin \eta_b$, $\cos \eta_b$ und $\sin \eta_b$ eingesetzt und wird die Gleichung in Bezug auf $\cos \eta_b$ aufgelöst, so erhält man:

$$\cos \eta_a = \frac{N^2 - (m'' - n'')(2m'' + 1)}{N(2n'' + 1)}$$

Nun ist

$$[N^2 - (m'' - n'')(2m'' + 1)] = (m'' + n'' + 1)(2n'' + 1)$$

folglich ist

II. $$\cos \eta_a = \frac{m'' + n'' + 1}{N}$$

Da $2m''$ und $2n''$ gerade Zahlen sind, so können m'' und n'' gerade oder ungerade Zahlen sein. Nimmt man an, dass beide gleichzeitig gerade oder ungerade sind, dann ist immer $(m'' - n'')$ gerade und $(m'' + n'' + 1)$ ungerade. Ist m'' gerade und n'' ungerade oder umgekehrt m'' ungerade und n'' gerade, so ist $(m'' - n'')$ stets ungerade $(m'' + n'' + 1)$ gerade. Von den beiden Zahlen $(m'' - n'')$ und $(m'' + n'' + 1)$ ist in jedem Falle die eine ungerade und die andere gerade.

Aus den Gleichungen I. und II. folgt

$$\sin^2 \eta_a + \cos^2 \eta_a = \frac{(m'' - n'')^2}{N^2} + \frac{(m'' + n'' + 1)^2}{N^2} = 1$$

oder

$$N^2 = (m'' - n'')^2 + (m'' + n'' + 1)^2$$

Nun könnte noch der Fall eintreten, dass beide Zahlen $(m'' - n'')$ und $(m'' + n'' + 1)$ verwandte Zahlen sind, dann muss auch N denselben Factor mit ihnen gemein haben. Da dieser in N^2 eine Quadratzahl sein muss, so wird stets, wenn man die Gleichung III. durch diese teilt und

$$\frac{N^2}{d^2} = N'^2, \quad \frac{(m'' - n'')^2}{d^2} = m'''^2, \quad \frac{(m'' + n'' + 1)^2}{d^2} = n'''^2$$

setzt, wo d^2 den gemeinsamen Factor bedeutet,

$$N_{\prime}^2 = m'''^2 + n'''^2$$

sein. Da nun m''' und n''' relative Zahlen sind, von denen eine ungerade ist, so ist

$$N'^2 = m'''^2 + n'''^2 = t$$

eine Hypotenuse.

Aus den vier Fällen ergiebt sich der Satz:

Jede Hypotenuse lässt sich in die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen, von denen eine ungerade ist, zerlegen.

§ 8.

Da jede ungerade Zahl von 1er Form $4p \pm 1$ ist, so kann man

$$m = 4p \pm 1 \quad \text{und} \quad n = 2l$$

setzen. Alsdann ist:

$$t = m^2 + n^2 = 4(4p^2 \pm 2p + l^2) + 1$$

Nun ist

$$4p^2 \pm 2p = 2p(2p \pm 1)$$

gleich oder grösser als null, also muss $(4p^2 \pm 2p + l^2)$ positiv sein.

Folglich ist für

$$4p^2 \pm 2p + l^2 = k$$

$$t = 4k + 1$$

Also hat man den Satz:

A. Jede Hypotenuse ist von der Form $4k+1$.

Nun lassen sich, wie in der Zahlentheorie gezeigt wird, nur Primzahlen von der Form $4k+1$ oder ihre Producte in der Form der Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen, von denen die eine gerade, die andere ungerade ist, darstellen. Also gilt der Satz:

B. Alle Hypotenusen sind Primzahlen von der Form $4k+1$ oder Producte aus Primzahlen von der Form $4k+1$.

§ 9.

Da nach dem Fermat'schen Satze eine Primzahl von der Form $4k+1$ nur eine Zerlegung in die Summe zweier Quadrate zulässt,

so giebt es auch nur ein Teilverhältniss, nach welchem man den Schenkel CB teilen muss, um das Kathetenpaar zu erhalten. Man erhält somit nur ein Hypotenusenwinkelpaar β und γ, und da $\sin\beta$ und $\cos\beta$ eindeutig bestimmt sind, so giebt es auch nur ein Kathetenpaar.

Für eine Hypotenuse, die eine Potenz einer primzahligen Hypotenuse ist, geben die Gleichungen § 5. IX. ebenfalls nur ein Kathetenpaar.

Aus den Gleichungen § 4. I. geht hervor, dass zu einer Potenzhypotenuse noch andere Kathetenpaare gehören. Für die Hypotenuse 5^5 heissen diese zum Beispiel, wie sich aus § 3. (3 a, b) und § 4., 1. ergiebt:

1) 5^5 237 3116

2) 5^5 1100 2925 oder $5^2 . 5^3$ $5^2 . 44$ $5^2 . 117$

3) 5^5 1875 2500 oder $5^4 . 5^1$ $5^4 . 3$ $5^4 . 4$

Hierzu kommen noch zwei Kathetenpaare, die durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\sin\left(\beta\frac{336}{5^4} + 90'\right) = \cos\beta\frac{336}{5^4} = \frac{527}{5^4} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2635}{5^5}$$

$$\cos\left(\beta\frac{336}{5^4} + 90'\right) = -\sin\beta\frac{336}{5^4} = -\frac{336}{5^4} \cdot \frac{5}{5} = -\frac{1680}{5^5}$$

und

$$\sin\left(\beta\frac{7}{25} + 90\right) = \cos\beta\frac{7}{25} = \frac{24}{25} \cdot \frac{5^3}{5^3} = \frac{3000}{5^5}$$

$$\cos\left(\beta\frac{7}{25} + 90\right) = -\sin\beta\frac{7}{25} = -\frac{7}{25} \cdot \frac{5^3}{5^3} = -\frac{875}{5^5}$$

also:

4) 5^5 1680 2635 oder $5^4 . 5^1$ $336 . 5^6$ $527 . 5^1$

5) 5^5 875 3000 oder $5^2 . 5^3$ $7 . 5^3$ $24 . 5^3$

Die Hypotenuse lässt somit 5 Kathetenpaare zu, von denen nur 1) aus relativen Primzahlen zusammengesetzt ist. Alle anderen Kathetenpaare bestehen aus verwandten Zahlen, von denen jede sich zu 5^5 verhält wie beziehungsweise jede Kathete zu der Hypotenuse in $\underset{5}{\triangle}$, $\underset{5^2}{\triangle}$, $\underset{5^3}{\triangle}$, $\underset{5^4}{\triangle}$. Um zu beweisen, dass zu einer Hypotenuse a^n n Kathetenpaare gehören, geht man aus von dem Satze E § 3. Nach diesem geben die Formeln:

$$\text{I.}\quad \sin n\beta = \sin\beta\left[(2\cos\beta)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2\cos\beta)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}(2\cos\beta)^{n-5} - + \ldots\right]$$

$$\cos n\beta = \tfrac{1}{2}\left[(2\cos\beta)^{n} - \frac{n}{1}(2\cos\beta)^{n-2} + \frac{n\,.\,(n-3)}{1\,.\,2}(2\cos\beta)^{n-4} - + \ldots\right]$$

das Kathetenpaar zu $\underset{a^n}{\triangle}$, das aus relativen Primzahlen zusamme gesetzt ist. Um die andern $(n-1)$ Kathetenpaare zu finden, se man in I. für $p\beta = \pm\, 90^0$, dann ist

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} &\sin[(n-p)\beta \pm 90^0] - \sin(n-p)\beta \\ &\cos[(n-p\beta \pm 90^0] = \cos(n-p)\beta \end{aligned}$$

Die Formeln für $\sin(n-p)\beta\,.\,\frac{n^p}{a^d}$ und $\cos(n-p)\beta\,.\,\frac{a^p}{a^p}$ bestimme dann für $p = 0$ bis $p = n-1$ n verschiedene Kathetenpaare.

Setzt man in I. $p\beta = p\gamma$, so ist

$$\sin[(n-p)\beta + p\gamma] = \sin[(n-2p)\beta + p\beta + p\gamma]$$

und da $p\beta + p\gamma = p\,90^0$ ist

$$\sin[(u-p)\beta + p\gamma] = \sin(n-2p)\beta\cos(p\,90^0) + \cos(n-2p)\beta\sin p\,90^0$$

Ebenso ist:

$$\cos[(n-p)\beta + p\gamma] = \cos(n-2p)\beta\cos(p\,90^0) - \sin(n-2p)\beta\sin(p\,9$$

Ist p ungerade, so ist $\cos(p\,90^0) = 0$ und $\sin(p\,90^0) = \pm 1$ un man erhält:

$$\text{III.}\quad \begin{aligned} &\sin[(n-p)\beta + p\gamma] = \pm\cos(n-2p)\beta \\ &\cos[(n-p)\beta + p\gamma] = \mp\sin(n-2p)\beta \end{aligned}$$

Ist p eine gerade Zahl, so ist, da $\cos(p\,90^0) = \mp 1$ und $\sin(p\,.\,90^0) = 0$ ist,

$$\text{III a.}\quad \begin{aligned} &\sin[(n-p)\beta + p\gamma] = \mp\sin(n-2p)\beta \\ &\cos[(n-p)\beta + p\gamma] = \mp\cos(n-2p)\beta \end{aligned}$$

Diese Gleichungen II. und III a. geben dieselben Kathenpaare wie II, wenn in II für p alle geraden Zahlen von 2 bis n gesetzt werden.

Ferner ist, wenn $p\beta = -p\gamma$ ist,

$$\sin[(n-p)\beta - p\gamma] = \sin(n-p)\beta\cos p\gamma - \cos(n-p)\beta\sin p\gamma$$
$$\cos[(n-p)\beta - p\gamma] = \cos(n-p)\beta\cos p\gamma + \sin(n-p)\beta\sin p\gamma$$

Ist p eine gerade Zahl, so ist:

$$\cos p\gamma = \cos p(90^0 - \beta) = \mp \cos p\beta$$
$$\sin p\gamma = \sin p(90^0 - \beta) = \pm \sin p\beta$$

Also ist:

IV.

$$\sin[(n-p)\beta - p\gamma] = \mp \sin(n-p)\beta\cos p\beta \mp \cos(n-p)\beta \,.\, \sin p\beta = \mp \sin n\beta$$

$$\cos[(n-p)\beta - p\gamma] = \mp \cos(n-p)\beta \,.\, \cos p\beta \pm \sin(n-p)\beta\sin p\beta = \mp \cos n\beta$$

Ist p eine ungerade Zahl, so ist, da $\cos p\gamma = \pm \sin p\beta$ und $\sin p\gamma = \pm \cos p\beta$ ist,

IV a.

$$\sin[(n-p)\beta - p\gamma] = \pm \sin(n-p)\beta \,.\, \sin p\beta \mp \cos(n-p)\beta \,.\, \cos p\beta = \mp \cos n\beta$$

$$\cos[(n-p)\beta - p\gamma] = \pm \cos(n-p)\beta \,.\, \sin p\beta \pm \sin(n-p)\beta \,.\, \cos p\beta = \pm \sin n\beta$$

Die Gleichungen III. und IV. geben den allgemeinen Beweis für die Sätze A und B in § 4.

Somit sind alle möglichen Zusammenstellungen von Winkeln, die zu Hypotenusen niederer Potenz gehören, erschöpft, und der Beweis erbracht, dass zu einer Hypotenuse a^n n verschiedene Kathetenpaare gehören, von denen nur das eine, das aus den Gleichungen I. sich ergiebt, aus relativen Primzahlen zusammengesetzt ist.

§ 10.

Sind für eine primzahlige Hypotenuse die Werte von $\sin \eta_b$ und $\cos \eta_b$ bekannt, so lassen sich aus den Formeln für $\sin n\eta_b$ und $\cos n\eta_b$ die Grundzahlen bestimmen, deren Quadratzahlen als Summe gesetzt die Hypotenuse a^n geben.

Ist z. B. die Hypotenuse 5^5 in die Summe zweier Quadrat-

zahlen zu zerlegen, so erhält man aus den Gleichungen § 9. I. für $\sin\eta_b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\cos\eta_b = \frac{2}{\sqrt{5}}$:

$$\text{I.} \quad \sin 5\eta_b = \frac{41}{\sqrt{3125}} \quad \text{und} \quad \cos\eta_b = -\frac{38}{\sqrt{3125}}$$

Hieraus folgt:

$$\sin^2 5\eta_b + \cos^2 5\eta_b = \frac{41^2}{3125} + \frac{38^2}{3125} = 1 \quad \text{oder}$$

$$1) \quad 5^5 = 41^2 + 38^2$$

Die Formeln für $\sin n\eta_b$ und $\cos n\varphi_a$ geben nur eine Zerlegung der Hypotenuse a^n in die Summe zweier Quadratzahlen, deren Grundzahlen relative Primzahlen sind. Ausser dieser Zerlegung giebt es bei einer Potenzhypotenuse noch andere, bei welchen die Grundzahlen verwandte Zahlen sind. Diese lassen sich bestimmen aus den Formeln III. § 9., wenn man $\beta = \eta_b$ setzt. Es ist:

$$\sin(n-2p)\eta_b = \sin[(n-p)\eta_b - p\eta_b]$$
$$= \sin(n-p)\eta_b \cos p\eta_b - \cos(n-p)\eta_b \sin p\eta_b$$

$$\text{II.} \quad \cos(n-2p)\eta_b = \cos[(n-p)\eta_b - p\eta_b]$$
$$= \cos(n-p)\eta_b \cos p\eta_b + \sin(n-p)\eta_b \,.\, \sin p\eta_b$$

Für die Hypotenuse 5^5 ist $n = 5$, für $p = 0$ erhält man die Gleichungen I., für $p = 1$ ist:

$$\sin 3\eta_b = \sin 4\eta_b \,.\, \cos\eta_b - \cos 4\eta_b \,.\, \sin\eta_b$$
$$\cos 3\eta_b = \cos 4\eta_b \,.\, \cos\eta_b + \sin 4\eta_b \,.\, \sin\eta_b$$

Nun ist:

$$\sin\eta_b = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\eta_b = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 4\eta_b = \frac{24}{\sqrt{625}}, \quad \cos 4\eta_b = -\frac{7}{\sqrt{625}}$$

folglich

$$\sin 3\eta_b = \frac{55}{\sqrt{3125}}, \quad \cos 3\eta_b = \frac{10}{\sqrt{3125}}$$

Es ergiebt sich

$$2) \quad 5^5 = 55^2 + 10^2$$

Für $p = 2$ ist:

$$\sin\eta_b = \sin 3\eta_b \,.\, \cos 2\eta_b - \cos 3\eta_b \,.\, \sin 2\eta_b$$
$$\cos\eta_b = \cos 3\eta_b \,.\, \cos 2\pi_b + \sin 3\eta_b \,.\, \sin 2\eta_b$$

Nun ist aus III.:

$$\sin 3\eta_b = \frac{11}{\sqrt{125}},\quad \cos 3\eta_b = \frac{2}{\sqrt{125}}$$

ferner ist:

$$\sin 2\eta_b = \frac{4}{\sqrt{25}},\quad \cos 2\eta_b = \frac{3}{\sqrt{25}}$$

also ist:

$$\sin \eta_b = \frac{25}{\sqrt{3125}},\quad \cos \eta_b = \frac{50}{\sqrt{3125}} \quad \text{und}$$

$$3)\quad 5^5 = 25^2 + 50^2$$

Für $p = 3, 4, 5$ ergeben sich dieselben Zerlegungen wie 3), 2), 1)

Um zu beweisen, dass es für eine gerade Zahl x $p = \frac{n}{2}$ und für eine ungerade Zahl n $p = \frac{n+1}{2}$ Zerlegungen giebt, setzt man in den **Formeln** II. § 9. $\beta = \eta_b$ und $a = \sqrt{a}$. Es sei

$$\sin(n-p)\eta_b \frac{\sqrt{a^p}}{\sqrt{l_{n-p}}} = \frac{l_{n=p}}{\sqrt{a_{n-p}}} \cdot \frac{\sqrt{a^p}}{\sqrt{a^p}}$$

$$\cos(n-p)\eta_b \cdot \frac{\sqrt{a_p}}{\sqrt{a_p}} = \frac{h_{n-p}}{\sqrt{a^{n-p}}} \cdot \frac{\sqrt{a^p}}{\sqrt{a^p}}$$

dann ist:

$$\sin^2(n-p)\eta_b \cdot \frac{a^p}{a^p} + \cos^2(n-p)\eta_b \frac{a^p}{a^p} = \frac{l^2_{n-p} \cdot a_p + h^2_{n-p} \cdot a^p}{a^{n-p} \cdot a^p} = 1$$

oder

$$\text{III.}\quad a^{n-p} \cdot a^p = a^n = l^2_{u+p} \cdot a^p + h^2_{n-p} \cdot a^p$$

Sollen nun die Glieder rechts in III. Quadratzahlen sein, so muss a^p, da die Factoren Qaadratzahlen sind, eine Quadratzahl sein; dies ist nur möglich, wenn p eine gerade Zahl ist. Hieraus folgt, dass die Gleichungen II. alle Zerlegungen darstellen. Ist nun n eine gerade Zahl, so geben die Gleichungen II. für $p = 0, 1, 2, 3, \ldots \frac{n}{2}-1$, also $\frac{n}{2}$ Zerlegungen; für eine ungerade Zahl n geben alle Zahlen für p von 0, 1, 2 bis $\frac{n-1}{2}$, also $\frac{n+1}{2}$ Zerlegungen von a^n in die Summe zweier Quadrate.

§ 11.

Teilt man im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ABC den Schenkel CB harmonisch im Verhältniss 2 : 1, so dass

$$BC : CD = BE : ED = 2 : 1$$

ist, dann ist

$$BC = 3 . EB, \quad CD = \tfrac{3}{2}\ EB, \quad DE = \tfrac{1}{2} . EB, \quad CE = 2 . E\ldots$$

Nach dem Pythagoras ist

$$9\ \overline{EB}^2 + 4\ \overline{EB}^2 = \overline{AE}^2$$

folglich ist

$$AE = EB\sqrt{13}$$

Ferner ist

$$\sin EAB : \sqrt{\tfrac{1}{2}} = EB : EB . \sqrt{13} \quad \text{oder}$$

I. $$\sin EAB = \sqrt{\frac{1}{2}} . \sqrt{\frac{1}{13}}$$

Da $\sin CAE = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ und $\cos CAE = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ ist, so ist

$$\sin(\text{Wkl. } CAE + \text{Wkl. } EAB) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{13}} . \cos EAB + \frac{3}{\sqrt{13}} . \frac{1}{\sqrt{13}} . \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

hieraus folgt:

II. $$\cos EAB = \frac{5\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{13}}$$

Es ist dann:

$$\sin 2\ \text{Wkl}\ EAB = \frac{5}{13}, \quad \cos 2\ \text{Wkl}\ EAB = \frac{12}{13}$$

Da $13^2 = 5^2 + 12^2$ ist, so ist 2 Wkl. EAB ein Hypotenusenwinkel von ${}^{12}\underset{13}{\triangle}{}^{5}$; der andere Hypotenusenwinkel ist demnach 2 Wkl. CAE.

Um zu untersuchen, ob auch Wkl. DAE die Hälfte eines Hypotenusenwinkels ist, setzt man:

III. $$\sin DAE = \sin(\text{Wkl. } DAB - \text{Wkl } EAB)$$
$$\cos DAE = \cos(\text{Wkl. } DAB - \text{Wkl. } EAB)$$

Nun ist nach § 1.:

IV. $$\sin DAB = \sqrt{\frac{1}{2}} . \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und}$$

$$\sin CAD = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos CAD = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

also erhält man aus der Formel

$$\sin(\text{Wkl. } CAD + \text{Wkl. } DAB) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{5}}\cos DAB$$
$$+ 2\sqrt{\tfrac{1}{5}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{5}} \text{ die Gleich. V.} \qquad \cos DAB = 3\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

Mittels der Gleichungen I., II., IV., V. werden die Gleichungen III. umgerechnet in

VI. $$\sin DAE = \frac{1}{\sqrt{65}} \quad \text{und} \quad \cos DAE = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

hieraus folgt:

VII. $$\sin 2\,DAB = \frac{16}{65} \qquad \text{und} \qquad \cos 2\,DAE = \frac{63}{65}$$

Nun ist

$$65^2 = 16^2 + 63^2$$

also ist auch 2 DAE ein Hypotenusenwinkel.

Hieraus ergiebt sich der Satz:

A. Die Transversalen nach den Teilpunkten eines harmonisch geteilten Schenkels im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck bilden unter sich und mit den Seiten des Dreiecks halbe Hppotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken.

Ein in § 18 aufgestellte Tabelle wird diesen Satz bestätigen.

§ 12.

Wie die Differenz, so ist auch die Summe der beiden Winkel *DAD* und *BAE* die Hälfte eines Hypotenusenwinkels von $\underset{65}{\triangle}$ Es ist

I. $$\sin(DAB + BAE) = \frac{4}{\sqrt{65}}$$
$$\cos(DAB + BAE) = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

und

II. $$\sin 2(DAB + BAE) = \frac{56}{65}$$
$$\cos 2(DAB + BAE) = \frac{33}{65}$$

Die Gleichungen II. geben:

$$65^2 = 33^2 + 56^2$$

mithin ist $2(DAB + BAE)$ ein Hypotenusenwinkel von ${}^{56}\underset{65}{\triangle}{}^{33}$.

Die Hypotenuse 65 ist ein Product von den primzahligen Hypotenusen $a_1 = 5$ und $a_2 = 16$. Zu ihr gehören die beiden zusammengesetzten pythgoreischen Dreiecke, wie aus II. und § 11. VII sich ergiebt, ${}^{63}\underset{65}{\triangle}{}^{33}$ und ${}^{13}\underset{65}{\triangle}{}^{16}$. Hieraus lassen sich folgende Sätze aufstellen:

A. Das Product zweier primzahligen Hypotenusen a_1 und a_2 ist eine Hypotenuse eines zusammengesetzten pythagoreischen Dreiecks.

B. Zu jeder Hypotenuse, die ein Product zweier verschiedenen primzahligen Hypotenusen ist, gehören zwei Kathetenpaare.

Ferner ergiebt sich aus I. und § 11. VI.:

$$65 = 4^2 + 7^2 \quad \text{und} \quad 65 = 1^2 + 8^2$$

es folgt hieraus der Satz:

C. Jede Hypotenuse, die ein Product zweier verschiedenen primzahligen Hypotenusen ist, lässt sich zweifach in der Form der Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen darstellen.

§ 13.

Um die pythagoreischen Dreieckszahlen von $\underset{a_1 \,.\, a_2}{\triangle}$ aufzusuchen, sind, wie aus § 11. III. und § 12 II. hervorgeht, folgende Formeln anzuwenden:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} \sin(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}) &= \sin\beta_{a_1} \,.\, \cos\beta_{a_2} \pm \cos\beta_{a_1} \,.\, \sin\beta_{a_2} \\ \cos(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) &= \cos\beta_{a_1} \,.\, \cos\beta_{a_2} \mp \sin\beta_{a_1} \,.\, \sin\beta_{a_2} \end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned} \sin(\beta_{a_1} \pm \gamma_{a_2}) &= \sin\beta_{a_1} \,.\, \cos\gamma_{a_2} \pm \cos\beta_{a_1} \,.\, \sin\gamma_{a_2} \\ \cos(\beta_{a_1} \pm \gamma_{a_2}) &= \cos\beta_{a_2} \,.\, \cos\gamma_{a_2} \mp \sin\beta_{a_1} \,.\, \sin\gamma_{a_2} \end{aligned}$$

oder $\sin(\gamma_{a_1} \pm \beta_{a_2})$ und $\cos(\gamma_{a_1} \pm \beta_{a_2})$

Für $\underset{5\,.\,13}{\triangle}$ ist

$$\sin\beta_5 = \frac{3}{5}, \quad \sin\beta_{13} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\beta_5 = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta_{13} = \frac{12}{13}$$

in I. einzusetzen, und man erhält:

$$\sin(\beta_5 + \beta_{13}) = \frac{56}{65}, \quad \cos(\beta_5 + \beta_{13}) = \frac{33}{65}$$

1) $\underset{5\,.\,13}{{}^{56}\triangle^{33}}$: 65 33 56

und

$$\sin(\beta_5 - \beta_{13}) = \frac{16}{65}, \quad \cos(\beta_5 - \beta_{13}) = \frac{63}{65}$$

2) $\underset{65}{{}^{63}\triangle^{16}}$: 65 16 63

Hierzu kommen noch aus den Gleichungen:

$$\sin(\beta_5 + 90^0) = \cos\beta_5 \cdot \frac{13}{13} = \frac{52}{65}$$

$$\cos(\beta_5 + 90^0) = \sin\beta_5 \cdot \frac{13}{13} = \frac{39}{65}$$

und aus:

$$\sin(\beta_{13} + 90^0) = \cos\beta_{13} \cdot \frac{5}{5} = \frac{60}{65}$$

$$\cos(\beta_{13} + 90^0) = -\sin\beta_{13} \cdot \frac{5}{5} = \frac{25}{65}$$

die pythagoreischen Zahlen:

3) $\underset{5\,.\,13}{{}^{52}\triangle^{39}}$: 65 39 52, 13 . 5 13 . 3 13 . 4

4) $\underset{5\,.\,13}{{}^{65}\triangle^{25}}$: 65 25 60, 5 . 13 5 . 5 5 . 12

§ 14.

Ist die Hypotenuse ein Product aus drei verschiedenen primzahligen Hypotenusen, so wird durch folgende trigonometrische Ausdrücke die Anzahl der Paare der Katheten, die relative Primzahlen sind, dargestellt:

1) $\sin[(\beta_{a_1}+\beta_{a_2})+\beta_{a_3}]$ und $\cos[(\beta_{a_1}+\beta_{a_2})+\beta_{a_3}]$

2) $\sin[(\beta_{a_1}+\beta_{a_2})-\beta_{a_3}]$ und $\cos[(\beta_{a_1}+\beta_{a_2})-\beta_{a_3}]$

3) $\sin[(\beta_{a_1}-\beta_{a_2})+\beta_{a_3}]$ und $\cos[(\beta_{a_1}-\beta_{a_2})+\beta_{a_3}]$

4) $\sin[(\beta_{a_1}-\beta_{a_2})-\beta_{a_3}]$ und $\cos[(\beta_{a_1}-\beta_{a_2})-\beta_{a_3}]$

Dies sind 2^2 Kathetenpaare.

Ist das Product aus vier verschiedenen primzahligen Hypotenusen zusammengesetzt, so ist β_{a_4} zu diesen vier verschiedenen Winkelzusammensetzungen je einmal mit + und je einmal mit — hinzuzufügen; man erhält $2^3 = 2^{4-1}$ Kathetenpaare. Bei einem Product aus fünf verschiedenen primzahligen Hypotenusen werden $2^4 - 2^{5-1}$ Kathetenpaare vorhanden sein. Es ergiebt sich der Satz:

A. Eine Hypotenuse, die ein Product aus p verschiedenen primzahligen Hypotenusen ist, lässt 2^{p-1} verschiedene Paare von Katheten, die relative Primzahlen sind, zu.

Hierzu kommen noch andere Kathetenpaare, bei welchen die Katheten verwandte Zahlen sind. Bei einem Product von zwei primzahligen Hypotenusen giebt es nach § 13. ausserdem noch zwei Kathetenpaare. Bilden vier primzahlige Hypotenusen das Product, so stellen folgende Ausdrücke die noch fehlenden Kathetenpaare dar:

II.

$$\sin[(\beta_{a_1}\pm\beta_{a_2})\pm\beta_{a_3}]\cdot\frac{a_4}{a_4} \text{ und } \cos[(\beta_{a_1}\pm\beta_{a_2})\pm\beta_{a_3}]\cdot\frac{a_4}{a_4}$$

$$\sin[(\beta_{a_1}\pm\beta_{a_2})\pm\beta_{a_4}]\cdot\frac{a_3}{a_3} \text{ und } \cos[(\beta_{a_1}\pm\beta_{a_2})\pm\beta_{a_4}]\cdot\frac{a_3}{a_3}$$

$$\sin[(\beta_{a_3}\pm\beta_{a_4})\pm\beta_{a_1}]\cdot\frac{a_2}{a_2} \text{ und } \cos[(\beta_{a_3}\pm\beta_{a_4})\pm\beta_{a_1}]\cdot\frac{a_2}{a_2}$$

$$\sin[(\beta_{a_3}\pm\beta_{a_4})\pm\beta_{a_2}]\cdot\frac{a_1}{a_1} \text{ und } \cos[(\beta_{a_3}\pm\beta_{a_4})\pm\beta_{a_2}]\cdot\frac{a_1}{a_1}$$

$$= 2^2(1\,.\,1\,.\,1+1\,.\,1\,.\,1+1\,.\,1\,.\,1+1\,.\,1\,.\,1) = 2^2\,.\,4$$

$$\sin[\beta_{a_1}\pm\beta_{a_2}]\cdot\frac{a_3}{a_3}\cdot\frac{a_4}{a_4} \text{ und } \cos[\beta_{a_1}\pm\beta_{a_2}]\cdot\frac{a_3}{a_3}\cdot\frac{a_4}{a_4}$$

$$\sin[\beta_{a_1}\pm\beta_{a_3}]\cdot\frac{a_2}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_4} \text{ und } \cos[\beta_{a_1}\pm\beta_{a_3}]\cdot\frac{a_2}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_4}$$

$$\sin[\beta_{a_1}\pm\beta_{a_4}]\cdot\frac{a_2}{a_2}\cdot\frac{a_3}{a_3} \text{ und } \cos[\beta_{a_1}\pm\beta_{a_4}]\cdot\frac{a_2}{a_2}\cdot\frac{a_3}{a_3}$$

III.

III.

$$\sin[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_4}{a_4} \text{ und } \cos[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_4}{a_4}$$

$$\sin[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_3} \text{ und } \cos[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_3}$$

$$\sin[\beta_{a_3} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \text{ und } \cos[\beta_{a_3} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2}$$

$$= 2^1(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1) = 2^1 \cdot 6$$

IV.

$$\sin(\beta_{a_1}) \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4} \text{ und } \cos(\beta_{a_1}) \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4}$$

$$\sin(\beta_{a_2}) \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4} \cdot \frac{a_1}{a_1} \text{ und } \cos(\beta_{a_2}) \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4} \cdot \frac{a_1}{a_1}$$

$$\sin(\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_4}{a_4} \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \text{ und } \cos(\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_4}{a_4} \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2}$$

$$\sin(\beta_{a_4}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \text{ und } \cos(\beta_{a_4}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{v_3}$$

$$= 2^0(1 + 1 + 1 + 1) = 2^0 \cdot 4$$

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dass die Anzahl der Kathetenpaare in II., III., IV. gleich ist der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung von 4 Elementen beziehungsweise zur 3ten, 2ten und ersten Classe. Wird nach Heis die Anzahl der Combinationen von p Elementen zur $r$ten Classe ohne Wiederholung durch $\underset{r}{C}(p)$ bezeichnet, so kann die Anzahl der Kathetenpaare auf folgende Weise angegeben werden.

Zu $\underset{a_1 a_2 a_3 a_4}{\triangle}$ gehören:

$$(2^0 \cdot \underset{1}{C}(4) + 2^1 \cdot \underset{2}{C}(4) + 2^2 \cdot \underset{3}{C}(4) + 2^3) \text{ Kathetenpaare.}$$

Nach demselben Bildungsgesetz giebt ein Product von fünf primzahligen Hypotenusen:

$$2^0 \cdot \underset{1}{C}(5) + 2^1 \cdot \underset{2}{C}(5) + 2^2 \cdot \underset{3}{C}(5) + 2^3 \cdot \underset{4}{C}(5) + 2^4 \text{ Kathetenpaare}$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

B. Zu jeder Hypotenuse, die aus einem Producte von p verschiedenen primzahligen Hypotenusen besteht, gehören:

$$\text{V,} \quad 2^0\underset{1}{C}(p) + 2^1\underset{2}{C}(p) + 2^2\underset{3}{C}(p) + \ldots + 2^{p-2} \cdot \underset{p-1}{C}(p) + 2^{p-1}$$

Kathetenpaare. Die Katheten von 2^{p-1} Paaren sind relative Primzahlen, die der übrigen nicht.

Setzt man in I. bis IV. $\beta_{a_1} = \eta_{b_1}$, $\beta_{v_2} = \eta_{b_2}$, $\beta_{a_3} = \eta_{b_3}$, $\beta_{a_4} = \eta_{b_4}$ und $a_1 = \sqrt{a_1}$, $a_2 = \sqrt{a_2}$, $a_3 = \sqrt{a_3}$, $a_4 = \sqrt{a_4}$, so lässt sich auf dieselbe Weise, wie in § 10. der Satz beweisen.

C. Eine Hypotenuse, die ein Product aus p verschiedenen primzahligen Hypotenusen ist, lässt 2^{p-1} verschiedene Zerlegungen in die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen zu.

Mehr als 2^{p-1} Zerlegungen sind nicht vorhanden, da ein Product aus reinen Primzahlen niemals eine Quadratzahl giebt.

§ 15.

Um die Anzahl der Kathetenpaare von $\underset{a_1^m \, . \, a_2^n \, . \, a_3^o \, . \, . \, . \, a^t_n}{\triangle}$ zu bestimmen, ist es zweckmässig, wieder von einem einfachen Beispiel auszugehen, um aus diesem dann den allgemeinen Satz abzuleiten.

Angenommen, es sei die Anzahl aller Kathetenpaare von $\underset{a_1^1 \, . \, a_2^2 \, . \, a_3^3}{\triangle}$ zu suchen. Nach § 14. stellen folgende Ausdrücke:

a) $\sin[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm 3\beta_{a_3}]$ und $\cos[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm 3\beta_{a_3}]$

die vier Kathetenpaare dar, in denen die Katheten eines jeden Paares relative Primzahlen sind. Ferner werden folgende Zusammenstellungen je vier Kathetenpaare geben.

I.

b) $\sin[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm 3_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2}$ und $\cos[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2}$

c) $\sin[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a^8}{a_3}$ und $\cos[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm 2\beta_{3}] \cdot \frac{a_8}{a_3}$

d) $\sin[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}) \pm 2\beta_{v_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3}$ und $\cos[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3}$

e) $\sin[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$ und $\cos[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$

I.

f) $\sin[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$ und $\cos[(\beta_{a_1}) \pm \beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}]$

$\cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$

Dies sind alle Zusammenstellungen von den drei Winkeln (β_{a_1}, β_{a_2}, β_{a_3}). Es ergeben sich hieraus:

$2^2(1 \,.\, 2 \,.\, 3)$ Kathetenpaare.

Stellt man nur zwei Winkel (β_{a_1}, β_{a_2}), (β_{a_1}, β_{a_3}), (β_{a_2}, β_{a_3}) zusammen, so geben folgende Ausdrücke:

a) $\sin[\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}] \cdot \frac{a_3^3}{a_3^3}$ und $\cos[\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}] \cdot \frac{a_3^3}{a_3^3}$

b) $\sin[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^3}{a_3^3}$ und $\cos[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^3}{a_3^3}$

$= 2^1(1 \,.\, 2)$

c) $\sin[\beta_{a_1} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2}$ und $\cos[\beta_{a_1} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2}$

d) $\sin[\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3}{a_3}$ und $\cos[\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3}{a_3}$

e) $\sin[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$ und $\cos[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$

II.

$= 2^1(1 \,.\, 3)$

f) $\sin[2\beta_{a_2} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1}$ und $\cos[2\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1}$

g) $\sin[\beta_{a_2} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2}$ und $\cos[\beta_{a_2} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2}$

h) $\sin[2\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_3}$ und $\cos[2\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_3}$

i) $\sin[\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3}$ und $\cos[\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot$

$\cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3}$

k) $\sin(2\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$ und $\cos[2\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$

l) $\sin[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$ und $\cos[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}]$

$\cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^3}{a_3^3}$

$= 2^1(2 \,.\, 3)$

also im ganzen $= 2^1(1 \,.\, 2 + 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3)$ Kathetenpaare. Es bleiben noch übrig:

III.

a) $\sin(\beta_{a_1}) \,.\, \frac{a_2{}^2}{a_2{}^2} \,.\, \frac{a_3{}^3}{a_3{}^3}$ und $\cos(\beta_{a_1}) \,.\, \frac{a_2{}^2}{a_2{}^2} \,.\, \frac{a_3{}^3}{a_3{}^3}$

b) $\sin(2\beta_{a_2}) \,.\, \frac{a_1}{a_2} \,.\, \frac{a_3{}^3}{a_3{}^3}$ und $\cos(2\beta_{a_2}) \,.\, \frac{a_1}{a_1} \,.\, \frac{a_3{}^3}{a_3{}^3}$

c) $\sin(\beta_{a_2}) \,.\, \frac{a_1}{a_1} \,.\, \frac{a_2}{a_2} \,.\, \frac{a_3{}^3}{a_3{}^3}$ und $\cos(\beta_{a_2}) \,.\, \frac{a_1}{a_1} \,.\, \frac{a_2}{a_9} \,.\, \frac{a_3{}^3}{a_3{}^3}$

d) $\sin(3\beta_{a_3}) \,.\, \frac{a_1}{a_1} \,.\, \frac{a_2{}^2}{a_2{}^2}$ und $\cos(3\beta_{a_3}) \,.\, \frac{a_1}{a_1} \,.\, \frac{a_2{}^2}{a_2{}^3}$

e) $\sin(2\beta_{a_3}) \,.\, \frac{a_1}{a_1} \,.\, \frac{a_2{}^2}{a_3{}^3}\, \frac{a_3}{a_3}$ und $\cos(2\beta_{a_3}) \,.\, \frac{a_1}{a_1} \,.\, \frac{a_2{}^2}{a_3{}^2} \,.\, \frac{a_3}{a_3}$

f) $\sin(\beta_{a_3}) \,.\, \frac{a_1}{a_1} \,.\, \frac{a_2{}^2}{a_2{}^2} \,.\, \frac{a_3{}^3}{a_3{}^3}$ und $\cos(\beta_{a_8}) \,.\, \frac{a_1}{a_1} \,.\, \frac{a_1{}^2}{a_1{}^2} \,.\, \frac{a_3{}^2}{a_3{}^2}$

$= 2^0(1 + 2 + 3)$ Kathetenpaare.

Man erhält also für $\underset{a_1 a_2{}^2 a_3{}^3}{\triangle}$:

$$2^0(1 + 2 + 3) + 2^1(1 \,.\, 2 + 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3) + 2^2(1 \,.\, 2 \,.\, 3) = 5[illegible]$$

Kathetenpaare und allgemein für $\underset{a^m{}_1\, a^n{}_2\, a^o{}_3}{\triangle}$

$$2^0(m + n + o) + 2^1(m \,.\, n + m \,.\, o + n \,.\, o) + 2^2(m \,.\, n \,.\, o)$$

Kathetenpaare. Man sieht hieraus, dass die Klammerausdrücke Combinationen ohne Wiederholung der Exponenten zur ersten, zweiten und dritten Classe sind. Bezeichnet man die Summe der Producte, die man erhält, wenn man die $r$te Classe der Combinationen ohne Wiederholung von p Elementen bildet, mit $\underset{r}{\Sigma C}(p)$, so kann die Anzahl der Kathetenpaare zu $\underset{a^m{}_1\, a^n{}_2\, a^o{}_3}{\triangle}$ folgendermassen dargestellt werden:

$$2^0 \underset{1}{\Sigma C}(3) + 2^1 \underset{2}{\Sigma C}(3) + 2^2 \underset{3}{\Sigma C}(3)$$

Nach demselben Bildungsgesetz erhält man nun zu einer Hypotenuse, die ein Product aus vier verschiedenen Hypotenusen ist,

$$2^0 \underset{1}{\Sigma C}(4) + 2^1 \underset{2}{\Sigma C}(4) + 2^2 \underset{3}{\Sigma C}(4) + 2^3 \underset{4}{\Sigma C}(4)$$

Kathetenpaare. Hieraus folgt der Satz:

A. Zu jeder Hypotenuse, die aus einem Product von p verschiedenen Potenzhypotenusen besteht, gehören

$$2^0 \underset{1}{\Sigma C}(p) + 2^1 \underset{2}{\Sigma C}(p) + 2^2 \underset{3}{\Sigma C}(p) + \ldots + 2^{p-2} \underset{p-1}{\Sigma C}(p) + 2^{p-1} \underset{p}{\Sigma C}(p)$$

verschiedene Kathetenpaare. Die Katheten von 2^{p-1}, wie aus Ia. hervorgeht, sind relative Primzahlen, die der übrigen nicht.

Ist die Hypotenuse ein Product aus primzahligen Hypotenusen, so sind sämtliche Exponenten gleich 1 zu setzen. Dadurch werden auch sämtliche Producte gleich 1, ihre Summen also gleich ihrer Anzahl $C(p)$. Es ergiebt sich daraus der schon in § 14. bewiesene Satz A.

Die Zusammenstellung der Sinusse und Cosinusse in I., II., III. zeigt nach der Beweisführung in § 10., dass nur Ia., wenn

$$\beta a_1 = \eta b, \quad 2\beta a_2 = 2\eta b_2, \quad 3\beta a_3 = 3\eta b_3 \quad \text{ist,}$$

die Anzahl der Zerlegungen der Hypotenuse in die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen liefert. Hierzu kommen noch, wie aus Ie, IIc., IIe. ersichtlich ist, Zerlegungen, von denen eine jede aus verwandten Zahlen zusammengesetzt ist. Mithin hat man den Satz:

B. Jede Hypotenuse, die ein Product aus p verschiedenen Potenzhypotenusen ist, lässt ausser den 2^{p-1} verschiedenen Zerlegungen in die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen noch andere Zerlegungen zu, von denen eine jede aus verwandten Zahlen zusammengesetzt ist.

§ 16.

Im allgemeinen lassen sich aus den Grundzahlen der Zerlegungen der Hypotenuse alle zu ihr gehörigen Kathetenpaare finden. Von dieser Regel macht die Hypotenuse a^2 eine Ausnahme; sie hat zwei Kathetenpaare z. B.: ($25^2 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2$), aber nur eine Zerlegung ($5^2 = 3^2 + 4^2$), aus der auch nur ein Kathetenpaar, nämlich ($25^2 = 7^2 + 24^2$) gebildet werden kann. Um das andere für 5^2 aufzustellen, hat man die Quadratzahlen der Zerlegung mit 5^2 zu multipliciren, also:

$$5^2 \,.\, 5^2 = 3^2 \,.\, 5^2 + 4^2 \,.\, 5^2 = 15 + 20^2$$

Dass die vorstehende Regel sonst allgemeine Gültigkeit hat, soll an den beiden Beispielen 1) $a = 5 \,.\, 13 \,.\, 17$, 2) $a = 5^2 \,.\, 13$ gezeigt werden.

1. Für 5 . 13 heissen nach § 12. die Zerlegungen 5 . 13 = $4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2$. Die Hypotenuse 17. hat die Zerlegung 17 = $1^2 + 4^2$. Setzt man

$$\sin \eta_b = \frac{4}{\sqrt{65}} \qquad \cos \eta_b = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\sin \eta_b' = \frac{1}{\sqrt{65}} \qquad \cos \eta_b' = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

$$\sin \eta_b'' = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \cos \eta_b'' = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

in den Formeln für

$$\sin(\eta_b \pm \eta_b'') \text{ und } \cos(\eta_b \pm \eta_b'')$$
$$\sin(\eta_b' \pm \eta_b'') \text{ und } \cos(\eta_b' \pm \eta_b'')$$

so erhält man die vier Zerlegungen von $a = 5 . 13 . 17$; nämlich es ist:

$$\sin(\eta_b + \eta_b'') = \frac{23}{\sqrt{5 . 13 . 17}} \qquad \cos(\eta_b + \eta_b'') = \frac{24}{\sqrt{5 . 13 . 17}}$$

$$\sin(\eta_b - \eta_b'') = \frac{9}{\sqrt{5 . 13 . 17}} \qquad \cos(\eta_b - \eta_b'') = \frac{32}{\sqrt{5 . 13 . 17}}$$

$$\sin(\eta_b' + \eta_b'') = \frac{12}{\sqrt{5 . 13 . 17}} \qquad \cos(\eta_b' + \eta_b'') = \frac{31}{\sqrt{5 . 13 . 17}}$$

$$\sin(\eta_b' \pm \eta_b'' = \frac{-4}{\sqrt{5 . 13 . 17}} \qquad \cos(\eta_b' - \eta_b) = \frac{33}{\sqrt{5 . 13 . 17}}$$

und aus der Formel

$$\sin^2(\eta_b + \eta_b'') + \cos^2(\eta_b + \eta_b'') = 1)$$

folgt

$$a^2 = 23^2 + 24^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 4^2 + 33^2$$

Zur Abkürzung dienen folgende Bezeichnungen:

$\eta_b + \eta_b'' = \varrho'$, $\eta_b - \eta_b'' = \varrho''$, $\eta_b' + \eta_b'' = \varrho'''$, $\eta_b' - \eta_b'' = \varrho''$

$\sqrt{5 . 13 . 17} = N$. Es ist dann:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} \sin 2\varrho' &= 2\sin\varrho'\cos\varrho' = \frac{1104}{N_1^2} \\ \cos 2\varrho' &= 2\cos\varrho'^2 - 1 = \frac{47}{N^2} \end{aligned}$$

ebenso ist

$$\text{Ia.}\quad \begin{aligned} &\sin 2\varrho'' = \frac{576}{N^2}, \quad \sin 2\varrho''' = \frac{744}{N^2}, \quad \sin 2\varrho'''' = \frac{264}{N^2} \\ &\cos 2\varrho'' = \frac{943}{N^2}, \quad \cos 2\varrho'' = \frac{817}{N^2}, \quad \cos 2\varrho'''' = \frac{1073}{N^2} \end{aligned}$$

Um die andern Kathetenpaare zu finden, combinirt man $\varrho'\varrho''$ $\varrho'''\varrho''''$ in folgender Weise:

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} &\sin(\varrho' \pm \varrho'') = \sin\varrho'\cos\varrho'' \pm \cos\varrho'\sin\varrho'' = \frac{952}{N^2}, \quad = \frac{520}{N^2} \\ &\cos(\varrho' \pm \varrho'') = \cos\varrho'\cos\varrho'' \pm \sin\varrho'\sin\varrho'' = \frac{561}{N^2}, \quad = \frac{975}{N^2} \end{aligned}$$

wo der zweite Wert für das untere Zeichen gilt.

Ebenso ist:

$$\text{IIa.}\quad \begin{aligned} &\sin(\varrho' \pm \varrho''') = \frac{1001}{N^2}, \quad = \frac{425}{N^2}, \quad \cos(\varrho' \pm \varrho''') = \frac{468}{N^2}, \quad = \frac{1020}{N^2} \\ &\sin(\varrho' \pm \varrho'''') = \frac{855}{N^2}, \quad = \frac{663}{N^2}, \quad \cos(\varrho' \pm \varrho''') = \frac{700}{N^2}, \quad = \frac{884}{N^2} \\ &\sin(\varrho'' \pm \varrho''') = \frac{663}{N^2}, \quad = \frac{105}{N^2}, \quad \cos(\varrho'' \pm \varrho''') = \frac{884}{N^2}, \quad = \frac{1100}{N^2} \\ &\sin(\varrho'' \pm \varrho'''') = \frac{169}{N^2}, \quad = \frac{468}{N^2}, \quad \cos(\varrho'' \pm \varrho'''') = \frac{1042}{N^2}, \quad = \frac{1020}{N^2} \\ &\sin(\varrho''' \pm \varrho'''') = \frac{272}{C^2} \quad = -\frac{520}{N^2}, \quad \cos(\varrho''' \pm 2\varrho'''') = \frac{1071}{N^2}, = \frac{975}{N^2} \end{aligned}$$

Die Gleichungen I. und Ia. geben vier Paare, deren Katheten relative Primzahlen sind, II. und IIa, geben zwölf Paare, von denen nur neun verschiedene sind. Die Kathetenpaare zur Hypotenuse $a = 5 \,.\, 13 \,.\, 17$ sind demnach:

$$1105^2 = (5 \,.\, 13 \,.\, 27)^2$$

1)	$= 47^2 + 1104^2$	2)	$= 576^2 + 943^2$
3)	$= 744^2 + 817^2$	4)	$= 264^2 + 1073^2$
5)	$= 952^2 + 561^2$	6)	$= 520^2 + 975^3$
7)	$= 1001^2 + 468^2$	8)	$= 425^2 + 1020^2$
9)	$= 855^2 + 700^2$	10)	$= 663^2 + 884^2$
11)	= wie 10)	12)	$= 105^2 + 1100^2$
13)	$= 169^2 + 1092^2$	14)	= wie 8)
15)	$= 272^2 + 1071^2$	16)	= wie 6)

also dreizehn verschiedene Paare, wie viel nach § 14. III. vorhanden sein sollen.

2) Um die Zerlegungen zu $a = 5^2 . 13$ zu erhalten, benutzt man diese von 5 . 13 und 5. Man setzt wieder wie oben:

$$\sin \eta_b = \frac{4}{\sqrt{65}} \qquad \cos \eta_b = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\sin \eta_b' = \frac{1}{\sqrt{65}} \qquad \cos \eta_b' = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

$$\sin \eta_b'' = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos \eta_b'' = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

in den Formeln für

$$\sin(\eta_b \pm \eta_b'') \text{ und } \cos(\eta_b \pm \eta_b'')$$
$$\sin(\eta_b'' \pm \eta_b') \text{ und } \cos(\eta_b'' \pm \eta_b')$$

und erhält:

$$\sin(\eta_b + \eta_b'') = \sin \varrho' = \frac{15}{\sqrt{325}}$$

$$\cos(\eta_b + \eta_b'') = \cos \varrho' = \frac{10}{\sqrt{325}}$$

$$\sin(\eta_b - \eta_b'') = \sin \varrho'' = \frac{1}{\sqrt{325}}$$

$$\cos(\eta_b - \eta_b'') = \cos \varrho'' = \frac{18}{\sqrt{325}}$$

$$\sin(\eta_b'' + \eta_b' = \cos \varrho', \quad \cos(\eta_b'' + \eta_b') = \sin \varrho'$$

$$\sin(\eta_b'' - \eta_b') = \sin \varrho''' = \frac{6}{\sqrt{325}} \qquad \cos(\eta_b'' - \eta_b') = \cos \varrho''' = \frac{17}{\sqrt{325}}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Zerlegungen:

$$a^2 = 5^2 . 13 = 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 15^2 + 10^2 = (5^2(3^2 + 2^2))$$

Nun ist:

$$\sin 2\varrho' = \frac{300}{N^2} \qquad \sin 2\varrho'' = \frac{36}{N^2} \qquad \sin 2\varrho''' = \frac{204}{N^2}$$

$$\cos 2\varrho' = -\frac{125}{N^2} \qquad \cos 2\varrho'' = \frac{323}{N^2} \qquad \cos 2\varrho''' = \frac{253}{N^2}$$

$$\sin(\varrho' \pm \varrho'') = \frac{280}{N^{2'}} = \frac{260}{N^2} \quad \cos(\varrho' \pm \varrho'') = \frac{165}{N^{2'}} = \frac{195}{N^2}$$

$$\sin(\varrho' \pm \varrho''') = \frac{315}{N^{2'}} = \frac{195}{N^2} \quad \cos(\varrho' \pm)\varrho''' = \frac{80}{N^{2'}} = \frac{260}{N^2}$$

$$\sin(\varrho'' \pm \varrho''') = \frac{125}{N^2} = \frac{91}{N^2} \quad \cos(\varrho'' \pm \varrho''') = \frac{300}{N^{2'}} = \frac{312}{N^2}$$

Man erhält im ganzen acht, aber nur sieben verschiedene Paare. Die Katheten von zwei Paaren, nämlich:

$$(5^2 \,.\, 13)^2 = 36^2 + 323^2 = 204^2 + 253^2$$

sind relative Primzahlen; die Katheten der anderen verschiedenen Paare, nämlich:

$$(5^2 \,.\, 13)^2 = 125^2 + 300^2 = 165^2 + 280^2 = 260^2 + 195^2 = 80^2 + 315^2 = 91^2 + 312^2$$

sind verwandte Zahlen; dies sind alle Kathetenpaare, welche der Satz A. § 15. verlangt.

§ 17.

Um zur Bildung der Paare, in denen die Katheten verwandte Zahlen sind, nach Regeln aufzustellen, sollen im nachstehenden die Paare nochmals übersichtlicher aufgezählt werden. Links von einem jeden Paare steht der gemeinsame Factor desselben und rechts stehen die nicht gemeinsamen Factoren, die Katheten eines andern pythagoreischen Dreiecks, dessen Hypotenuse, die daneben rechts in Klammern angegeben ist, aus einer geringeren Anzahl derselben primzahligen Hypotenusen gebildet ist als die Hypotenuse N. Neben einem jeden aus der Summe der Winkel gebildeten Kathetenpaare steht rechts das aus ihrer Differenz gebildete Kathetenpaar.

		$\varrho' + \varrho''$				$\varrho' - \varrho''$		
1)	17	952	56	(65)	65	520	8	(17)
		561	33			975	15	
	13	1001	77	(85)	85	425	5	(13)
		468	36			1020	12	
	5	855	171	(221)	221	663	3	(5)
		700	140			884	4	
	221	663	3	(5)	5	105	21	(221)
		884	4			1100	220	

	13	169	13	(85)	85	425	5	(13)
		1092	84			1020	12	
	17	272	16	(65)	65	520	8	(17)
		1071	63			975	15	
2)	5	280	56	(65)	65	260	4	(5)
		165	33			195	3	
	5	315	63	(65)		195	3	(5)
		80	26			260	4	
	5^2	125	5	(13)	13	91	7	(5^2)
		300	12			312	24	

Die Sätze, die sich aus dieser Zusammenstellung ergeben, sind:

A. Der gemeinsame Factor eines Kathetenpaares ist entweder eine primzahlige Hypotenuse oder ein Product aus zwei oder mehreren primzahligen Hypotenusen; die nicht gemeinsamen Factoren bilden ein Kathetenpaar zu einer Hypotenuse aus den noch übrigen primzahligen Hypotenusen.

B. Das Product aus dem einen in dem andern gemeinsamen Factor der aus der Summe und der Differenz der Winkel gebildeten Kathetenpaare ist gleich der Hypotenuse der Kathetenpaare.

C. Die nicht gemeinsamen Factoren von je einem aus der Summe und der Differenz der Winkel gebildeten Kathetenpaare zur Hypotenuse N geben die Paare zur Hypotenuse N, deren Katheten relative Primzahlen sind, wieder. Wählt man z. B. die Katheten 56 und 33, 8 und 15, so erhält man nach den Formeln für

$$\sin(\beta_{65} \pm \beta_{17}) \quad \text{und} \quad \cos(\beta_{65} \pm \beta_{17}):$$

$$\sin(\beta_{65} + \beta_{17}) = \frac{1104}{17 \,.\, 65} \quad \cos(\beta_{65} + \beta_{17}) = \frac{47}{17 \,.\, 65}$$

$$\sin(\beta_{65} - \beta_{17}) = \frac{576}{17 \,.\, 65} \quad \cos(\beta_{65} - \beta_{17}) = \frac{943}{17 \,.\, 65}$$

also

$$(17 \,.\, 65)^2 = 1104^2 + 47^2 = 576^2 + 943^2$$

Auf diese Weise werden alle Paare gefunden, die sich sonst aus den Formeln für $\sin 2\varrho$ und $\cos 2\varrho$ ergeben.

§ 18.

Unter Zugrundelegung der Figur 2 ist im nachstehenden (I) eine tabellarische Uebersicht derjenigen halben Hypotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken trigonometrisch berechnet, welche die Transversalen nach den Teilpunkten des in 2 bis 8 gleiche Teile geteilten Schenkels BC mit dem Schenkel AC bilden, und (II) eine andere derjenigen halben Hypotenusenwinkel, welche die Transversalen nach den Teilpunkten des im Verhältniss 2 : 1 bis 8 : 7 harmonisch geteilten Schenkels BC mit AC bilden. Neben jedem halben Hypotenusenwinkel steht der Sinus des ganzen und daneben rechts die Bezeichnung des entsprechenden pythagoreischen Dreiecks.

Die trigonometrische Berechnung der Winkel ist ausgeführt nach der siebenstelligen Logarithmentafel von Vega.

I.

$CB:AD$	BD^2	$\sin\eta_b$	η_b	$\sin\eta_b$	$\triangle$
2 : 1	$2^2+1=5$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^0\,33'\,54\,\frac{76''}{421}$	$\frac{4}{5}$	${}^{4}\triangle^{3}_{5}$
3 : 1	$9^2+2^2=13$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$33^0\,41'\,24\,\frac{19''}{79}$	$\frac{12}{13}$	${}^{12}\triangle^{5}_{13}$
3 : 2	$3^2+1^2=10$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$18^0\,26'\,5\,\frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	${}^{4}\triangle^{3}_{5}$
4 : 1	$4^2+3^2=25$	$\frac{3}{5}$	$36^0\,52'\,11\,\frac{9''}{14''}$	$\frac{24}{25}$	${}^{24}\triangle^{4}_{25}$
4 : 2	$4^2+2^2=20$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^0\,33'\,54\,\frac{76''}{425}$	$\frac{4}{3}$	${}^{4}\triangle^{2}_{5}$
4 : 3	$4^2+1^2=17$	$\sqrt{\frac{1}{17}}$	$14^0\,2'\,10\,\frac{405''}{842}$	$\frac{8}{17}$	${}^{15}\triangle^{8}_{12}$
5 : 1	$5^2+4^2=41$	$\frac{4}{\sqrt{41}}$	$38^0\,39'\,35\,\frac{80''}{263}$	$\frac{40}{41}$	${}^{40}\triangle^{9}_{41}$
5 : 2	$5^2+3^2=34$	$\frac{3}{\sqrt{34}}$	$30^0\,57'\,49\,\frac{61''}{117}$	$\frac{15}{17}$	${}^{15}\triangle^{8}_{17}$
5 : 3	$5^2+2^2=29$	$\frac{2}{\sqrt{29}}$	$21^0\,48'\,5\,\frac{20''}{263}$	$\frac{20}{29}$	${}^{21}\triangle^{20}_{29}$
5 : 4	$5^2+1^2=26$	$\sqrt{\frac{1}{26}}$	$11^0\,18'\,35\,\frac{795''}{1053}$	$\frac{5}{13}$	${}^{12}\triangle^{5}_{13}$

6 : 1	$3^2 + 5^2 = 61$	$\frac{5}{\sqrt{61}}$	$39^0\ 48'\ 20\ \frac{20''}{253}$	$\frac{60}{61}$	$^{60}\triangle^{11}_{61}$
6 : 2	$6^2 + 4^2 = 52$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$33^0\ 41'\ 24\ \frac{19''}{79}$	$\frac{12}{13}$	$^{12}\triangle^{5}_{13}$
6 : 3	$6^2 + 3^2 = 45$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^0\ 33'\ 54\ \frac{76''}{721}$	$\frac{4}{5}$	$^{4}\triangle^{3}_{5}$
6 : 4	$6^2 + 2^2 = 40$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$18^0\ 26'\ 5\ \frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	$^{4}\triangle^{3}_{5}$
6 : 5	$6^2 + 1^2 = 37$	$\sqrt{\frac{1}{37}}$	$9^0\ 27'\ 44\ \frac{151''}{421}$	$\frac{12}{47}$	$^{35}\triangle^{12}_{37}$
7 : 1	$7^2 + 6^2 = 85$	$\frac{6}{\sqrt{85}}$	$40^2\ 36'\ 4\ \frac{171''}{246}$	$\frac{84}{85}$	$^{82}\triangle^{13}_{86}$
7 : 2	$7^2 + 5^2 = 74$	$\frac{5}{\sqrt{74}}$	$35^0\ 32'\ 15\ \frac{38''}{59}$	$\frac{35}{37}$	$^{35}\triangle^{12}_{37}$
7 : 3	$7^2 + 4^2 = 65$	$\frac{4}{\sqrt{65}}$	$29^0\ 44'\ 41\ \frac{211''}{369}$	$\frac{56}{65}$	$^{56}\triangle^{33}_{65}$
7 : 4	$7^2 + 3^2 = 58$	$\frac{3}{\sqrt{58}}$	$23^0\ 11'\ 54\ \frac{456''}{491}$	$\frac{21}{29}$	$^{21}\triangle^{20}_{29}$
7 : 5	$7^2 + 2^2 = 53$	$\frac{2}{\sqrt{53}}$	$15^0\ 56'\ 43\ \frac{314''}{737}$	$\frac{28}{53}$	$^{45}\triangle^{28}_{53}$
7 : 6	$7^2 + 1 = 50$	$\sqrt{\frac{1}{50}}$	$8^0\ 7'\ 48\ \frac{274''}{737}$	$\frac{7}{25}$	$^{24}\triangle^{7}_{25}$
8 : 1	$8^2 + 7^2 = 113$	$\frac{7}{\sqrt{113}}$	$41^0\ 11'\ 9\ \frac{1''}{3}$	$\frac{112}{113}$	$^{112}\triangle^{15}_{113}$
8 : 2	$8^2 + 6^2 - 100$	$\frac{3}{5}$	$36^0\ 52'\ 11\ \frac{9''}{14}$	$\frac{24}{25}$	$^{24}\triangle^{7}_{25}$
8 : 3	$8^2 + 5^2 = 89$	$\frac{5}{\sqrt{89}}$	$32^0\ 0'\ 19\ \frac{127''}{331}$	$\frac{80}{89}$	$^{80}\triangle^{39}_{89}$
8 : 4	$8^2 + 4^2 = 80$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^0\ 33'\ 54\ \frac{76''}{421}$	$\frac{4}{5}$	$^{4}\triangle^{3}_{5}$

8 : 5	$8^2 + 3^2 =$	$73 \frac{3}{\sqrt{73}}$	$20^0\ 33'\ 21 \frac{433''}{562}$	$\frac{48}{73}$	${}^{55}\triangle^{48}_{73}$
8 : 6	$8^2 + 2^2 =$	$68 \frac{1}{\sqrt{17}}$	$14^0\ 2'\ 10 \frac{405''}{842}$	$\frac{8}{17}$	${}^{15}\triangle^{8}_{17}$
8 : 7	$8^2 + 1^2 =$	$65 \frac{1}{\sqrt{65}}$	$7^0\ 7'\ 30 \frac{25''}{421}$	$\frac{16}{75}$	${}^{63}\triangle^{16}_{65}$

(II)

$CB : EB = CE : ED$	AE^2	$\sin \eta_b$	η_b	$\sin 2\eta_b$	$\triangle$
6 : 3 = 2 : 1	4 . 10	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$18^0\ 26'\ 5 \frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	${}^{4}\triangle^{3}_{5}$
6 : 2 = 3 : 1	9 . 5	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^0\ 33'\ 54 \frac{76''}{421}$	$\frac{4}{5}$	${}^{4}\triangle^{3}_{5}$
15 : 10 = 3 : 2	9 . 26	$\sqrt{\frac{1}{26}}$	$11^0\ 18'\ 35 \frac{795''}{1053}$	$\frac{5}{13}$	${}^{12}\triangle^{5}_{13}$
20 : 15 = 12 : 3	16 . 34	$\frac{3}{\sqrt{34}}$	$30^0\ 57'\ 49 \frac{61''}{117}$	$\frac{15}{17}$	${}^{15}\triangle^{8}_{17}$
6 : 3 = 2 : 1	4 . 10	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$18^0\ 26'\ 5 \frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	${}^{4}\triangle^{3}_{5}$
28 : 21 = 4 : 3	16 . 50	$\sqrt{\frac{1}{50}}$	$8^0\ 7'\ 48 \frac{274''}{737}$	$\frac{7}{25}$	${}^{24}\triangle^{7}_{25}$
15 : 3 = 10 : 2	25 . 13	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$33^0\ 41'\ 24 \frac{19''}{79}$	$\frac{12}{13}$	${}^{12}\triangle^{6}_{13}$
35 : 14 = 15 : 6	25 . 58	$\frac{3}{\sqrt{58}}$	$23^0\ 11'\ 54 \frac{456''}{491}$	$\frac{21}{29}$	${}^{21}\triangle^{20}_{29}$
20 : 12 = 5 : 3	25 . 17	$\sqrt{\frac{1}{17}}$	$14^0\ 2'\ 10 \frac{405''}{842}$	$\frac{8}{17}$	${}^{15}\triangle^{8}_{17}$
45 : 36 = 5 : 4	25 . 82	$\sqrt{\frac{1}{82}}$	$6^0\ 20'\ 24 \frac{261''}{379}$	$\frac{9}{41}$	${}^{40}\triangle^{9}_{41}$
42 ; 7 = 30 : 5	36 . 74	$\frac{5}{\sqrt{74}}$	$35^0\ 32'\ 15 \frac{38''}{59}$	$\frac{35}{37}$	${}^{35}\triangle^{12}_{37}$

6 : 2 = 3 : 1	9 . 5	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	26° 33′ 54	$\frac{76''}{421}$	$\frac{4}{5}$	$^{4}\triangle^{3}_{5}$
6 : 3 = 2 : 1	4 . 10	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	18° 26′ 5	$\frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	$^{4}\triangle^{3}_{5}$
15 : 10 = 3 : 2	9 . 26	$\sqrt{\frac{1}{26}}$	11° 18′ 35	$\frac{795''}{1053}$	$\frac{5}{13}$	$^{12}\triangle^{5}_{13}$
66 : 55 = 6 : 5	36 . 122	$\sqrt{\frac{1}{122}}$	5° 11′ 29	$\frac{2187''}{2317}$	$\frac{11}{61}$	$^{60}\triangle^{11}_{61}$
28 : 4 = 21 : 3	49 . 25	$\frac{3}{5}$	36° 52′ 11	$\frac{9''}{14}$	$\frac{24}{25}$	$^{24}\triangle^{7}_{25}$
63 : 18 = 35 : 10	49 . 106	$\frac{5}{\sqrt{106}}$	29° 3′ 16	$\frac{211''}{379}$	$\frac{45}{53}$	$^{45}\triangle^{28}_{53}$
35 : 15 = 14 : 6	49 . 29	$\frac{2}{\sqrt{29}}$	21° 48′ 5	$\frac{20''}{263}$	$\frac{20}{29}$	$^{21}\triangle^{20}_{29}$
77 : 44 = 21 : 12	49 . 130	$\frac{3}{\sqrt{130}}$	15° 15′ 18	$\frac{167''}{386}$	$\frac{33}{65}$	$^{56}\triangle^{33}_{65}$
42 : 30 = 7 : 5	49 . 37	$\sqrt{\frac{1}{37}}$	9° 27′ 44	$\frac{151''}{421}$	$\frac{12}{37}$	$^{35}\triangle^{12}_{37}$
91 : 78 = 7 : 6	49 . 170	$\sqrt{\frac{1}{170}}$	4° 23′ 55	$\frac{930''}{2737}$	$\frac{13}{85}$	$^{84}\triangle^{13}_{85}$
72 : 9 = 56 : 7	64 . 130	$\frac{7}{\sqrt{130}}$	37° 52′ 29	$\frac{25''}{27}$	$\frac{63}{65}$	$^{53}\triangle^{16}_{65}$
20 : 5 = 12 : 3	16 . 34	$\frac{3}{\sqrt{34}}$	30° 57′ 49	$\frac{61''}{117}$	$\frac{15}{17}$	$^{15}\triangle^{8}_{17}$
88 : 33 = 40 : 15	64 . 146	$\frac{5}{\sqrt{146}}$	24° 26′ 38″	$\frac{111''}{463}$	$\frac{55}{73}$	$^{55}\triangle^{48}_{73}$
6 : 3 = 2 : 1	4 . 10	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	18° 26′ 5	$\frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	$^{4}\triangle^{3}_{5}$
104 : 65 = 24 : 15	64 . 178	$\frac{3}{\sqrt{178}}$	12° 59′ 40	$\frac{571''}{912}$	$\frac{39}{89}$	$^{80}\triangle^{39}_{89}$

$28:21 = 4:3 \quad 16 . 50 \sqrt{\frac{1}{50}} \quad 8^0 \; 7' \, 48 \quad \frac{274''}{737} \; \frac{7}{25} \quad {}^{24}\triangle^{7}_{25}$

$120:105 = 8:7 \quad 64 . 226 \sqrt{\frac{1}{226}} \quad 3^0 \; 48' \, 50 \quad \frac{2''}{3} \; \frac{15}{113} \quad {}^{112}\triangle^{15}_{113}$

Vergleicht man den Hypotenusenwinkel, den der einfachen Teiler $7:1$ oder $8:1$ oder $8:3$ oder allgemein $m:n$ mit demjenigen, welcher der harmonischen Teilung $7:6$ oder $8:7$ oder $8:5$ oder $m:m-n$ entspricht, so ergiebt sich, dass der eine Winkel das Complement zu dem andern ist, also dass die durch einfache Teilung gewonnenen Hypotenusenwinkel die Complemente sind beziehungsweise zu den Winkeln, die man durch die in der oben angegebenen Weise ausgeführten harmonischen Teilung erhält. Wird die Linie BC in der Weise wie in § 11. harmonisch geteilt, so findet die eben ausgesprochene Beziehung nicht statt.

Stellt man aus der Tabelle I. die dem einfachen Verhältnisse $n:1$ entsprechenden Dreieckszahlen der Reihe nach von $n=2$ bis $n=8$ untereinander, so erkennt man leicht das Bildungsgesetz, das diesen Reihen zu Grunde liegt. Ein anderes ergiebt sich aus den pythagoreischen Dreieckszahlen, die dem Verhältniss $2n:2n-1$ entsprechen. Zu den Verhältnissen $5:3$, $7:5$, $9:7$ u. s. w. gehören die Dreieckszahlen:

	b	c	a	
	20	21	29	
I.	28	45	53	
	36	77	85	u. s. w.

Die Reihen b, c, a stellen arithmetische Progressionen dar; die Differenz der Reihe b ist 8. Die Reihen c und a haben ein gemeinsames Bildungsgesetz. Die erste Differenz ist 24, die zweite $24+8$ und die dritte $32+8=40$ u. s. w. Für das Verhältniss $11:9$ erhält man demnach die Dreieckszahlen: 44, 117, 125,

§ 19.

Die Gesetze, auf welchem die Bildung der Reihen beruht, können durch drei Formeln dargestellt werden. Um diese zu ermitteln, geht man von den Gleichungen II. in § 6. aus und setzt $2mn=b$, $m^2-n^2=c$ und $m^2+n^2=a$. Es ergiebt sich die Gleichung:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

mithin stellen:

$$\text{I} \qquad \begin{aligned} b &= 2m \cdot n \\ c &= m^2 - n^2 \text{ die Katheten und} \\ a &= m^2 + n^2 \text{ die Hypotenuse dar.} \end{aligned}$$

Setzt man in I $m - n$ statt n, so erhält man die Gleichungen für die Katheten und die Hypotenuse, wie sie die in der Tabelle § 18 (I) angewandte Teilung verlangt. Also es ist:

$$\text{II} \qquad b = 2m(m - n)$$
$$\text{III} \qquad c = m^2 - (m - n)^2$$
$$\text{IV} \qquad a = m^2 + (m - n)^2$$

Sind m und n durch ganze Zahlen bestimmt, so ist zu m und n noch je eine veränderliche Grösse als Summand hinzuzufügen. Setzt man also $m + x$ für m und $n + y$ für n in II, III, IV ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & b = 2(m+x)(m-n+x-y) \text{ oder} \\ \text{IIb} \quad & \;\; = 2m(m-n) + 2\,[x(m-n) + (x-y)(m+x)]; \\ & c = (m+x)^2 - (m-n+x-y)^2 \text{ oder} \\ \text{IIIc} \quad & \;\; = m^2 - (m-n)^2 - [x(2m+x) - (x-y)\,(2(m-n)+x-y)], \\ & a = (m+x)^2 + (m-n+x-y)^2 \text{ oder} \\ \text{IVa} \quad & \;\; = m^2 + (m-n)^2 + [x(2m+x) + (x-y)(2(m-n)+x-y)]. \end{aligned}$$

Die Klammerausdrücke [] in den drei Gleichungen geben die Gesetze für die Reihenbildung. Da $m > n$ angenommen ist, so muss auch $x \overline{\gtrless} y$ sein; denn sonst könnte der Fall eintreten, dass, wenn $m + x = n + y$ würde, die Teilung der Linie BC nicht stattfände und somit die Reihe unterbrochen würde. Für x und y sind in steigender Aufeinanderfolge die Glieder einer arithmetischen Progression, die aus ganzen Zahlen besteht, zu setzen. Es soll angenommen werden, dass für x und y nur Glieder aus Progressionen erster Ordnung gesetzt werden. Hierbei werden vier Fälle unterschieden: 1) $x - y$ ist gleich null, 2) $x - y$ ist gleich einer constanten Zahl, 3) y ist gleich null und 4) die Zahlen $(x - y)$ bilden die Glieder einer arithmetischen Progression erster Ordnung.

1) Ist $x - y = 0$, so fällt in den drei Gleichungen das zweite Glied in den Klammerausdrücken [] fort. Das erste Glied in der Klammer [] IIIc ist identisch mit dem ersten Gliede in der Klammer [] IVa. Hieraus folgt, dass die Reihen c und a nach einem gemeinsamen Gesetze gebildet werden. Ferner ergiebt sich aus dem

ersten Gliede in den Klammern, dass c und a arithmetische Reihen zweiter Ordnung und b eine arithmetische Reihe erster Ordnung darstellen.

2) Dieselben Gesetze erhält man auch, wenn $x - y$ gleich einer constanten Zahl ist. Ein Beispiel zu dem ersten Falle liefert die Reihe I § 18, wo $m = 5$, $n = 3$, $x = 2, 4, 6$ und $y = 2, 4, 6 \ldots$ ist. Um ein Beispiel für den zweiten Fall zu haben, setze man m=2, $n = 1$, $x = 2, 3, 4 \ldots y = 1, 2, 3 \ldots$ Es ist:

b	c	a	
16	12	20	
20	21	29	
24	32	40	
28	45	53	u. s. w.

Bildet man die Differenzen-Reihen zu b, c und a, so erhält man für b:

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4, \text{ und für } c \text{ und } a$$
$$9 \quad 11 \quad 13 \quad 15$$
$$2 \quad 2 \quad 2$$

3) Ist $y = 0$, so geben die Klammerausdrücke

Vb $2[x(m - n) + xm + x^2] = 2(2mx - xv + x^2)$

eine Reihe zweiter Ordnung,

VIc $2mx + x^2 - 2(m - n)x - y^2 = 2mx - 2(m - n)x$

eine Reihe erster Ordnung,

VIIa $2mx + x^2 + 2(m - n)x + x^2 = 2(2mx - nx + x^2)$

eine Reihe zweiter Ordnung. Aus VIIa und Vb folgt, dass die aus ihnen gebildeten Reihen einem gemeinsamen Gesetze zu Grunde liegen.

Ein Beispiel hierzu geben die Verhältnisse 2:1, 3:1, 4:1 u. s. w. (Siehe Tabelle § 18 (I)). Ein anderes Beispiel ist: $m = 5$, $n = 3$, $x = 2, 5, 8$ und $y = 0$, also:

b	c	a
56	33	65
140	51	149
260	69	269
416	87	425

a)	65	149	269	425
1. Diff.-R.	84	120	156	
2. Diff.-R.	36		36	
b)	56	140	260	416
1. Diff.-R.	84	125	156	
2. Diff.-R.	36		36	
c)	33	51	69	87
1. Diff.-R.	18	18	18	

4) Bildet $x-y$ eine arithmetische Reihe erster Ordnung, so geben IIb, IIIc, IVa Reihen, von denen eine jede auf einem besonderen Bildungsgesetz beruht. Die Producte $x \cdot x$, $(x-y)(x-y)$ und $x(x-y)$ deuten an, dass die Reihen arithmetische Progressionen zweiter Ordnung sind.

Beispiel: $m = 2$, $n = 1$, $x = 4, 6, 8, 10 \ldots$ und $y = 1, 2, 3, 4 \ldots$

b	c	a
48	20	52
80	39	89
120	64	136
168	95	193

a)	52	89	136	193
1. Diff.-R.	37	47	57	
2. Diff.-R.	10		10	
b)	48	80	120	168
1. Diff.-R.	32	40	48	
2. Diff.-R.	8		8	
c)	29	39	64	95
1. Diff.-R.	19	25	31	
2. Diff.-R.	6		6	

Bezeichnet man die Glieder der zweiten Differenzen-Reihe von a mit $\triangle^2(a)$, von b mit $\triangle^2(b)$ und von c mit $\triangle^2(c)$, so ergiebt sich:

VIII $$(\triangle^2(a))^2 = (\triangle^2(b))^2 + (\triangle^2(c))^2$$

Noch ein zweites Beispiel soll dieses Gesetz bestätigen: $m = 2$, $n = 1$, $x = 3, 7, 11, 15 \ldots y = 1, 2, 4$

b	*c*	*a*
30	16	34
108	45	117
234	88	250
408	145	433

a)	34	117	250	433
1. Diff.-R.	83	133	183	
2. Diff.-R.	50	50		
b)	30	108	234	408
1. Diff.-R.	78	126	174	
2. Diff.-R.	48	48		
c)	16	45	88	145
1. Diff.-R.	29	43	57	
2. Diff.-R.	14	14		

$$50^2 = 48^2 + 14^2$$

Also ergiebt sich wieder aus den zweiten Differenzen die Gleichung VIII. Hieraus folgt der Satz:

Stellt $(x-y)$ eine arithmetische Reihe erster Ordnung dar, so ist

$$(\triangle^2(a))^2 = (\triangle^2(b))^2 + (\triangle^2(c))^2$$

Werden für x und y der Reihe nach die Glieder einer arithmetischen Progression höherer Ordnung eingesetzt, so erhält man ganz analoge Gesetze für die Reihenbildung wie oben. Zwei Beispiele mögen dies bestätigen. 1($x = 1, 4, 9, 16, 25$) stellt eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung dar, $m = 2$, $n = 1$. Die Gleichungen IIa, IIIc, IVb geben folgende Reihen:

b	*c*	*a*
12	5	13
60	11	61
220	21	221
612	35	613
1404	53	1405
2812	75	2813

a)	13	61	221	613	1405	2813
1. Diff.-R.	48	160	392	792	1408	
2. Diff.-R.	112	232	400	616		
3. Diff.-R.	120	168	216			
4. Diff.-R.	48	48				

Die gleichen Differenz-Reihen ergeben sich auch für b.

c)	5	11	21	35	53	75
1, Diff.-R.	6	10	14	18	22	
2. Diff.-R.	4	4	4	4		

Dieses Beispiel entspricht dem früheren dritten Falle.

Für x und y werden Glieder arithmetischer Reihen zweiter Ordnung eingesetzt, z. B. $x = 1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots$, $y = 0, 1, 5, 12, 22, 35 \ldots$ $x - y$ ist dann

1	3	4	4	3	1
2	1	0	—1	—2	
—1	—1	—1	—1		

eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung. Es ergiebt sich für $m = 2$, $n = 1$:

b	c	a
12	5	13
48	20	52
110	96	146
180	299	349
216	713	745
152	1440	1448

a)	13	52	146	349	745	1448
1. Diff.-R.	39	94	203	396	703	
2. Diff.-R.	55	109	193	307		
3. Diff.-R.	54	84	114			
4. Diff.-R.	30	30				

b)	12	48	110	180	216	152
1. Diff.-R.	36	62	70	36	—64	
2. Diff.-R	26	8	—34	—100		
3. Diff.-R.	—18	—42	—66			
4. Diff.-R.	—24	—24				

c)	5	20	96	299	713	1440
1. Diff.-R.	15	76	203	414	727	
2. Diff.-R.	61	127	211	313		
3. Diff.-R.	66	84	102			
4. Diff.-R.	18	18				

Aus den constanten vierten Differenzen-Reihen ergiebt sich die Gleichung:

$$30^2 = 24^2 + 18^2$$

also ist

$$(\triangle^4(a))^2)^2 = (\triangle^4(b))^2 + (\triangle^4(c))^2$$

Dies ist ein Beispiel zum früheren vierten Falle, wenn die Werte von $(x-y)$ eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung geben. Aus diesem und jenen andern Beispielen zum vierten Falle lässt sich der allgemeine Satz ableiten:

Bilden die Werte von $(x-y)$ in den Gleichungen IIb, IIIc, IVa eine arithmetische Progression $n$ter Ordnung, so sind die Reihen a, b, c arithmetische Progressionen $2n$ter Ordnung. Das Quadrat der constanten $2n$ten Differenz der Reihe a ist gleich der Summe der Quadrate der constanten $2n$ten Differenzen der Reihen b und c, also

$$(\triangle^{2n}(a))^2 = (\triangle^{2n}(b))^2 + (\triangle^{2n}(c))^2$$

wo $\triangle^{2n}(a)$, $\triangle^{2n}(b)$,' $\triangle^{2n}(c)$ die constanten $2n$ten Differenzen der drei Reihen a, b, c bezeichnen.

§ 20.

Bildet man die Summe aus drei pythagoreischen Dreieckszahlen, so giebt diese die Kathete eines andern pythagoreischen Dreiecks. Z. B. ${}^4\underset{5}{\triangle}{}^3$, $5+4+3=12$ oder ${}^{12}\underset{13}{\triangle}{}^5$, $12+13+5=30$ oder $30+34+16=80$ oder ${}^{80}\underset{89}{\triangle}{}^{39}$, $80+89+39=208$ u. s. w. Addirt man die Gleichungen I § 19, so ist:

$$a+b+c = 2m^2+2m \, . \, n = 2m(m+n)$$

die Kathete eines pythagoreischen Dreiecks. Um die andern Dreieckszahlen dieses Dreiecks zu finden, setzt man

$$(2m \, . \, (m+n))^2 = x^2 - y^2$$

wo x die Hypotenuse und y die andere Kathete bezeichnet. Es ist dann

$$2m^2 \, . \, 2(m+n)^2 = (x+y)(x-y)$$

Man setze

$$x + y = 2(m+n)^2, \quad x - y = 2m^2$$

woraus sich durch Addition und Subtraction ergiebt

$$x = (m+n)^2 + m^2$$
$$y = (m+n)^2 - m^2$$

Beispiel: $m = 4$, $n = 1$. Es ist $a = 17$, $b = 8$, $c = 15$, also

$$a + b + c = 40$$
$$x = 5^2 + 4^2 = 41$$
$$y = 5^2 - 4^2 = 9$$

Es ergiebt sich der Satz:

Die Summe der drei pythagoreischen Zahlen giebt die Kathete eines andern pythagoreischen Dreiecks.

Sucht man zu $b+c+a$ aus den Reihen b, c, a die beiden andern Dreieckszahlen, so geben diese wieder Reihen b', c', a', die denselben Gesetzen zu Grunde liegen wie die Reihen b, c, a. Als Beispiel dienen die Reihen (Seite 384 A.)

$b + c + a$	b'	c'	a'
48 + 20 + 52 =	120	64	136
80 + 39 + 89 =	208	105	233
120 + 136 + 64 =	320	156	356
		$a_{\prime}$	c'
163 + 95 + 143 =	456	505	217

a′)	136		233		356		505
1. Diff.-R.		97		123		149	
2. Diff.-R.			26		26		
b′)	120		208		320		456
1. Diff.-R.		88		112		136	
2. Diff.-R.			24		24		
c′)	64		105		156		217
1. Diff.-R.		41		51		61	
2. Diff.-R.			10		10		

$26^2 = 24^2 + 10^2$ oder $(\triangle^2(a')^2 = (\triangle^2(b'))^2 + (\triangle^2(c^{2\prime}(c)^2$

Man erhält die Reihen b', c', a' unmittelbar aus den Gleichungen IIb, IIIc, IVa § 19, wenn $m = 2$, $n = 1$ und $x = 8, 11, 14, 17, \ldots$, $y = 3, 4, 5, 6 \ldots$ ist.

§ 21.

Eine Anwendung von den in der Tabelle Seite 377 berechneten pythagoreischen Hypotenusenwinkeln auf die Teilung der Kreisperipherie soll den Schluss dieser Untersuchungen bilden. Da auf der Construction der Centriwinkel des regulären 25- und 9-Ecks die Construction des 7-, 11-, 13-Ecks und so weiter beruht, so soll jene zunächst angegeben werden.

1) Der Centriwinkel vom regulären 25-Eck ist

$$\xi_{25} = 14^0\, 24'$$

Die Construction von ξ_{25} beruht auf der Construction von

a. $$\gamma\frac{4}{5} = 53^0\, 7'\, 48\frac{152''}{431}$$

Es ist:

$$2\gamma\frac{4}{5} = 106^0\, 15'\, 36\frac{304''}{421}$$

$$2\gamma\frac{4}{5} - 90^0 = 16^0\, 15'\, 36\frac{304''}{421}$$

$$5\left(2\gamma\frac{4}{5} - 90^0\right) \equiv 81^0\, 18' + 5\delta, \text{ wo } \delta = \frac{304''}{421''} \text{ ist,}$$

$$2\xi_{25} = 28^0\, 48'$$

$$5\left(2\gamma\frac{4}{5} - 90^0\right) - 2\xi_{25} = 52^0\, 30' + 5\delta = 2\psi + 5\delta$$

$\psi = 4{,}^0 + 7^0\, 30'$ ist bekannt; denn 45^0 ist der Centriwinkel vom regulären 8-Eck und $7^0\, 30'$ der Centriwinkel vom regulären 48-Eck; beide sind construirbar. Nun ist

I $$5\left(2\gamma\frac{4}{5} - 90^0\right) - 2\psi = 2\xi_{25} + 5\delta = 2\xi_{125}^{\mathrm{I}}$$

hieraus folgt

$$2(\xi_{25}^{\mathrm{I}} - \xi_{25}) = 5\delta$$

oder

$$\xi_{25}^{\mathrm{I}} - \xi_{25} = \frac{5}{2}\delta = 1\frac{339''}{420}$$

Die Abweichung vom wahren Werte beträgt also $1\frac{330''}{421}$; dies macht für $25(\xi_{25}{}^{I} - \xi_{25}) = 45''$. $\xi_{25}{}^{I}$ lässt sich construiren aus ψ und $\gamma\frac{4}{5}$,

Eine andere Construction erhält man durch

b. $$\beta\frac{5}{13} = 22^0\ 37'\ 11,5''$$

Es ist

$$5\beta\frac{5}{13} = 113^0\ 6' - 5\delta_1, \text{ wo } \delta_1 = \tfrac{1}{8}'' \text{ ist,}$$

II $$\begin{array}{r} 4\xi_{25} = 57^0\ 36' \\ \hline 5\beta\frac{5}{13} - 4\xi_{25} = 55^0\ 30' - 5\delta_1 = \psi_1 - 5\delta_1 \end{array}$$

Da ψ_1 aus $48^0 + 7^0\ 30'$ zu construiren ist, so ist auch $\xi_{25}{}^{II}$ aus $\beta\frac{5}{13}$ und ψ_1 bestimmt. Aus II folgt:

III $$5\beta\frac{5}{13} - \beta_1 = 4\xi_{25} - 5\delta_1 = 4\xi_{25}{}^{II} \quad \text{oder}$$

$$4(\xi_{25} - \xi_{25}{}^{II}) = \frac{4\delta_1}{4} = \frac{5''}{8}.$$

Die Abweichung vom wahren Werte beträgt $2\beta_1$. Um eine noch geringere Abweichung zu erhalten, addire man folgende aus I und III sich ergebenden Winkel:

$$\begin{array}{r} \xi_{25}{}^{I} = 14^0\ 24' + 1\frac{339''}{421} \\ 3\xi_{25}{}^{II} = 43^0\ 12' - 1\frac{7''}{3} \\ \hline \xi_{25} + 3\xi_{25}{}^{II} = 57^0\ 36' + \frac{7''}{100} \end{array}$$

und dividire mit 4, dann ist

$$\tfrac{1}{4}(\xi_{25}{}^{I} + 3\xi_{25}{}^{II}) = \xi_{25}{}^{III} = 44^0\ 24' + \frac{7''}{400}$$

Die Abweichung vom wahren Werte ist für $25\xi_{25}{}^{III}$ nur 0, 40″.

2) Der Centriwinkel für das 9-Eck ist

$$\xi_9 = 40^0$$

Es ist

$$\beta\frac{11}{61} = 10^0\ 23'\ 19{,}88''$$

$$18\beta\frac{11}{61} = 187^0 - 18\delta,\ \text{wo}\ \delta = 0{,}12''\ \text{ist}$$

$$\frac{4\xi_9 = 160^0}{18\beta\frac{11}{61} - 4\xi_9 = 27^0 - 18\delta}$$

Da der Winkel von 27⁰ construirbar ist, so ist auch ξ_9^I aus $\beta\frac{11}{61}$ und 27⁰ zu construiren. Es ist

$$\xi_9^I = 40^0 - \frac{9}{2}\delta = 40^0 - 0{,}54''$$

also ist die Abweichung vom wahren Wert:

$$\xi_9 - \xi_9^I = 0{,}54''$$

Der Centriwinkel $\xi_{45} = 8^0$ lässt sich unmittelbar aus $2\xi_9^I - 72^0 = 8^0 - 9\delta$ bestimmen; einen noch genaueren Wert aber erhält man aus

$$18\gamma\frac{11''}{61} = 187^0 - 18\delta - 64^0 = 123^0 - 18\delta$$

Da Wkl. 130⁰ sich aus den Winkeln 90⁰, 18⁰, 15⁰ construiren lässt, so ist auch ξ_{45} construirbar. Es ist

$$8\gamma_{45}^I = 64^0 - 18\delta$$

also ist

$$\xi_{45}^I = 8^0 - \frac{9}{4}\delta = 8^0 - 0{,}27''$$

Die Abweichung beträgt demnach

$$\xi_{45} - \xi_{45}^I = \frac{9}{4}\delta = 0{,}27''$$

3) Für das reguläre 7-Eck ist

$$\xi_7 = 51^0\ 25'\ 42\frac{6''}{7}$$

a) Benutzt man als Constructionswinkel

$$\beta\frac{9}{41} = 12^0 40' 49{,}38''$$

so ist

$$4\left(4\beta\,\frac{9}{41} + \xi_7 - 90^0\right) = 48^0\,36' + 1{,}52''$$

Nun ist nach II

$$\xi_{25}{}^{II} = 14^0\,24' - 0{,}62''$$

also ist

IV
$$4\left(4\beta\,\frac{9}{41} + \xi_7 - 90^0\right) + \xi_{25}{}^{II} = 63^6 + 0{,}9''$$

Der Winkel von 63^0 lässt sich construiren aus $45^0 + 18^0$. Um die Abweichung vom wahren Werte zu bestimmen, löst man IV inbezug auf ξ_7 auf. Es ist

$$63^0 - \xi_{25}{}^{II} = 48^0\,36' + 0{,}62'' = 4\left(4\beta\,\frac{9}{41} + \xi_7 - 90^0\right)$$

hieraus folgt

$$12^0\,9' + 0{,}15'' = 4\beta\,\frac{9}{41} + \xi_7 - 90^0$$

und endlich

$$\xi_7{}^I = 102^0\,9' + 0{,}15'' - 4\beta\,\frac{9}{41}$$

Nun ist

$$4\beta\,\frac{9}{41} = 50^0\,43'\,17{,}52''$$

also ist

$$\xi_7{}^I = 51^0\,25'\,42{,}63''$$

Die Abweichung ist $\xi_7 - \xi_7{}^I = 0{,}23''$.

b) Eine ziemlich genaue Lösung der Siebenteilung erhält man auch auf folgende Weise. Man teilt den Schenkel BC im gleichschenkligen Dreieck ABC (Fig. 6) zunächst in drei gleiche Teile

$$CD = DE = EB$$

und verbindet A mit D, dann ist

$$\text{Wkl. } DAB = \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{4}{5} = 26^0\,33'\,54\frac{76''}{421}$$

Nun teilt man CD in 10 gleiche Teile und macht

$$DF = \frac{1}{10}\,CD$$

dann ist

$$CF = CD + \frac{1}{10}\,CO = CD\,\frac{10}{11} \quad \text{und}$$

$$\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CF}^2 = 9\,\overline{CD} + \frac{121}{100}\,\overline{CD}^2 = \frac{1021}{100}\,\overline{CD}^2$$

also ist

$$AF = \frac{CD}{10}\sqrt{1021}$$

Ferner ist nach dem Sinussatze:

$$AF : FB = \sin B + \sin FAB$$

Nun ist

$$\sin \text{Wkl. } B = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$FB = DB - DF = 2CD - \frac{1}{10}CD = \frac{19}{10}CD$$

$$AF = \frac{CD}{10}\sqrt{1021}$$

also ist:

$$\frac{CD}{10}\sqrt{1021} : \frac{19}{10}CD = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sin FAB$$

und hieraus

$$\sin FAB = \frac{19\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{1021}} = \frac{Z}{N}$$

$$\log 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1$$
$$\log \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}8494850 - 1$$
$$\log 19 = 1{,}2787396$$

$$\log Z = 0{,}1282386$$
$$\log 1021 = 3{,}0090257$$
$$\log \sqrt{1021} = 1{,}50451285$$

$$\log \frac{Z}{N} = 0{,}62372575 - 1 = \log \sin FAB$$
$$FAB = 24^0\ 51'\ 49.308''$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma\frac{4}{5} = 26^0\ 33'\ 54{,}181''$$

$$\text{Wkl. } FAB + \tfrac{1}{2}\gamma\frac{4}{5} = 51^0\ 25'\ 43{,}489'' = \xi_7''$$
$$\xi = 51^0\ 25'\ 42{,}857$$

$$\xi_7'' - \xi_7 = \frac{632''}{1000}$$

c) Eine sehr genaue Lösung der Siebenteilung geben folgende **Winkel**

$$\tfrac{1}{2}\beta\,{}^{16}_{65} = 7^0\ 7'\ 30{,}059''$$
$$\gamma_5^{10} = 81^0\ 18'\ 3{,}667''$$
$$\tfrac{1}{2}\beta^7{}_{25} = 8^0\ 7'\ 48{,}370''$$

$$2\beta = 177^0\ 51'\ 25{,}763''$$
$$2\beta - 75^0 = 102^0\ 51'\ 25{,}763 = 2\xi_7^{III}$$

$$\xi_7^{9II} = 51^0\ 25'\ 42{,}58''$$
$$\xi_7^{III} - \xi_7 = 0{,}024''$$

d) Kommt es auf grosse Genauigkeit nicht an, so genügt die Construction des Winkels

$$\tfrac{1}{2}\gamma\,{}^3_5 + 33^0 = 51''\ 26'\ 5\,\frac{515''}{631}$$

Die Abweichung beträgt ungefähr 23''.

4) Für das reguläre 11-Eck ist:

$$\xi_{11} = 32^0\ 43'\ 38\frac{2''}{11}$$

Addirt man

$$\beta\,{}^7_{25} = 16^0\ 15'\ 36\,\frac{55''}{74}$$

so ist

$$\xi_{11} + \beta\,{}^7_{25} = 48^0\ 59'\ 15'' - \delta, \text{ wo } \delta = 0{,}08'' \text{ ist.}$$

Es ist

$$2\left[4\left(\xi_{11} + \beta\,{}^7_{25}\right) - 180^0\right] = 31^0\ 54' - 8\delta$$

zieht man hiervon

$$\xi_{25} = 14^0\ 24'_{1}$$

ab und multiplicirt mit 4, so ist:

$$4\left[2\left[4\left(\xi_{11} + \beta\,{}^7_{25}\right) - 180^0\right] - \xi_{25}\right] = 70^0$$

Dieser Winkel ist zu construiren aus $30^0 + \xi_9$; damit ist auch ξ_{111} gefunden, denn

$$30^0 + \xi_9{}^1 = 70^0 - 0{,}54''$$

$$2\left[4\left(\xi_{11} + \beta\,{}^7_{25}\right) - 180^0\right] = 17^0\ 30' - 0{,}135'' + \xi_{25}{}^I$$
$$\xi_{25}{}^I = 14^0\ 24' + 1{,}805''$$

$$2\left[4\left(\xi_{11}+\beta\frac{7}{25}\right)-180^0\right] = 31^0\,54'+0{,}67''$$

$$4\left(\xi_{11}+\beta\frac{7}{25}\right)-180^0 = 15^0\,57'+0{,}835''$$

$$4\left(\xi_{11}+\beta\frac{7}{25}\right) = 195^0\,57'+0{,}835''$$

$$\xi_{11}+\beta\frac{7}{25} = 48^0\,59'\,14{,}209''$$

$$\beta\frac{7}{25} = 16^0\,15'\,36{,}743''$$

$$\xi_{11}{}^{9} = 32^0\,43'\,38{,}463''$$

$$\xi_{11} = 32^0\,43'\,38{,}182''$$

$$\xi_{11}{}^{I}-\xi_{11} = 0{,}281''$$

Wählt man für $\xi_{25}{}^{I}$ als Constructionswinkel $\xi_{25}{}^{III}$, so beträgt die Abweichung nur 0,06″.

b) ein ziemlich genauer Wert für ξ_{11} ergiebt sich aus

$$\tfrac{1}{2}\gamma\frac{84}{85}+\tfrac{1}{2}\beta\frac{16}{65} = \tfrac{1}{2}\gamma\frac{12}{13}+\tfrac{1}{2}\beta\frac{8}{17} = 47^0\,43'\,34{,}721 \quad \text{(vgl. § 9.)}$$

vermindert um 14⁰. Die Abweichung beträgt 3,461″.

c) Eine dritte Lösung geben die Winkel

$$\beta_5{}^{9}\ \text{(vgl. § 3.)} = 28^0\,10'\,15\tfrac{1}{3}''\quad\text{und}$$

$$\tfrac{1}{2}\gamma\frac{48}{73} = 20^0\,33'\,21\frac{433''}{562}$$

Addirt man diese beiden Winkel und subtrahirt

$$2\xi_{45}{}^{I} = 16^0-0{,}54''$$

so erhält man

$$\xi_{11}{}^{II} = 32^0\,43'\,37{,}64''$$

Die Abweichung beträgt $\frac{1}{2}$″.

5) Für das reguläre 13-Eck ist

$$\xi_{13} = 27^0\,41'\,32\frac{4''}{13}$$

a) Wählt man als Constructionswinkel

$$\gamma\frac{20}{29} = 43^0\,36'\,10\frac{1''}{7}$$

so erhält man aus

$$3\gamma\,\frac{20}{29} + \xi_{13} = 158^0\,30' + \delta$$

einen Winkel, der zu construiren ist aus 120^0, $22^0\,30'$ und $2\xi_{45}$. Ist

$$2\xi_{45}{}^{I} = 16^0 - 0{,}54''$$

so ergiebt sich

$$3\gamma\,\frac{20}{29} + \xi_{13} = 158^0\,30 - 0{,}54'' \quad \text{und}$$

$$3\gamma\,\frac{20}{29} = 13^0\,48'\,30{,}43''$$

durch Subtraction

$$\xi_{13}{}^{I}\ 27^0\,41'\,29''$$

Die Abweichung vom wahren Wert beträgt $4\,\frac{4''}{13}$.

b) Eine andere Lösung giebt

$$\tfrac{1}{2}\beta_5{}^3 \text{ (conf. § 4.)} = 10^0\,18'\,17\,\frac{64}{1538}$$

V. Man erhält

$$8[4(\xi_{13} - \tfrac{1}{2}\beta_5{}^{39} - 60^0] = 76^0\,24' + \delta$$

Dieser Winkel lässt sich construiren aus 30^0, $\xi_{25}{}^{I}$ und $4\xi_{45}{}^{I}$. Es ist

$$30^0 + \xi_{25}{}^{I} + 4\xi_{45}{}^{1} = 76^0\,24' + 0{,}725'' \quad \text{und aus V.}$$

$$4(\xi_{13} - \tfrac{1}{2}\beta_5{}^3) - 60^0 = 9^0\,23' + 0{,}09''$$

$$\xi_{13} - \tfrac{1}{2}\beta_5{}^3 = 17^0\,23'\,15{,}0225''$$

$$\tfrac{1}{2}\beta_5{}^3 = 10^0\,18'\,17{,}405''$$

$$\xi_{13}{}^{II} = 27^0\,41'\,32{,}4275''$$

$$\xi_{13} = 27^0\,41'\,32{,}3077''$$

$$\xi_{13}{}^{91} - \xi_{13} = 0{,}1198''$$

c) Weniger genau ist der Wert für $\xi_{13}{}^{III}$, welchen man aus

$$\gamma\,\frac{12}{13} - 6^0 = 27^0\,41'\,24\,\frac{19''}{74} \quad \text{erhält.}$$

d) Auch § 4. liefert eine Lösung. Es ist

$$\beta_5{}^9 + \beta_5{}^4 = \beta_5{}^5 + 2\beta_5{}^9 = 60^0\,41'\,28{,}7'', \quad \text{also ist}$$

$$\beta_5{}^9 + \beta_5{}^4 - 33^0 = 27^0\,41'\,28\,7_{\prime\prime} = \xi^{IV}$$

$$\xi_{13} - \xi_{13}{}^{IV} = 3{,}6''$$

6) Für das reguläre 19-Eck ist

$$\xi_{19} = 18^0\,56'\,50\frac{10''}{19}$$

a) Als Constructionswinkel wählt man

$$\tfrac{1}{2}\beta\,\frac{39}{89} = 12^0\,59'\,40\frac{59''}{547}$$

$$\tfrac{1}{2}\beta\,\frac{34}{84} = 12^0\,59'\,40\frac{204}{331}.$$ Es ist dann

$$4\left(\xi_{19} - \tfrac{1}{2}\beta\,\frac{39}{89}\right) = 49^0\,48' + \delta.$$ Hiervon zieht man ab

$$2\xi_{25}{}^{I} = 28^0\,48^0 + 3{,}6'';$$ also ist

$$4\left(\xi_{19} - \tfrac{1}{2}\beta\,\frac{39}{89}\right) - 2\xi_{25}{}^{I} = 21^0$$

Nun ist $\xi_{19}{}^{I}$ zu construiren. Die Abweichung von $\xi_{19}{}^{I}$ beträgt $\frac{7''}{10}$.

b) Sehr gering ist auch die Abweichung bei der Construction aus

$$\beta\,\frac{8}{17} = 28^0\;\;4'\,20{,}956''$$

$$+\tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{63}{65} = 37^0\,52'\,29{,}926''$$

$$+\tfrac{1}{2}\beta\,\frac{8}{17} = 14^0\;\;2'\,10{,}478''$$

$$+\quad \beta_5{}^7 = 11^0\,54'\,38{,}666''$$

$$\psi = 91^0\,53'\,40{,}026''$$

Hiervon zieht man ab

$$2\xi_{19} = 37^0\,53'\,41{,}053''$$

$$\psi - 2\xi_{18} = 54^0 - \delta : \psi - 2\xi_{19}$$

lässt sich construiren. Die Abweichung beträgt $\frac{1}{2}''$.

c) Aus der Construction von

$$(30^0 + \beta\,\frac{28}{53} - \xi_{19}) - 27^0 - \delta$$

erhält man ξ_{14} mit einer Abweichung von circa 7″.

7) Für das reguläre 21-Eck ist

$$\xi_{21} = 17^0\, 8'\, 34\frac{2''}{7}$$

a) Aus dem Centriwinkel des regulären 7- und 3-Eck läss ξ_{21} berechnen. Man stelle die Diophantische Gleichung auf:

$$\frac{y \cdot P}{3} - \frac{x \cdot P}{7} = \frac{P}{21}$$

wo P die Peripherie des Kreises bedeutet. Es ist

$$7y - 3x = 1$$

hieraus folgt:

$$7y \equiv 1 \pmod{3}$$

ferner ist

$$6y \equiv 0 \pmod{3}$$

$$y \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{d. h.}$$
$$x = 1 + 3n$$

Für $n = 0$ ist $y = 1$ und $x = 2$; also ist

$$\frac{P}{3} - \frac{2P}{7} = \frac{P}{21}$$

b) Ein ziemlich genaues Resultat erhält man aus:

$$90^0 + \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{55}{73} = 114^0\, 26'\, 38{,}24''$$
$$-\gamma_5^{10} = 81^0\, 18'\, 3{,}67''$$

$$90 + \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{55}{73} - \gamma_5^{10} - \xi_{21} = 33^0\, 8'\, 34{,}57'' - \xi_{21}$$
$$= 16^0 + 0{,}28'' = 2\xi_{45}^{I} + 0{,}82^{IV}$$

Die Abweichung vom wahren Wert beträgt 0,82''.

8) Für das reguläre 23-Eck ist

$$\xi_{23} = 15^0\, 39'\, 7\frac{19''}{23}$$

Man addire·

$$\tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{12}{13} = -\, 33^0\, 41'\, 24{,}24''$$

$$-\tfrac{1}{2}\beta\,\frac{8}{17} = -14^0\, 2'\, 16{,}48''$$

und subtrahire

$$\xi_{23} = 15^0\ 39'\ 7{,}83''$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\gamma\frac{12}{13} - \beta\frac{8}{17}\right) - \xi_{23} = 4^0 - 0{,}07'' = \tfrac{1}{2}\xi_{45}{}^0 + 0{,}06''$$

Die Abweichung beträgt 0,06″.

9) Für das reguläre 29-Eck ist

$$\xi_{29} = 12^0\ 24'\ 49\frac{19''}{29}$$

Der Constructionswinkel ist

$$\beta\frac{20}{29} = 43^0\ 36'\ 10{,}152''$$

Man addire:

$$4\beta\frac{29}{29} = 174^0\ 24'\ 40{,}608''$$

$$\xi_{29} = 12^0\ 24'\ 49{,}655''$$

$$4\beta\frac{20}{29} + \xi_{29} = 186^0\ 49'\ 30{,}263''$$

Nun ist

$$4(4\beta\frac{20}{29} + \xi_{29} - 180^0) = 27^0\ 18' + \delta$$

$$3\xi_{25}{}^{II} = 43^0\ 12' - 1{,}875''$$

$$4(4\beta\frac{20}{29} + \xi_{29} = 180^0) + 3\xi_{25}{}^{II} = 70^0\ 30' - 0{,}823'' = 48^0 + 22^0\ 30' + \delta$$

Die Abweichung ist $\xi_{29}{}^{I} - \xi_{29} = 0{,}206''$.

9a) Für das reguläre 31-Eck ist

$$\xi_{31} = 11^0\ 36'\ 46\frac{14''}{31}$$

a) Nimmt man zum Constructionswinkel $\beta\frac{12}{37}$, so erhält man

$$3\beta\frac{12}{37} + 2\xi_{31} = 80^0 - \delta = 2\xi^{I}{}_9; \quad \text{also ist}$$

$$\xi_{31}{}^{I} = \xi_9{}^{I} - \frac{3}{2}\beta\frac{12}{37}$$

b) Berechnet man $\beta_5{}^3 + \tfrac{1}{4}\gamma\frac{80}{89} - (9^0 + \tfrac{1}{2}\xi_{45}{}^{I})$, so ergiebt sich für eine Abweichung von $\tfrac{3}{4}''$.

10) Für das reguläre 37-Eck ist

$$\xi_{37} = 9^0\,43'\,48\,\frac{1''}{37}$$

Man addire:

$$3\beta\,\frac{12}{37} = 56^0\,46'\,26{,}05''$$

$$16\xi_{37} = 155^0\,40'\,32\,\frac{16''}{37}$$

und subtrahire 180⁰; es ist

$$3\beta\,\frac{12}{37} + 16\xi_{37} - 180^0 = 32^0\,27' - \delta = 2\beta$$

mithin ist

$$4\psi = 129^0\,48' - 4\delta$$

$$2\xi_{25}{}^{\mathrm{I}} - 28^0\,48' - 3\tfrac{1}{4}''$$

$$4\psi - 2\xi_{25}{}^{\mathrm{I}} = 101^0 = 2\xi_9{}^{\mathrm{I}} + 21^0$$

Es ist

$$2\xi_9{}^{\mathrm{I}} = 80^0 - 1{,}08''; \text{ also ist}$$

$$\tfrac{1}{2}(2\xi_9{}^{\mathrm{I}} + 21^0 = 50^0\,30' - 0{,}54'') \text{ und}$$

$$\xi_9{}^{\mathrm{I}} + \frac{21^0}{2} + \xi_{25}{}^{\mathrm{I}} = 64^0\,51' - 2{,}415''$$

$$\left(\xi_9{}^{\mathrm{I}} + \frac{21}{2} + .\xi_{25}{}^{\mathrm{I}}\right)\tfrac{1}{2} + 180^0 = 212^0\,27' - 1{,}2075''$$

hiervon subtrahire man

$$3\beta\,\frac{12}{37} = 56^0\,46'\,24{,}05''$$

$$16\xi_{37}{}^{\mathrm{I}} = 155^0\,40'\,32{,}74'', \text{ also ist}$$

$$\xi_{37}{}^{\mathrm{I}} = 9^0\,43'\,47{,}05''$$

Die Abweichung vom wahren Werte beträgt 0,02″.

Sehr gering ist auch die Abweichung für

$$\xi_{37}{}^{\mathrm{II}} = \beta\,\frac{33}{65} + \beta 5^6 - (4\xi_{45} + 30^0) = 9^0\,43'\,47{,}673''$$

§ 22.

Die Construction des 25-Ecks. (Nach § 21. 1. b) Figur 3 Man teilt den Durchmesser AB in 13 gleiche Teile und trägt $\frac{5}{2} \cdot (B8) = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} AB$ bis E ab, oder man teilt BC in drei gleiche Teile und

zieht durch den Teilpunkt D Sehne AP, dann ist $5BP = BE = 113^0\,6'$. Dann bestimmt man $\widehat{BF} = 36^0$, $\widehat{BG} = 60^0$, $\widehat{BH} = 45^0$ und macht $\widehat{BK} = \widehat{KL} = \widehat{BG} - \widehat{BF} = \widehat{GF} = 24^0$ und $LN = HJ = \frac{1}{2}\widehat{GH} = 7\frac{1}{2}^0$. Teilt man nun $\widehat{NE} = 57^0\,36'$ in vier gleiche Teile, dann ist $\widehat{EQ} = \frac{1}{4}\widehat{EN} = 14^0\,24'$ und EQ Seite des einbeschriebenen 25-Ecks.

Die Construction des 9-Ecks. Figur 4. Man zeichnet über AB als Hypotenuse das pythagoreische Dreieck $AEB(^{60}\underset{61}{\triangle}{}^{11})$, trägt dann $\widehat{BE}$ von B aus neunmal auf der Peripherie (ab) bis F ab und macht $\widehat{FG} = 27^0$. Es ist nun $\widehat{GB} = 160^0$. Teilt man $\widehat{GB}$ in vier gleiche Teile, so dass $\widehat{GH} = \frac{1}{4}\widehat{BG}$ ist, dann ist Sehne GH eine Seite des eingeschriebenen regelmässigen 9 Ecks. — Die Construction von $\triangle\, AEB$ ergiebt sich am leichtesten, wenn man BC in sechs gleiche Teile teilt, durch den fünften Teilpunkt D Sehne AL zieht und $\widehat{BL} = \widehat{LE}$ macht.

Da $\widehat{BF} = 187^0$ und $\widehat{FG} = 27^0$ ist, so ist $\widehat{AG} = 20^0$. Ist nun $\widehat{AK} = 36^0$, so ist $\widehat{GK} = \widehat{AK} - \widehat{AG} = 16^0$ und $\widehat{GJ} = \frac{1}{2}\widehat{GK} = 8^0$. Sehne GJ Seite des einbeschriebenen regelmässigen 40-Ecks.

Die Construction des 7-Ecks. (Nach § 21. 3a) Figur 5. Man trägt auf der Peripherie $\widehat{BG} = \widehat{BF} + \widehat{FG} = 45^0 + 18^0$ ab und macht $\widehat{GH} = 14^0\,24' = \xi_{25}$ und teilt $\widehat{BH} = 48^0\,36'$ in vier gleiche Teile. $\widehat{BJ} = \frac{1}{4}\widehat{BH}$ trägt man von C aus auf der Peripherie ab bis K; dann ist $BK = 102''\,9' + 0{,}6'$. Zeichnet man nun $\triangle\, AEB = {}^{40}\underset{41}{\triangle}{}^{9}$, dann ist $\widehat{BE} = 25^0\,21'\,38{,}76''$ und $\widehat{BL} = 2\widehat{BE} = 50^0\,43'\,17{,}52''$; folglich ist $\widehat{BK} - \widehat{BL} = \widehat{KL} = 51^0\,25'\,42.63''$ und KL ist Seite des einbeschriebenen regelmässigen 7-Ecks. Figur 6 ist nach § 21, 3b) gezeichnet.

Construction des 11-Ecks. (Nach § 21, 4c) Figur 7. Man halbirt BC in D und zieht durch D Sehne AF, teilt dann BC in acht gleiche Teile und zieht durch den dritten Teilpunkt E von C Sehne AG. Auf der Peripherie trägt man dann $\widehat{BF}$ von B aus neunmal ab bis K, dann ist $BK = 28^0\,10'\,15\frac{1}{3}''$; halbirt man $\widehat{CG}$ in H und macht $\widehat{KL} = \widehat{CH}$, dann ist $\widehat{BL} = 48^0\,43'\,37{,}10''$. Trägt man nun auf $\widehat{BL}$ von B aus $\widehat{BJ} = 2\xi_{45}{}^{I}$ ab, dann ist $\widehat{JL} = \xi_{11}$ und JL Seite des einbeschriebenen regelmässigen 11-Ecks.

Construction des 13-Ecks. (Nach § 21, 5d). Figur 8. Man halbirt BC in D und zieht durch D Sehne AE. Trägt man $\widehat{BE}$ neunmal auf der Peripherie ab bis K, dann ist $2\pi - 9\widehat{BE} = \widehat{BK} = \beta_5^9$ und $\widehat{AL} = \pi - \widehat{BL} = \pi - 4\widehat{BE} = \beta_5^4$. Macht man $\widehat{LM} = 2\pi - 9\widehat{BE}$ dann ist $\widehat{AM} = \beta_5^9 + \beta_5^4$. Nun construirt man $\widehat{CF} = 2\widehat{CG} = 30^0$ und $\widehat{HB} = 2\widehat{JB} = 36^0$ und $\widehat{JO} = \widehat{JB} = \widehat{CG} = 33^0 = \widehat{MN}$, dann ist $\widehat{AN} = \xi_{13}$ und Sehne AN Seite des einbeschriebenen 13-Ecks.

Wie Gauss 1796 bewiesen hat, ist ausser dem 3, 6, 12 ...., dem 4, 8, 16 ..., dem 5, 10, 20 ... und dem 15, 30, 60 ... Eck noch die Herstellung eines n-Ecks möglich, wenn n eine Primzahl und wenn zugleich $(n-1)$ eine Potenz von 2 ist, also z. B. das 17, 257, 65537 Eck. Alle anderen regelmässigen Vielecke müssen durch Annäherungsverfahren constuirt werden. Ein solches ist im § 21 angegeben worden; die Constructionen im § 22 zeigen, dass sehr genaue Resultate bei diesem Teilverfahren erzielt werden. Auch das 17-Eck lässt sich danach leicht construiren. Zu Constructionswinkeln nehme man

$$\beta_5^9 = 28^0\ 10'\ 15\tfrac{1}{3}'' \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{80}{89} = 32^0\ 0'\ 19\,\frac{127''}{334}$$

Um diese zu finden, teilt man zunächst (Figur 9) BC in zwei und dann in acht gleiche Teile, zieht durch den Halbirungspunkt D von BC Sehne AE und durch den fünften Teilpunkt F von C aus Sehne AG. Es ist dann wie oben beim 13-Eck $2\pi - 9\widehat{BE} = \widehat{BK} = \beta_5^9$ und $\tfrac{1}{2}\widehat{CG} = \widehat{CH} = \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{80}{89}$. Macht man $\widehat{KJ} = \widehat{CH}$, dann ist $\widehat{BK} + \widehat{KJ} = \beta_5^6 + \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{80}{89}$. An $\widehat{MP} = 30^0$ trägt man $PQ = \widehat{BN} - \widehat{BC}$ $= 45^0 - 36^0 = 9^0$ an macht $JL = MQ = 39^0$; es ist dann $\widehat{BJ} - \widehat{JL}$ $= \widehat{BL} = 21^0\ 10'\ 34{,}727'' = \xi_{17}^{\,\mathrm{I}}$ und BL eine Seite des einbeschriebenen regelmässigen 17-Ecks.

Der Unterschied vom wahren Wert beträgt $\tfrac{3}{5}''$.

Eine andere leicht auszuführende Construction des regelmässigen 17-Ecks giebt $(45^0 + \gamma_5^4 - \gamma_5^{10}) = 21^0\ 10'\ 43''$. Der Unterschied beträgt $8''$.

Anm. Beweis in § 8. nach Gauss „Ueber die pyth Zahlen" § 8. Bunzlau 1894.

XIX.

Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique.

Suite*)

Par

V. Sikstel.

Il a été déjà démontré que toutes les lignes géométriques sur la surface que nous nommerons actuellemnnt sphérique, étant fermées, sont égales entre elles (théorème 7). C'est pourquoi pour unité linéaire nécessaire pour la mesure on peut prendre une partie définie de toute la ligne géométrique, comme d'une quantité constante pour la surface donnée. La ligne géométrique entière sera dans ce cas une unité de plus haute catégorie à laquelle nous donnerons plus bas le nom d'unité pour la simplification de notre exposition.

Théorème 9. Les perpendiculaires à la même ligne géométrique se coupent non pas d'un de ses côtés, mais des deux.

Soient *EDCA* et *FDCB* (fig. 1) perpendiculaires à la ligne *EFBA* et admettons qu'elles se coupent, comme il est montré sur la figure, dans les points *D* et *C* d'un côté de la ligne *EFBA*. Alors d'après le théorème 8 nous obtenons $DMC = \frac{1}{2}$ et $CDMCA = \frac{1}{2}$; par conséquent $DMC = EDMCA$.

L'absurdité obtenue nous montre que les perpendiculaires *DCA* et *FDCB* se coupent de deux côtés de la ligne *EFBA*.

---

*) Bulletin de la Société Physico-mathématique de Kasan. Deuxième série. Tome II Nr. 2, 1892.

Théorème 10. La somme de deux perpendiculaires élevées sur la ligne géométrique d'un de ses côtés, en prenant la longueur de chacune de son pied jusqu'au point de l'intersection avec l'autre, est égale à $\frac{1}{2}$.

Il est donné: AB et AC sont perpendiculaires à BC (fig.2.). Il faut démontrer que $AB + AC = \frac{1}{2}$.

En prolongeant AB et AC jusqu' à la seconde intersection qui, comme il est démontré, doit avoir lieu de l'autre côté de la ligne BC en quelque point D, nous trouverons que $\triangle ABC$ par le déplacement sur la surface peut être complètement superposé sur $\triangle BDC$, alors nous verrons, que $AC = BD$ et $AB = CD$. Mais $AB + BD = \frac{1}{2}$; donc $AB + AC = \frac{1}{2}$.

Théorème 11. Si la longueur d'une portion de la ligne géométrique est égale à $\frac{1}{4}$, la longueur de chaque perpendiculaire élevée sur la portion à son extrémité, en la prenant du pied de la perpendiculaire jusqu'au point commun d'intersoction, est égale à $\frac{1}{4}$ (fig. 3)

Soient $AB = \frac{1}{4}$ et AD et BD perpendiculaires à AB.

En prolongeant BD et BA jusqu' à la seconde intersection dans le point C, nous trouverons que $\angle C = d$ (théorème 6). Il est évident que $\triangle CDA$ par le déplacement sur la surface peut être complètement superposé sur $\triangle ADB$; alors AD coïncidera complètement avec BD et, par conséquant, $AD = BD$. Mais, d'après le dernier théorème, $AD + BD = \frac{1}{2}$ ou $2AD = 2BD = \frac{1}{2}$, c'est à dire $AD = BD = \frac{1}{4}$.

Théorème 12. Si la longueur de la portion de la ligne géométrique est plus grande ou plus petite que $\frac{1}{4}$, chacune des perpendiculaires élevées sur la portion à ses extrémités, en prenant la longueur de la perpendiculaire comme dans le cas précédent, est égale à $\frac{1}{4}$ (fig. 4).

Il est donné: $BC = \frac{1}{4}$ et AC et AB sont perpendiculaires à BC. Alors, d'après ce que nous avons déjà dit, $AC = AB = \frac{1}{4}$.

Prenons pour exemple la portion $CM < \frac{1}{4}$ et menant MN perpendiculairement à BC, admettons que la ligne obtenue par le prolongement de MN ne passera pas par le point A par le point d'intersection de AB et AC mais elle rencontrera ces lignes dans les points D et N. Alors $NC + NM = \frac{1}{2}$, mais $NC < \frac{1}{4}$; par conséquent $MN > \frac{1}{4}$ et d'autant plus $MD > \frac{1}{4}$; mais BD est aussi $> \frac{1}{4}$; alors $BD + MD > \frac{1}{2}$, ce qui est en contradiction avec le théorème 10. Cette absurdité provient évidemment de la supposition que MN ne passe pas par le point A; par conséquent, MN passera absolument par le point A et occupera quelque position AM. Maintenant nous obtiendrons: $AM + AC = AM + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; par conséquent, $AM = \frac{1}{4}$.

De la même manière nous démontrerons le théorème pour le cas, où $CM > \frac{1}{4}$.

Corollaires.

1) Toutes les perpendiculaires élevées sur la ligne géométrique d'un de ses côtés passent par un point constant et la longueur de chacune d'elles, en la prenant du pied jusqu' au point commun d'intersection, est égale à $\frac{1}{4}$.

2) Les perpendiculaires à la ligne géométrique donnée se divisent par cette ligne en deux parties égales entre les points de leur intersection.

3) *Si du sommet d'un angle droit nous prenons sur un de ses côtés une ligne égale à $\frac{1}{4}$ et si nous joignons le point obtenu avec quelque point sur l'autre côté de l'angle, la ligne géométrique obtenue (joignante) sera perpendiculaire à l'autre côté de l'angle et sa longueur sera à $\frac{1}{4}$* (fig. 5.)

Soit AB perpendiculaire à CB et égale à $\frac{1}{4}$. Démontrons que toute ligne AC prise dans le théorème est aussi perpendiculaire à CB et, par conséquent, est égale à $\frac{1}{4}$.

En supposant que AC n'est pas perpendiculaire à CB, faisons passer du point C la ligne CD, perpendiculaire à CB. Cette ligne, d'après ce qui a été dit, passera par le point A et sera égale à $\frac{1}{4}$ Mais comme, d'après le théorème 8, les lignes CDA et CA doivent avoir encore un point commun à la distance du point A égale à $\frac{1}{2}$, nous obtenons que CDA et CA ont trois points communs. Cette absurdité ne provient évidemment, que de la supposition que AC n'est pas perpendiculaire à CB, donc AC est perpendiculaire à CB et, conséquemment, la longueur de AC est égale à $\frac{1}{4}$.

4) La ligne géométrique qui divise en deux parties égales les portions de deux autres lignes géométriques prises entre les points de leur intersection, est perpendiculaire à ces lignes.

5) Si la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une ligne géométrique donnée est plus longue du plus courte que $\frac{1}{4}$, on ne peut faire passer de ce point aucune autre ligne perpendiculaire à ligne donnée.

6) Les angles du fuseau sphérique sont égaux.

7) La perpendiculaire élevée sur le côté du fuseau pas en son milieu forme avec l'autre côté des angles inégaux: un angle obtus qui sera opposé à la plus grande des portions donnée et un angle aigu opposé à la plus petite d'entre elles (fig. 6.)

Si $AD > DC$ et DB est perpendiculaire à AC nous avons: 1) $\angle DBC$ ne peut pas être égal à un angle droit. Admettons que $\angle DBC = d$, nous trouverons $BC = DC = \frac{1}{4}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. 2) $\angle DBC$ ne peut pas être obtus. En supposant $\angle DBC > d$, il faut admettre que BM, perpendiculaire à BD doit prendre sa direction en dedans de $\angle BDC$ et, par conséquent, doit couper DC dans quelque point M. Alors $BM = DM = \frac{1}{4}$, ce qui est de nouveau en contradiction avec l'hypothèse.

Si angle DBC ne peut pas être égal à un angle droit et ne peux pas être plus grand que lui il est, conséquemment, aigu et $\angle DBA$ — obtus.

Remarque. Comme toutes deux lignes géométriques, menées sur la surface sphérique, se coupent, en construisant un angle quelconque au point quelconque de la ligne géométrique donnée et en le déplaçant sur la surface de façon à ce qu' un de ses côtés reste sur la ligne donnée, nous trouverons que la position primitive et la nouvelle position de l'autre côté de l'angle donnée, étant prolongées jusqu' á l'intersection, formeront avec ligne donnée un triangle qui aura un angle égal à un angle intérieur non adjacent.

Théorème 13. Si dans un triangle un angle extérieur est égal à un angle intérieur non adjacent, la ligne géometrique qui joint le milieu du côté adjacent à ces angles, avec le sommet de l'angle opposé est égale à $\frac{1}{4}$; elle est deux fois plus petite que la somme des deux autres côtés du triangle et divise l'angle formé par eux en deux parties égales.

Il est donné: $\triangle ABC$; $\angle B = \angle C$; $BO = CO$ (fig. 7.)

Il faut démontrer: $AO = \frac{1}{4}$: $AB + AC = \frac{1}{2}$; $\angle BAO = \angle CAO$.

En prolongeant AO et AC jusqu' à l'intersection dans le point D, nous obtiendrons $\triangle COD$ qui, évidemment, par le déplacement sur la surface peut être complètement superposé sur $\triangle BOA$. Avec cela nous obtiendrons: 1) $AO = DO$; mais $AO + DO = 2AO = \frac{1}{2}$, par conséquent: $AO = \frac{1}{4}$; 2) $CD = AB$; mais $AC + CD = \frac{1}{2}$, donc $AB + AC = \frac{1}{2}$. à) $\angle BAO = \angle CDO$; mais $\angle CDO = CAO$ comme angles d'un fuseau, donc $\angle BAO = \angle CAO$.

Il est facile de voir que AO qui divise l'angle BAC en deux parties égales et qui est égale à $\frac{1}{4}$ divisera aussi le côté BC — ($\triangle ABC$) — en deux parties égales.

Corollaires 1) Si l'angle du fuseau est plus petit que l'angle droit, la ligne géométrique qui joint les milieux des côtés du fuseau

est la plus longue des perpendiculaires abaissées des points d'un côté du fuseau sur l'autre (fig. 8)

Remarque. Le troisième corollaire du théorême 12 nous montre que si dans un triangle deux angles sont droits et le côté compris entre eux est égale à $\frac{1}{4}$, le troisième angle du triangle est aussi droit.

Il en suit, d'après les théorèmes démontrés, que, si dans un triangle deux angles sont droits, le troisième angle est équivalent avec son côté opposé, c'est à dire: si le troisième angle est plus grand ou plus petit que l'angle droit, son côté opposé est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{4}$ et réciproquement.

Qu' on nous donne à présent le fuseau $AMBNA$ et que son $\angle A < d$. Alors MN qui joint les milieux des côtés du fuseau est plus petite que $\frac{1}{4}$. D'après cela DC, perpendiculaire à AB, coupera le prolongement NM en quelque point O et formera avec AB l'angle $ACD \angle D$.

Il en suit que, prenant d'abord $CD = MN$ et menant CQ perpendiculaire à CD, nous obtiendrons $\triangle CQD$ égal $\triangle MBN$ avec quoi $\angle CQA = \angle B = A$. Maintenant, d'apres le théorème 13, $CQ + CA = \frac{1}{2}$, mais $CQ = \frac{1}{4}$, donc $CA = \frac{1}{3}$, ce qui est absurde. L'absurdité n'est provenu, évidemment, que de la supposition que $CD = MN$. Ainsi CD ne peut pas être égale â MN.

Posant ensuite que $CD > MN$ prenons $C'D = MN$ et menons $C'Q$ perpendiculairement à $C'D$. Alors il sera de nouveau évident que $\angle C'QA = \angle CAD$ et nous obtiendrons $\triangle AOQ$ qui aura $AO + QO = \frac{1}{2}$, ce qui est de nouveau absurde parce que AO ainsi que QO est plus petite que $\frac{1}{4}$. De cette manière nous obtenons que CD ne peut pas être plus grand que MN ni lui être égale, donc $CD < MN$

2) Si un angle du fuseau est plus grand que l'angle droit, la ligne géométrique qui joint les milieux de ses côtés est la plus petite des perpendiculaires abaissées des points d'un côté du fuseau sur l'autre.

Ce corollaire sera démontré de la même manière que le précedent.

Théorème 14. Si un angle du fuseau est plus petit que l'angle droit, les perpendiculaires égales entre elles abaissées des points d'un côté du fuseau sur l'autre sont également éloignées des sommets du fuseau et, conséquemment, de la perpendiculaire du milieu.

Il est donné le fuseau MN (fig. 9) et $\angle M < d$. AB est la perpendiculaire du milieu, CD et $C'D'$ sont des lignes égales entre elles et perpendiculaires à MBN. Il faut démontrer que $DN = D'M$ ou que $BD = BD'$.

Comme $CD < AB$ (corollaire premier du théorème 12) en déplaçant $\triangle CDN$ sur la surface, nous pouvons parveuir enfin à ce que CD coïncide avec $C'D'$. La 10ème figure montre cette nouvelle position où $C'N' = CN$, $D'N' = DN$ et $C'M'$ qui est le prolongement de $N'C'$ est égale à CM. Dans le triangle $MC'M'$ l'angle extérieur M est à l'angle M' — intérieur et non adjacent; c'est pourquoi, d'aprés le théorème 13, $C'P$ qui joint le sommet C' avec le milieu du côté opposé est égale à $\frac{1}{4}$. En prolongement $P'C'$ jusqu' à l'intersection avec MN, nous trouverons que $C'P$ est égale à $\frac{1}{4}$ et divise $\angle NC'N'$ en deux parties égales, ce qui fait que $N'P$ est aussi $= PN$. Sachant que $C'D' < \frac{1}{4}$, que $PC' = C'P' = \frac{1}{4}$ et que $C'D'$ est perpendiculaire à PP', il est facile de voir que $\angle P'C'D' = \angle PC'D' = d$ et par conséquent, $PD' = P'D' = \frac{1}{4}$. Ensuite, $MN + MM' = \frac{1}{2} = MN' + NN'$. par conséquent, $MM' = NN'$ d'où $\frac{MM'}{2} = P'M = \frac{NN'}{2}$; mais nous souvenant que $PD' = P'B'$, nous concluons que $MD' = D'N'$ ou $MD' = DN$ (fig. 9) en conséquence de quoi BD est aussi $= BD'$, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 15. Si un angle du triangle est moindre que 2d, le côté qui lui est opposé est plus petit que $\frac{1}{2}$.

Soit dans $\triangle ABC$ (fig. 11) $\angle ABC < 2d$. En prolongeant AB nous trouverons qu'elle peut couper AC entre les points A et C en quelque point N ou bien en quelque point D sur le prolongement de AC. En faisant la première supposition, nous devons conclure que le prolongement AB coupera absolument BC en quelque point E. Alors $ABMEN = \frac{1}{2}$ et $BME = \frac{1}{2}$, d'où nous obtiendrons une absurdité évidente: $ABMEN = BME$. Il en suit que la seconde supposition doit être juste, et dans ce cas: $AD = \frac{1}{2}$ et $AC < AD$ donc $AC \angle \frac{1}{2}$.

Théorème 16. Si un angle du triangle est plus grand que 2d, le côté qui lui est opposé est plus grand que $\frac{1}{2}$.

En admettant que dans $\triangle ABC$ (fig. 12), dont les côtés sont AB, BC et ADC, $\angle ABC > 2d$ et en prolongeant par exemple le côté AB de l'angle donné nous trouverons que ce prolongement doit prendre sa direction en dedans du $\triangle ABC$, donc il doit couper AC en quelque point D entre les points A et C. Dès lors $AC > AMD$, mais $AMD = \frac{1}{2}$, donc $AC > \frac{1}{2}$.

Remarque. Les conclusions réciproques aux théorèmes 15 et 6 seront également justes et seront démontrées d'une manière galement simple.

Théorème 17. Si dans un triangle isocèle l'angle au sommet est moindre ıe 2d et les côtes égaux sont moindres que $\frac{1}{4}$, la ligne qui divise l'angle au mmet en deux parties égales est perpendiculaire à la base (fig. 13)

Il est donné: $\angle BAC < 2d$, $AB = AC < \frac{1}{4}$, $\angle BAO =$ $\angle CAO$.

Il faut démontrer: $AO \perp BC$.

Prolongeons AB et AC — côtés du $\triangle ABC$ — jusqu' à la se- ›nde intersection dans le point F et divisons ABF et ACF en deux ırties égales dans les points M et N. Puis, en menant MA et en rolongeant BC et MN jusqu' à l'intersection, nous obtenons les ›ints D et E.

Dès lors, d'après le corollaire 4 du théorème 12, $AM = AQ =$ $N = \frac{1}{4}$ et, comme $\angle MAQ = \angle NAQ$, par la superposition des ·iangles MAQ et NAQ nous arriverons à la conviction que $MQ =$ $'Q$, $AQ = \frac{1}{4}$ et d'aprés cela $OO < \frac{1}{4}$, par suite $\angle D < d$; cela ›nne le droit, d'après le théorème 14, de conclure que $NE = DM$. [ais, en ajoutant à NE et DM à chacune une ligne égale NQ et fQ, nous trouverons: $QE = QD = \frac{1}{4}$; et, comme $\angle AQM = d$, $\angle AOB$ est aussi = d, c'est à dire AO est perpendiculaire à BC, › qu' il fallait démontrer.

Théorème 18. Si dans un triangle un côté quelconque pris pour base t moindre que $\frac{1}{2}$ et la perpendiculaire du sommet à la base divise l'angle ı sommet en deux parties égales, ce triangle est isocèle (fig 14.)

Remarque. Par l'hypothèse, indiquée par le théorème, l'angle u sommet ne peut être ni égal à $2d$ ni plus grand que $2d$. Si angle au sommet est égal à $2d$, la figure donnée n'est pas un tri- ngle, mais un fuseau.

Mais, si l'angle au sommet est plus grand que $2d$, le côté qui ıi est opposé est plus grand que $\frac{1}{2}$, ce qui est en contradiction vec les données.

Il est donné: $BQ \perp AC$, $\angle ABQ = \angle CBQ$.

Il faut démontrer que $AB = CB$.

En supposant que AB et CB ne sont pas égales et par exmple, $AB > CB$, prenons $DB = CD$ et joignons les points D et C.

Nous aurons le triangle isocèle DBC dont le côté BO divise l'angle au sommet en deux parties égales. D'après le théorème précédent $\angle COQ = d$, mais $\angle CQO$ est aussi $= d$, par conséquent $CQ = \frac{1}{4}$ ce qui est en contradiction avec la supposition. Ainsi AB et CB ne peuvent pas être inégales et par suite $\triangle ABC$ est isocèle.

Théorème 19. Si dans un triangle isocèle l'angle au sommet est moindre que 2d et les côtés égaux sont moindres que ¼, la ligne que divise l'angle au sommet en deux parties égales, divise aussi la base en deux parties égale (fig. 13)

Soit $\triangle ABC$ le triangle donné. Faisons les mêmes constructions que celles que nous avons faites pour démontrer le théorème 17 et plaçons le $\triangle CNE$ sur le $\triangle BMD$ de manière que EN coïncide avec DM et le côté NC prenne sa direction sur MF. On peut y parvenir par suite de l'égalité des angles ENC et DMF — des angles droits. Des lors $\triangle CNE$ prendra la position PMD et il se formera le nouveau $\triangle BDP$ qui ne peut être qu' isocèle par le théorème 18, c'est à dire $DP = DB$; mais $DP = CE$; par conséquent, $DB = CE$, mais DO est aussi $= EO$, conséquemment, $BO = CO$, ce qu' il fallait démontrer.

Sachant que d'un point on ne peut élever sur la ligne géométrique qu' une seule perpendiculaire, nous pouvons faire encore la déduction suivante: „si dans un triangle isocèle l'angle au sommet „est moindre que $2d$ et les côtés égaux sont moindres que ¼; la „perpendiculaire élevée sur la base de son milieu divisera aussi „l'angle au sommet en deux parties égales".

Les théorêmes 17, 18, 19 et la dernière conclusion sont également justes pour chaque triangle isocèle dont l'angle au sommet est moindre que $2d$.

Soit dans le $\triangle BAC$ l'angle $A < 2d$ et $AB = AC > \frac{1}{4}$. En prolongeant AB et AC jusqu' à la seconde intersection dans le point D, nous trouverons que $\triangle DBC$ est aussi isocèle et que $DB = DC < \frac{1}{4}$ et $\angle D = \angle A < 2d$ En divisant $\angle D$ en deux parties égales au moyen de la ligne DO, nous conclurons que DO passera par le point A (les deux $AD = \frac{1}{2}$) et divisera $\angle A$ en deux parties égales; on peut en acquérir la conviction par la superposition des fuseaux. Sachant plus loin que DO est perpendiculaire à BC et $BO = CO$, nous trouverons que la supposition est juste (fig. 15).

Les théorêmes 17, 18, 19 et la conclusion que nous venons de faire se rapportent à chaque triangle isocéle (fig. 16).

Prenons le triangle isocèle ABC dans lequel $AC = BC$ et au

sommet $\angle ACB > 2d$. En prolongeant sa base des deux côtés nous obtiendrons une ligne géométrique entière $ADBCA$ et un triangle isocèle ACB dont l'angle au sommet est moindre que 2d.

En menant dans le $\triangle ACBEA$ la ligne CE qui divise l'angle au sommet en deux parties égales, nous trouverons qu' elle sera perpendiculaire à AB et la divisera en deux parties égales. Mais la ligne CD qui est le prolongement de EC divise aussi évidemment l'angle au sommet du triangle donné en deux parties égales.

Puis, d'après le théoréme 6, CD est perpendiculaire à ADB. En outre: $EAD = EBD = \frac{1}{2}$, mais $EA = EB$, par conséquent, AD est aussi $= BD$. Ainsi on peut appliquer au triangle donné les théorémes 17 et 19.

Nous apercevant que CD qui est perpendiculaire à ADB et qui divise $\angle ACB > 2d$ en deux parties égales est aussi perpendiculaire à AB et divisera aussi $\angle ACB < 2d$ en deux parties égales, nous trouverons que le $\triangle ACBEA$ et, par conséquent, le triangle $ADBCA$ ont les côtés AC et BC égaux, c'est à dire que le dérnier triangle est isocèle, c'est â dire qua le théorème 18 peut lui être appliqué. La conclusion dont il est question dans la proposition est aussi évidemment juste pour le triangle donné.

Théorème 20. Dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux (fig. 17).

Il est donné: $\triangle ABC$, $AB = AC$.

Il faut démontrer: $\angle ABC = \angle ACB$.

En menant AO perpendiculairement à BC, nous trouverons que $BO = CO$. En prolongeant AO et en prenant $A'O = AO$, joignons les points A' et B $\triangle A'OB$, par le déplacement sur la surface, peut être complètement superposé sur $\triangle AOC$, d'où il suit que $A'B = AC = AB$ et $\angle A'BO = \angle ACO$. Il en résulte que $\triangle ABA'$ est isocèle et que sa ligne OB est la perpendiculaire à la base élevée sur son milieu et alors, d'après ce que nous venons de dire, $\angle ABO = \angle A'BO$; mais $\angle A'BO = \angle ACO$, par conséquent: $\angle ABO = \angle ACO$ ou $\angle ABC = \angle ACB$.

Donc, si dans un triangle deux côtés sont égaux, les angles qui leur sont opposés sont aussi égaux.

Théorème 21. Si la base d'un triangle isocèle et moindre que $\frac{1}{2}$ et la ligne géométrique qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire sur cette dernière, elle divise aussi l'angle au sommet en deux parties égales (fig. 18.)

Il est donné: $\triangle ABC$; $AC < \frac{1}{2}$; $AD = DC$, $BD \perp AC$.

Il faut démontrer: $\angle ABD = \angle CBD$.

Admettant que les angles ABD et CBD ne sont pas égaux et que, par exemple, $\angle ABD > \angle CBD$, menons BF de manière que $\angle FBD = \angle CBD$. Alors, d'après le théorème 18, nous trouverons que $BF = BC$, d'où nous conclurons que $FD = DC$, ce qui est en contradiction avec les données.

Ainsi nous devons nécéssairement conclure que $\angle ABD = \angle CBD$. Il est évident que nous arriverons à la même conclusion dans le cas où la base du triangle est plus grande que $\frac{1}{2}$: nous n'avons qu' à compléter le triangle jusqu' à la demisphère et à considérer d'abord le triangle complètant le triangle donné jusqu' à la demi-sphère.

Corollaire. Les lignes obliques à la ligne géométrique donnée qui partent d'un même point et qui ont sur cette ligne des projections égales sont egales

Théorème 22. Si dans un triangle deux angles sont égaux, les côtés qui leur sont opposés sont aussi égaux.

Il est donné; $\triangle ABC$ (fig. 19)

$$\angle BAC = \angle BCA$$

Il faut démontrer: $AB = BC$.

En supposant que AB n'est pas égale à BC, nous trouverons que OD, perpendiculaire à AC et menée de son milieu ne passera pas par le point B et, par conséquent, coupera un des autres côtés, par exemple BC, dans quelque point D. Alors, d'après ce qui a été dit, $AD = DC$, mais, d'après le théorème 20, $\angle DAB = \angle DCA$, ce qui est en contradiction avec les donnés. Ainsi nous voyons que AB doit être nécessairement $= BC$.

Théorème 23. Si l'angle au sommet d'un triangle isocêle est moindre que 2d et les côtés égaux sont moindres que $\frac{1}{4}$, les angles à sa base sont aigues (fig. 20).

Il est donné: $AB = AC < \frac{1}{4}$; $\angle A < 2d$; $AO \perp BC$.

Il faut démontrer: $\angle B < d$.

L'angle B ne peut pas être droit car, si nous le supposons égal à un angle droit, nous verrons que $AO = AB = \frac{1}{4}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Admettons que $\angle B > d$ et me-

nous BM perpendiculairement à BC, nous trouverons que $BM = QM = \frac{1}{4}$. Mais, d'après les donnés, $AO < \frac{1}{4}$ [1]) et, par conséquent, d'autant plus OM doit être plus petite que $\frac{1}{4}$.

L'absurdité obtenue montre que $\angle B$ ne peut non plus être obtus, c'est pourquoi il doit être nécessairement aigu.

Théorème 24. Si l'angle au sommct d'un triangle isocèle est moindre que ce de et les côtés égaux sont plus grands que $\frac{1}{4}$, les angles à sa base sont obtus.

Pour démontrer le théorème on n'a qu' á prolonger les côtés égaux du triangle donné jusqu' à la seconde intersection alors nous obtiendrons le triangle indiqué par le théorème précédent et les angles à sa base seront aigus et, par conséquent, les angles á la base du triangle donné, comme angles supplémentaires jusqu' à 2d aux angles du nouveau triangle, seront obtus. Nous trouverons en outre que la perpendiculaire abaissée dans le triangle isocèle donné du sommet sur base sera plus grande que $\frac{1}{2}$ et plus grande que chacun des côtés égaux.

Théorème 25. Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est moindre que 2d et les angles à la base sont aigus, les côtés égaux du triangle sont moindres que $\frac{1}{4}$ (fig. 22).

Il est donné: $\triangle ABC$; $\angle A < 2d$

$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C < d$$

Il faut démontrer: $AB < \frac{1}{4}$.

Les côtés égaux du triangle donné ne peuvent pas être égaux à $\frac{1}{4}$ car dans ce cas $\angle B = \angle C = d$, ce qui est en contradiction avec l'hypothêse.

---

1) Soit $AM = AN = \frac{1}{4}$ (fig. 21), $AB = AC < \frac{1}{4}$ $\angle A < 2d$ et $AO \perp BC$. Si l'angle $A < 2d$, $MN < \frac{3}{2}$. Il en résulte que BC ne peut pas rencontrer MN entre les points M et M et dans ce cas BC coupe la ligne géométrique AOQ entre les points A et Q et par suite $AO < \frac{1}{4}$. Puis nous voyons: OQ est perpendiculaire à deux lignes BC et MN ét élle est moindre que $\frac{1}{4}$, c'est pourquoi OQ est la plus grande des perpendiculaires abaissées des points de la ligne BC sur la ligne MN (corollaire 1 du théorème 13) donc $OQ > BM$ et par suite $AO < AB$. Nous en concluons: „si l'angle au „sommet d'nn triangle isocèle est moindre que $2d$ et les côtés éganx sout „moindres que $\frac{1}{4}$, la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base est plus „petite que chacun des autres côtés.“

Supposant $AB = AC > \frac{1}{4}$, nous pouvons prendre $AM = AN = \frac{1}{4}$; alors nous aurons dans le triangle DBC: $\angle DBC < d$; et, par conséquent, la somme des angles adjacents $\angle ABC + \angle DBC < 2d$. On voit par là que AB est nécessairement moindre que $\frac{1}{4}$.

Théorème 26: Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est moindre que 2d et les angles à la base sont obtus, les côtés égaux du triangle sont plus grands que $\frac{1}{4}$.

La vérité de ce que vient d'être énoncé est facile à voir par le supplément du triangle donné jusqu' au fuseau, en prolongeant les côtés égaux donnés jusqu' à la seconde intersection.

Corollaires des théorèmes précédents sur les triangles isocèles.

1) Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est plus grand que $2d$ et les côtés égaux sont moindre que $\frac{1}{4}$, les angles à la base sont obtus et la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base est plus grande que $\frac{1}{4}$.

2) Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle et plus grand que $2d$ et les côtés égaux sont plus grands que $\frac{1}{4}$, les angles à la base sont aigus et la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base est plus petite que $\frac{1}{4}$.

3) Si l'angle au sommet d'un triangle à sa base sont aigus, les côtés égaux du triangle sont plus grands que $\frac{1}{4}$.

4) Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est plus grand que $2d$ et les angles à la base sont obtus, les côtés égaux du triangle sont plus petits que $\frac{1}{4}$.

5) Les perpendiculaires élevées des milieux de tous les côtés d'un triangle quelconque passent par un même point.

6) Les bissectrices des angles de tout triangle passent par un même point.

Théorème 27. Si dans un triangle la somme de deux côtés est égale au troisième, l'angle opposé au troisième côté est égal à 2d.

Il est donné: $\triangle ABC$; $AB + BC = AC$ (fig. 23.)

Il faut démontrer que $\angle ABC = 2d$.

En faisant $AO = AB$, nous trouverons que $CO = CB$. En joignant les points B et O, nous obtiendrons

du triangle ABO . . . . . . $\angle ABO = \angle AOB$
du triangle CBO . . . . . . $\angle CBO = \angle COB$

$$\angle ABC = \angle ABO + \angle CBO = 2d$$

Remarque. On voit sans difficulté que si dans un triangle un seul angle est égal à $2d$, la somme des deux côtés formant cet angle est égale au troisième; un pareil triangle peut avoir les deux autres angles: 1) égaux à zéro et, par conséquent il représente une certaine partie d'une ligne géométrique entière ou 2) non égaux à zéro, c'est à dire il se transforme en fuseau.

Théorème 28. Si dans un triangle la somme de deux côtés est plus petite que le trosième, l'angle opposé au troisième côté est plus grand que 2d.

Cas 1er: AB ainsi que CB est plus petit que $\frac{1}{4}$ (fig. 24.)

Il est donné: $\triangle ABC$. $AB + CB < AC$.

$\angle BAC$ ainsi que $\angle BCA$ diffèrent de $2d$,

Il faut démontrer que $\angle ABC < 2d$.

Le théorème proposé n' a évidemment besoin d'être démonté que dans ce cas où $\angle BAC$ et $\angle BCA$ sont chacun à chacun moindre que $2d$; en admettant qu' un de ces angles est plus grand que $2d$, nous trouverons que le côté qui lui est opposé est plus grand que $\frac{1}{2}$ et, par conséquent, d'autant plus $AC > \frac{1}{2}$, d' où $\angle ABC > 2d$.

Si nous prenons $AM = AB$ et $CN = CB$, d'après les donnés, nous aurons $AM + CN < AC$ En joignant le point B avec les points M et N, nous obtiendrons deux triangles isocèles: $\triangle ABM$ et $\triangle CBN$ dont les angles aux sommets sont moindres que $2d$ et les côtés égaux sont moindres que $\frac{1}{4}$; c'est pourquoi les angles à leurs bases sont aigus (théorème 23). D'après cela $\angle BMN$ ainsi que $\angle BNM$ sont plus grands que d.

Si maintenant nous abaissons la perpendiculaire du sommet B sur le côté AC et si, prenant $OD = OB$, nous joignons le point D aux points A, M, N et C, nous obtiendrons les triangles isocèles ABD MBD, NBD et CBD.

Comme dans $\triangle BMD$ et $\triangle BND$ les angles M et N sont chacun plus grands que $2d$, leur base commune BD doit être plus grande que $\frac{1}{2}$; donc BD doit couper AC entre les points M et N; en supposant le contraire nous aurions trouvé que BD est en même temps plus grande que $\frac{1}{2}$ et plus petite que $\frac{1}{2}$. Si $BD > \frac{1}{2}$, dans

les triangles isocèles BAD et BCD dont les côtés égaux sont, d'après l'hypothèse, plus petits que $\frac{1}{4}$, les angles aux sommets sont plus grands que $2d$. Dans ce cas, d'après ce qui précède, les angles aux bases de ces triangles sont obtus, c'est à dire $\angle ABO > d$ et $\angle CBO > d$, d' où $\angle ABC > 2d$, ce qu' il fallait démontrer.

Cas 2ème du théorème 28, quand $BC > \frac{1}{4}$ et, par conséquent, $AB < \frac{1}{4}$ (fig. 25)

Il est donné: $\triangle ABC$

$$AB + BC < AC$$
$$\angle A \text{ et } \angle C$$

diffèrent de $2d$, autrement sont moindres que 2d.

Il faut démontrer: $\angle ABC > 2d$.

En construisant $\triangle ABM$ et $\triangle CBN$ de même que dans le cas précédent, nous devons conclure, d'aprés les donnés et les théorèmes sur les triangles isocèles, que $\angle CBN$ égal à $\angle CNB$ est plus grand qu' un angle droit. Si nous admettons maintenant que $\angle ABC < 2d$, la ligne BK qui divise $\angle ABC$ en deux parties égales doit tomber â l'intérieur de $\angle CBN$. Mais, sachant que les bissectrices des angles du triangle passent par un même point, nous devons arriver à la conviction que les bissectrices BK, AK et CK se rencontrent nécessairement à l'intérieur du $\triangle CNB$ dans quelque point K. Mais comme AK et CK, étant bissectrices des angles aux sommets isocèles, servent de perpendiculaires élevées sur les deux côtés BM et BN de leurs milieux dans $\triangle BMN$, et comme les perpendiculaires des milieux des côtés du triangle se rencontrent toutes les trois dans un même point, le point K sert de point commun d'intersection — des bissectrices des angles $\triangle ABC$ et des perpendiculaires des milieux des côtés dans $\triangle BMN$. D'après la supposition $\angle ABK < d$, donc $\angle AMK$ qui lui est égal $< d$ et par suite $\angle KMN$, égal à $\angle KNM$, est plus grand que d. En abaissant maintenant dans le triangle isocèle KMN la perpendiculaire KO du sommet sur la base et en la prolongeant d'une longueur $OK' = OK$, joignons le point K' aux points A, M, N et C. Après avoir considéré les triangles KMK' et KNK' dont les angles aux sommets M et N sont plus grands que $2d$, nous trouverons que $KK' > \frac{1}{2}$ et, par conséquent, $\angle KAK' > 2d$, mais $\angle KAK' = \angle BAC$, donc $\angle BAC > 2d$, ce qui est contraire à l'hypothèse. La contradiction ne vient que de la supposition que $\angle ABC < 2d$, donc $\angle ABC > 2d$, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 29. Si la somme de deux côtés d'un triangle est plus grande que le troisième, l'angle opposé au troisième côté est plus petit que 2d (fig. 26)

Il est donné: $\triangle ANCB$, $AB + BC > AMC$.

Il faut démontrer: $\angle ABC < 2d$.

En admettant que $\angle ABC > 2d$, nous trouverons que le prolongement AB doit rencontrer le côté AMC à l'intérieur du triangle en quelque point M. Alors:

$$AB + BM = ANM$$

Mais d'après l'hypothèse $AB + BC > ANM + MC$.

Ou $BC > BM + MC$

$$BM + MC < BC, \text{ d'où } \angle BMC > 2d,$$

ce qui est absurde.

Il faut en conclure que $\angle ABC < 2d$.

Théorème 30. Si l'angle d'un triangle est moindre que 2d, la somme les côtés qui forment cet angle est plus grande que le troisième côté.

On ne peut pas admettre que la somme de deux côtés qui forment un angle moindre que $2d$ — dans le triangle donné, soit égale au troisième côté car dans ce cas l'angle compris entre eux serait égal à $2d$. De même on ne peut pas admettre que la somme de ces deux côtés soit moindre que le troisième côté car alors l'angle compris entre eux serait plus grand que $2d$. C'est pourquoi nous devons nécessairement conclure que la somme de deux côtés est plus grande que le troisième côté.

Théorème 31. Si l'angle d'un triangle est plus grand que 2d, la somme les côtés qui le forment est moindre que le troisième côté (fig. 27.)

Il est donné: $\triangle ACB$; $\angle ACB > 2d$.

Il faut démontrer: $AC + BC < AQB$.

D'après les données le prolongement du côté AC passera à l'intérieur du triangle et rencontrera AB — le troisième côté — en quelque point Q — entre les points A et B. Alors $\angle CQB < 2d$

$$BC < CQ + QB$$

mais

$$AC + CQ = AQ$$

donc

$$AC + BC < AQ + QB$$

ou

$$AC + BC < AQB$$

Corollaire „Si chacun des angles d'un triangle est moindre „que 2*d*. la somme de tous les côtés du triangle est moindre qu' „une unité" (fig. 28.)

Supposons que $\triangle ABC$ (fig. 28.) satisfait à la proposition. En prolongeant les côtés AB et AC jusqu' à la seconde intersection, admettons que

$$AB + AC + BC \geqq 1$$

Mais aussi

$$AB + AC + BD + CD = 1$$

Donc

$$BC - (BD + CD) \geqq O \quad \text{ou} \quad BC \geqq BD + CD$$

et par suite $\angle D$ égal à $\angle A$ est plus grand ou égal à $2d$, ce qu est en contradiction avec l'hypothèse.

Théorème 32. Si chacun des angles d'un triangle est moindre que 2d, dans un pareil triangle du plus grand angle est opposé le plus grand côté (fig. 29.)

Il est donné: Chacun des angles du $\triangle ABC$ est moindre que $2d \angle C > \angle B$.

Il faut démontrer: $AB > AC$.

En construisant $\angle DCB = \angle B$, nous trouverons que CD coupera AB entre les points A et B car $\angle A$ ainsi que $\angle B$ est moindre que $2d$. Dès lors $BD = CD$. Dans $\triangle ADC$ chacun des angles est moindre que $2d$ et ainsi $CD + DA > AC$ ou $AB > AC$.

Le théorème réciproque est aussi vrai.

Corollaires. En ajoutant aux deux derniers théorèmes les propriétés des côtés du triangle ayant un angle plus grand que 2d et de même — les propriétés des côtés du triangle ayant un côté plus grand que ½, nous pouvons faire encore les conclusions suivantes:

1) Dans **tout** triangle au plus grand des trois angles est opposé les plus grand côté.

2) Dans **tout** triangle au plus grand des trois côtés est opposé le plus grand angle.

3) Si un angle du triangle est obtus mais moindre que $2d$ et l'autre aigu, la perpendiculaire abaissée du sommet du troisième angle sur le côté opposé passera à l'extérieur du triangle et sera

divisée par ce sommet en parties inégales: la plus grande partie sera opposée à l'angle obtus donné et la plus petite à l'angle aigu.

4) Si nous avons dans un triangle deux angles obtus, la perpendiculaire du sommet du troisième angle sur le côté opposé tombera à l'intérieur du triangle.

5) Si nous avons dans un triangle deux angles aigus, la perpendiculaire du sommet du troisième angle sur le côté opposé passera aussi à l'intérieur du triangle.

6) Si les lignes obliques à la ligne donnée sont issues d'un même point et forment avec elle un triangle dont les angles intérieurs adjacents à la ligne donnée sont aigus, la ligne oblique dont la projection sur la ligne donnée est plus grande sera plus grande.

7) Le théorème réciproque est aussi vrai et sera démontré par la méthode de réduction à l'absurde.

8) Si les lignes obliques à la ligne donnée sont issues d'un même point et forment un triangle dont les angles adjacents à la ligne donnée sont obtus, la ligne oblique dont la projection sur la ligne donnée est plus petite sera plus grande.

9) Le théorème réciproque sera démontré par „la méthode de réduction à l'absurde."

Les propriétés 6, 7, 8, 9, 4 et 5 sont également vraies pour le triangle qui a un angle plus grand que $2d$. La propriété 3 pour le triangle ayant un angle plus grand que $2d$ ne diffère de celle que nous venons de citer qu'en ce que la perpendiculaire passe à l'intérieur du triangle.

Comme nous n' avons pas pour but d'écrire un cours détaillé de géométrie sphérique, nous ne dirons que quelques mots à propos de la circonférence.

On appelle c i r c o n f é r e n c e une ligne non interrompue sur la surface sphérique dont chaque point est également distant d'un point qui se trouve aussi sur cette surface. Le point également distant de tous les points de la circonférence s'appelle centre de la circonférence. Il est évident que si le rayon de la circonférence est moindre que $\frac{1}{4}$, pour la même circonférence il se trouvera un autre centre et un autre rayon plus grand que $\frac{1}{4}$. Il est aussi facile à comprendre que la circonférence dont le rayon est égal à $\frac{1}{4}$ a un autre centre et représente une ligne géométrique entière On appelle cercle la partie de la surface sphérique limitée par la circonférence. Chaque circonférence limite deux cercles.

Convenons de ne prendre en considération qu'un seul centre de la circonférence et un seul rayon, par exemple le moindre et citons quelques théorèmes sans démonstrations:

1) Les circonférences et les cercles des rayons égaux sont égaux entre eux.

2) Par trois points donnés qui se trouvent ou qui ne se trouvent pas sur la même ligne géométrique on peut mener une circonférence et on n'en peut mener qu'une seule.

3) Si le rayon de la circonférence n'est pas égal à $\frac{1}{4}$, aucune de ses parties ne peut être prise pour ligne géométrique.

4) La ligne géométrique ne peut pas avoir avec la circonférence plus de deux points communs si le rayon n'est pas égal à $\frac{1}{4}$

5) Dans la même circonférence ou dans les circonférences des rayons égaux — les angles au centre sont proportionnels à leurs arcs correspondants de même qu'aux aires des secteurs qui leur répondent.

Imprimé selon la décision du Conseil de la Société Physico-mathématique de l'Université Impériale de Kasan.

Signé: Président de la société

A. Vassilief.

Kasan. Typo-lithographie de l'Université Impériale 1894.

XX.

Herleitung des Gesetzes vom Kräfteparallelogramm aus der Bewegung eines Körpers im widerstehenden Mittel und Aufstellung einer allgemeinen Gleichung für dynamische Kraftwirkung.

Von

Th. Schwartze.

I.

Lagrange begründete seine allgemeine Kräftegleichung auf das virtuelle Princip. Es scheint, dass man dasselbe als ein Axiom betrachten muss, um einen Ausgangspunkt für einen systematischen Aufbau der Mechanik zu gewinnen. Dieses Princip ist daher auch den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt. Mit Bezug auf Fig. 1 ist angenommen, dass ein materieller Punkt P sich mit einer gewissen Geschwindigkeit durch ein widerstehendes Mittel bewegt, wobei schliesslich ein Ausgleich zwischen der lebendigen Kraft der beweglichen Masseneinheit P und dem Widerstande des Mittels eintreten muss. So lange der Ausgleich noch nicht eingetreten ist, wird vor dem bewegten Punkte eine Verdichtung, hinter dem bewegten Punkte eine entsprechende Verdünnung des Mittels vorhanden sein.

In Fig. 1 ist AB die Bewegungsrichtung des gedachten Punktes P. Als Resultanten der Wirkung des ringsum gegen den bewegten Punkt andrängenden Mittels sind zwei von einander dynamisch unabhängige Kraftstrahlenkegel angenommen, deren in eine Ebene mit der Bewegungsrichtung des gedachten Punktes fallende Strahlen

gegen einander rechtwinklig gerichtet sind. Die diesen Kraftstrahlen bezüglich der Masseneinheit zukommenden Bewegungsgrössen bezeichnen wir mit u_1 bzhw. u_2 Der Winkel, welchen der mit der Bewegungsgrösse u_1 seiner Strahlen gegen den bewegten Punkt wirkende Kraftkegel bildet, sei α, so dass also jede Kraftlinie dieses unter dem Winkel $\frac{\alpha}{2}$ gegen die Bewegungsrichtung des Punktes wirkt. Der hinter dem bewegten Punkte wirksame Kraftkegel bildet also mit seinen Strahlen gegen die Bewegungsrichtung des Punktes P den Winkel $90^0 - \frac{\alpha}{2}$. Die virtuellen Momente

$$Pa = u_1 \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad Pb = u_2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

sind mit Berücksichtigung des Princips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung einander gleich zu setzen. Da nun in einer durch die Bewegungsrichtung des vom Widerstande des Mittels beeinflussten Punkte auf jeder Seiten die Kraftstrahlen paarweis wirken, so ist zu setzen

$$4u_1^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 4u_2^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Im allgemeinen ist der hierdurch angedeutete Gleichgewichtszustand ein dynamischer, weil die Winkelfunctionen Sinus und Cosinus ungleiches Wachstum besitzen. Der statische Gleichgewichtszustand tritt ein für $\alpha = 90^0$. Dann besteht die Gleichheit der lebendigen Kräfte:

Wir bezeichnen die beiden Gleichungsglieder mit R_1^2 und R_2^2 und setzen:

$$R_1^2 = 4u_1^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2u_1^2 (1 + \cos\alpha) = u_1^2 + u_1^2 + 2u_1 u_1 \cos\alpha$$

$$R_2^2 = 4u_2^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2u_2^2 (1 - \cos\alpha) = u_2^2 + u_2^2 - 2u_2 u_2 \cos\alpha$$

Es ist dann $R_1 = R_2$ für $n_1 = u_2$ und $\alpha = 90^0$

Hiernach sind aber auch für den dynamischen Zustand eines dualen Kräftesystems die Gleichungen zu bilden:

$$R_1^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$R_2^2 = u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2 \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Es lässt sich jedoch auch auf einem anderen Wege eine Kraft-

gleichung entwickeln. Wir benutzen dazu den sogenannten separirten Tangentensatz.

In dem Dreieck ABC (Fig. 2) sind die als Kraftstrecken zu betrachtenden Linien

$$AD = \tfrac{1}{2}R_1 \quad \text{und} \quad BD = DC = \tfrac{1}{2}R_2$$

zu setzen, wobei wir R_1 als die Combinationsresultante bezeichnen. Wir setzen ferner Winkel $BAD = \alpha_1$ und Winkel $CAD = \alpha_2$, so dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

ist. Ferner sei Winkel ADB als Resultantenwinkel $= \gamma$. Es gelten nun die Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{R_1 \sin\gamma}{R_2 - R_1 \cos\gamma}$$

$$\operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{R_1 \sin\gamma}{R_2 + R_1 \cos\gamma}$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{tang}\alpha = \frac{\dfrac{R_1 \sin\gamma}{R_2 + R_1 \cos\gamma} + \dfrac{R_1 \sin\gamma}{R_2 - R_1 \cos\gamma}}{1 - \dfrac{R_1^2 \sin^2\gamma}{R_2^2 - R_1^2 \cos^2\gamma}}$$

oder

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2R_1 R_2 \sin\gamma}{R_2^2 - R_1^2}$$

Für γ setzen wir den Complementswinkel φ unter der Bezeichnung „Compensationswinkel" und erhalten somit

$$R_1^2 - R_2^2 = -2R_1 R_2 \operatorname{cotang}\alpha \cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Diese Gleichung sehen wir als die allgemeinste Gleichung der Zusammensetzung zweier dynamisch wirksamer dualer Kräfte an, die als Wirkung und Gegenwirkung mit teilweiser Combination und teilweiser Compensation zur Wirkung kommen. Diese beiden Kräfte haben aber die Bedeutung der Resultanten zweier Elementarkräfte, welche Bedeutung durch die Gleichungen (1) und (2) zum Ausdruck gebracht wird.

In dieser Beziehung lässt sich aber die Gleichung (3) mit Benutzung der virtuellen Momente auch auf geometrisch-algebraischem Wege entwickeln.

In Fig. 3 und 4 entsprechen die Strecken *ab* und *ac* den Elementarkräften v_1 und v_2, indem die auf die Masseneinheit wirken-

den Bewegungsgrössen in der Bedeutung von Kräften zur Geltu[ng] kommen. Die Phasendifferenz dieser Wirkungsgrössen ist du[rch] den Zusammensetzungswinkel $bac = \alpha$ symbolisirt, wobei in Fig. [3] $\alpha < 90^0$ und in Fig. 4 $\alpha > 90^0$ angenommen ist.

Die beiden Elementarkräfte v_1 und v_2 beeinflussen sich geg[en]seitig in ihren Richtungen durch die virtuellen Momente:

$$ae = v_2 \cos\alpha \quad \text{und} \quad af = v_1 \sin\alpha$$

Ausserdem entwickeln diese Elementarkräfte in normaler Richt[ung] gegenseitig relativ freie Wirkungen in den virtuellen Wirkungen:

$$ah = v_2 \sin\alpha \quad \text{und} \quad ai = v_1 \cos\alpha$$

Mit Bezug auf die Combinationsresultante $ad = R_1$ und die Compensationsresultante $bc = R_2$ gelten die Anfangs entwickelten Gleichungen (1) und (2). Durch Einführung der beiden obigen virtuellen Momentenpaare erhält man

$$R_1^2 \cos^2\alpha = v_1^2 \cos^2\alpha + v_2^2 \cos^2\alpha + 2 v_1 v_2 \cos^3\alpha \quad \ldots\ldots \quad (4)$$
$$R_2^2 \sin^3\alpha = v_1^2 \sin^2\alpha + v_2^2 \sin^2\alpha - 2 v_1 v_2 \cos\alpha \sin\alpha \quad \ldots \quad (5)$$

Mit Rücksicht darauf, dass man dieselbe Entwickelung der virtuellen Momente auch für den andern Endpunkt der Combinationsresutante $ad = R_1$ wiederholen kann, indem man die zum Ausgleich der Kräfte des Systems eingeführt gedachten Gegenkräfte zu v_1 und v_2 parallel zu sich selbst mit ihrem Angriffspunkte in der Richtung der Resultante $ad = R_1$ verschoben sich denkt, ergibt sich, dass die Combinationsresultante der resultirenden virtuellen Momente

$$R_1 \cos\alpha = Q_1 \quad \text{und} \quad R_2 \sin\alpha = Q_2$$

mit der Combinationsresultante der Elementarkräfte v_1 und v_2 zusammenfällt; demnach gilt auch die Gleichung:

$$R_1^2 = Q_1^2 + Q_2^2 - 2 Q_1 Q_2 \cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Durch Einsetzen der Werte für Q_1 und Q_2 erhält man:

$$R_1^2 - R_2^2 = 2 R_1 R_2 \operatorname{cotang}\alpha \cos\varphi$$

wobei φ den Winkel zwischen den Vectoren $R_1 \cos\alpha$ und $R_2 \sin[\alpha]$ bezeichnet. In Fig. 3 und 4 sind diese Vectoren durch ag und $a[i]$ dargestellt.

Zur Bestimmung des Compensationswinkels, welchen wir als den Complementswinkel des Resultantenwinkels bereits gekennzeichnet haben, gelten die folgenden Gleichungen:

$$\cos\varphi = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2} \,.\, \text{tang}\,\alpha$$

Mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen (1) und (2) ergiebt sich daraus unter Bezugnahme auf den Resultantenwinkel $\gamma - 90^0 - \varphi$:

$$\sin^2\gamma = \cos^2\varphi = \frac{4v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha}{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4v_1^2 v_2^2 \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{4v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha}{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 2v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha} \quad \ldots \ldots (8)$$

$$\cos^2\gamma = \sin^2\varphi = \frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4v_1^2 v_2^2 \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 2v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha} \quad \ldots \ldots (9)$$

Diese Gleichungen gelten, wie sich leicht nachweisen lässt, als Ausdruck des Wirkungsgrades des Systems. Entsprechend dem Gesetze der Erhaltung der Kraft ist die Summe der unter einander stehenden Ausdrücke gleich eins.

Für $v_1 = v_2 = v$ wird der Compensationswinkel $\varphi = 0$ und der Resultantenwinkel $\gamma = 90^0$. Durch die Gleichheit der Elementarkräfte wird der Gleichgewichtszustand des inneren Kraftfeldes des dualen, auf Wirkung und Gegenwirkung beruhenden Systems ausgedrückt, denn die Wirkung des äusseren Kraftfeldes ist dann relativ gleich null. Es ergibt sich dafür die Gleichung

$$R_1^2 - R_2^2 = 2R_1 R_2 \,\text{cotang}\,\alpha$$

welche für $\alpha = 45^0$ in die Formel der absoluten Statik

$$R^2_1 - R_2^2 = 2R_1 R_2$$

übergeht. Eine Discussion dieser Gleichungen erfolgt in einem zweiten Artikel

II

Von den zur Bestimmung des Compensationswinkels φ der allgemeinen Kräftegleichung

$$R_1^2 - R_2^2 = 2R_1 R_2 \,\text{cotang}\,\alpha \cos\varphi \quad \ldots \ldots (10)$$

dienenden, aus den Elementarkräften mit Benutzung der Formeln für die Combinationsresultante R_1 und Compensationsresultante R_2

$$R_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

$$F_2^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

gebildeten Gleichungen:

$$\cos^2\varphi = \frac{4v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha}{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4v_1^2 v_2^2 \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{4v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha}{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha} \quad \ldots (13)$$

$$\sin^2\varphi = \frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4v_1^2 v_2^2 \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha} \quad \ldots (14)$$

entsprechen die oberen dem Wirkungsgrade des inneren Kraftfeldes, die unteren dem Wirkungsgrade des äusseren Kraftfeldes eines dualen, auf Wirkung und Gegenwirkung beruhenden Systems. Die Zähler sind als Ausdruck der Nutzarbeit (Bildungsarbeit bzhw. Erhaltungsarbeit), die Nenner als Ausdruck der Gesamtarbeit des Systems zu betrachten.

Für $v_1 = v_2 = v$ folgt aus den Gleichungen (13) und (14)

$$\cos\varphi = 1 \quad \text{und} \quad \sin\varphi = 0$$

das heisst, im Ausschluss der Elementarkräfte verschwindet der Phasenunterschied der Compensation. Aus den Gleichungen (11) und (12) folgt dann:

$$R_1^2 = 4v^2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad R_1^2 4 = 4v^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

wodurch der Schwingungszustand des kinetischen Drucks für den statischen Gleichgewichtszustand gekennzeichnet ist, wie aus Fig. 5. hervorgeht. Für $\alpha = 90^0$ erhält man

$$R_1 = R_2 = R$$

und es ist

$$R^2 = 2v^2 \quad \text{oder} \quad v^2 = \frac{R^2}{2}$$

als lebendige Kraft.

Die Hauptgleichung (10) nimmt für $\cos\varphi = 1$ die einfachere Form an:

$$R_1^2 - R_2^2 = -2R_1 R_2 \operatorname{cotang} \alpha$$

oder

$$\left(\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2}\right) \sin \alpha = -2R_1 R_2 \cos \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Der Factor $\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2}$ entspricht einer Differenz lebendiger Kräfte bzhw. einer motorischen Kraft. Die Winkelfunctionen $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ sind im allgemeinen als Kraftstreckenverhältnisse anzusehen und daher durch $\frac{L}{L'}$, oder für $L' = 1$ durch L auszudrücken Die Kräfte R_1 und R_2 sind ihren Beschleunigungen proportional. Fügt man ihnen den Wertigkeitscoefficienten der Masse bei, so sind ihre Dimensionen im allgemeinen MLT^{-2} Unter das Zeichen der Quadratwurzel gesetzt ergeben sich demnach für $\left(\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2}\right) \sin \alpha = R^2 \sin \alpha$ und $R_1 R_2 \cos \alpha$ die Ausdrücke

$$M^{1/2} L^{1/7} T^{-2} = M^{1/2} LT^{-1} \,.\, LT^{-1}$$

Dies ist aber die auf die Dimensionen von elektromotorischer Kraft, Stromstärke und Widerstand zurückgeführte Formel des Ohm'schen Gesetzes.

Da angenommen wird, dass der elektrische Strom auf Aetherschwingungen beruht, so gilt die aus dem Parallelogrammgesetz abgeleitete Grundgleichung der Dynamik für den allgemeinen Vorgang des Ausgleichs von Wirkung und Gegenwirkung zwischen zwei Kräftfeldern.

Wird in der Gleichung des kinetischen Druckes

$$\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} = -R_1 R_2 \operatorname{cotang} \alpha$$

$\alpha = 45^\circ$ gesetzt, so erhält man die Formel der absoluten Statik:

$$R_1^2 - R_2^2 = -2R_1 R_2$$

$$R_2 = R_1(\sqrt{2} + 1)$$

oder

$$R_1 = R_2(\sqrt{2} - 1)$$

$$R_1 R_2 = R_1^2 (\sqrt{2} + 1)$$

$$R_1 R_2 = R_2^2 (\sqrt{2} - 1)$$

Hieraus folgt

$$\frac{R_3^2}{R_2^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

Die Ausdrücke $\sqrt{2}-1$ und $\sqrt{2}+1$ sind leicht geometrisch darstellbar. Schneidet man in Fig. 6 von der Hypotenuse des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks ABC vom Punkte A mit der Kathete AB als Halbmesser das Stück AD und von der Verlängerung der Hypotenuse das Stück AE ab und setzt man $AB = 1$, so bestehen die Verhältnissgleichungen:

$$AD : DC = 1 : \sqrt{2}-1$$

$$AD : CE = 1 : \sqrt{2}+1$$

Folglich hat man:

$$AD = DC(\sqrt{2}+1) = R_1^2(\sqrt{2}+1) \quad \ldots \ldots \ldots (16)$$

$$AD = EC(\sqrt{2}-1) = R_2^2(\sqrt{2}-1) \quad \ldots \ldots \ldots (17)$$

Mit Bezug auf Fig. 6 ist daher

$$DC = R_1^2 \quad \text{und} \quad EC = R_2^2$$

zu setzen.

In Fig. 7 ist vom Punkte A aus, als Mittelpunkt eines Systems zweier als Wirkung und Gegenwirkung auftretenden, weil von einerseits von innen nach aussen und andrerseits von aussen nach innen sich betätigenden Centralkraft, ein Kreis mit dem Halbmesser $AD = 1$ geschlagen. Dieser Kreis mag den Durchschnitt eines sphärischen Weltkörpers darstellen, der im Raume als inneres Kraftfeld wirksam wird. In den Kreis ist ein Secantenquadrat als Durchschnitt des Compressions- oder Combinationskubus, und um den Kreis ein Tangentenquadrat als Durchschnitt des Expansions- oder Compensationskubus gelegt. Hierbei denke man sich die Kugel in drei Paar diametraler vierseitig pyramidaler, den drei Raumachsen entsprechender Sectoren zerlegt, wobei Druck und Gegendruck der beiden Kraftfelder mit ihren Resultanten in der Richtung der drei Hauptträgheitsachsen sich auf die Mitten der gedachten Würfelseiten projiciren.

Der innere Kreis entspricht demnach der positiven minimalen Sphäre des inneren Kraftfeldes; der äussere Kreis der negativen minimalen Sphäre (Hohlsphäre) des äusseren Kraftfeldes. Nach den Gleichungen (16) und (17) ist demnach mit Bezug auf Fig. 6 zu setzen:

$$DC(\sqrt{2}+1) = EC(\sqrt{2}-1)$$

wobei wiederum

$$DC = R_1^2 \quad \text{und} \quad EC = R_2^2$$

ist, welche Grössen als die dualen Potentiale der Elementarkräfte v_1 und v_2 zu gelten haben, wie aus den Gleichungen (1) und (2) bzhw. (11) und (12) hervorgeht. Diese Potentiale sind aber gleichwertig den zweiten Potenzen der Entfernungen, aus denen die Elementarkräfte als Wirkung und Gegenwirkung in's Spiel treten, wie leicht zu finden ist, wenn man in den Grundgleichungen (11) und (12)

$$v_1 = v_2 = v \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

für $\alpha = 45^0$ setzt. Man erhält dann

$$R_1^2 = v^2(\sqrt{2}+1) \quad \text{und} \quad R_2^2 = v^2(\sqrt{2}-1)$$

Demnach lässt sich aus der allgemeinen Formel der Statik

$$R_1^2 - R_2^2 = - R_1 R_2$$

das Gravitationsgesetz ableiten.

In Fig. 8 ist nach dem Verfahren, welches zum Aufzeichnen der Diagramme (3) und (4) benutzt wurde ein Kräftesystem mit einem Zusammensetzungswinkel $\alpha < 90^0$ im Gleichgewichtszustande der Elementarkräfte

$$ab = ac = v$$

dargestellt. Da für diesen Fall der Compensationswinkel $\varphi = 0$, also der Resultantenwinkel $\gamma = 90^0$ ist, so fallen die Resultanten des Parallelogramms der inneren Arbeit $aegf$, des Parallelogramms der äusseren Arbeit $ahki$ und des Parallelogramms der Gesamtarbeit $abdc$ in der Combinationsresultante ad zu einer Kraftstrecke zusammen. Die Fläche des Parallelogramms $acgf$ ist bestimmt durch den Ausdruck $v^2 \cos^2\alpha \sin\alpha$ und die Fläche des Parallelogramms der äusseren Arbeit $ahki$ ist bestimmt durch den Ausdruck $v^2 \sin^3\alpha$. Hieraus folgt für die Flächensumme

$$v^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin\alpha = v^2 \sin\alpha$$

Dieser Ausdruck entspricht aber der Fläche des Parallelogramms der Gesamtarbeit $abcd$ und somit ist dem Gesetz der Erhaltung der Kraft genügt.

Dieselben Beziehungen gelten für Fig. 9, wo der Zusammensetzungswinkel der im Ausgleich befindlichen Elementarkräfte

$$ab = ac = v$$

grösser als 90^0 angenommen ist.

Bemerkenswert ist noch, dass der Ausdruck

$$\sqrt{2} - 1 = \text{tang}\,\frac{45^0}{2} = \text{tang}\,22^0\,30'$$

ist; dieser Winkel entspricht nahezu dem Winkel der Ekliptik.

Wir behalten uns vor die Grundsätze für die Bewegung zusammengesetzter Systeme, sowie die allgemeine Strahlungsformel aus der Grundformel der Dynamik

$$R_1^2 - R_6^2 = -2R_1\,R_2\,\text{cotang}\,\alpha\cos\varphi$$

abzuleiten.

XXI.

Eine besondere Gattung goniometrischer Nulldarstellungen.

Von

Franz Rogel

in Barmen.

1.

Werden in

$$f(u) \equiv B_n(u) + a_1 B_n(2u) + a_2 B_n(3u) \ldots + a_{k-1}(ku),\ n > 1 \qquad (1)$$

wo B_n das Functionszeichen für die Bernoulli'sche Function $n$ter Ordnung ist, die $k-1$ Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ so bestimmt, dass $k-1$ von den in $B_n(u)$ auftretenden Potenzen, worunter sich u^{n-1} befinden soll, ausfallen, so ist dann $f(u)$ mit n zugleich gerade oder ungerade und lässt sich nach

$$B_m(u + \tfrac{1}{2}) = (-1)^m B_m(-u + \tfrac{1}{2}), \quad m = 1$$

entwickeln, wofür sehr einfache goniometrische Reihen mit dem Geltungsintervalle $-\frac{1}{2} \leqq u \leqq +\frac{1}{2}$ bekannt sind. Wird nun auch in (1) jedes B_n durch die gleichwertige goniometrische Reihe mit den bezüglichen Geltungsbereichen

$$(0, 1),\ (0, \tfrac{1}{2}),\ (0, \tfrac{1}{3}) \ldots,\ \left(0, \frac{1}{k}\right)$$

ersetzt, so sind dann für dieselbe Function $f(u)$ zwei gleichwertige goniometrische Reihen gegeben, deren Differenz, geordnet nach den

Cosinus resp. Sinus der Vielfachen von $2\pi u$ eine goniometrische Nulldarstellung $\mathfrak{N}$ mit dem Geltungsbezirk

$$\left(\pm r,\ \pm r \pm \frac{1}{k}\right),\quad r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

wo die Grenzen zulässige Werte sind, ergiebt.

Aus diesen $\mathfrak{N}$ entsteht durch Vertauschung von u mit $u - \frac{1}{2}$ ein neues $\mathfrak{N}'$ mit Zeichenwechsel und dem Geltungsbereiche

$$\left(\pm r \pm \tfrac{1}{2},\ \pm r \pm \frac{k+2}{2k}\right),\quad r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

In beiden Fällen ist das Geltungsintervall, wie bei jeder goniometrischen Nulldarstellung, kein zusammenhangendes Gebiet, sondern besteht aus einer unendlichen Reihe gleich grosser um die Einheit von einander abstehender Einzelgebiete, welche graphisch wie folgt versinnbildlicht werden können:

$$-2, -\frac{1}{k}\ \ -2 \qquad -1-\frac{1}{k},\ -\frac{1}{k}\ \ 0\ \ \frac{1}{k} \qquad 1,\ 1+\frac{1}{k} \qquad 2\ \ 2+\frac{1}{k}$$

$$-\frac{5}{2}-\frac{1}{k}\ \ -\frac{5}{2} \qquad -\frac{3}{2}\ \ -\frac{1}{k}\ \ -\frac{3}{2} \qquad -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{k}\ \ -\frac{1}{2}\ \ 0$$

$$\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{k} \qquad \frac{3}{2}\ \ \frac{3}{2}+\frac{1}{k} \qquad \frac{5}{2}\ \ \frac{5}{2}+1$$

Die Entwicklung der ganzen Function $f(u)$, welche zufolge der über $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$ gemachten Voraussetzung, gerade oder ungerade ist, nach den $B(u+\frac{1}{2})$, kann mittelst des vom Verfasser gefundenen Satzes *)

$$F(u+k) = F(k) + \frac{\Delta_0}{1!} B_1(u) + \frac{\Delta_1}{2!} B_2(u) + \frac{\Delta_2}{3!} B_3(u) \ldots \tag{2}$$

wo

$$\Delta_r = F^{(k)}(k+1) - F^{(r)}(k)$$

ist, nun leicht vor sich gehen.

Wird zu diesem Behufe in (2) $f(u)$ für $F(u)$ $\mu+\frac{1}{2}$ für μ gesetzt, $k = -\frac{1}{2}$ und n ungerade genommen, so gilt wegen

---

*) Siehe „Entwicklung nach Bernoulli'schen Functionen". Sitzber. d. königl. böhmischen Ges. d. Wiss. XXXI, 1896.

$$f(u) = -f(-u) = f(u+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2})$$

$$\Delta_n = f^{(n)}(\tfrac{1}{2}) - f^{(n)}(-\tfrac{1}{2}) = 2f^{(n)}(\tfrac{1}{2})$$

die Gleichung

$$f(u) = -f(\tfrac{1}{2}) + \frac{2}{1!}f(\tfrac{1}{2})B_1(u+\tfrac{1}{2}) + \frac{2}{3!}f''(\tfrac{1}{2})B_3(u+\tfrac{1}{2})$$

$$\ldots + \frac{2}{(n-2)!}f^{(n-3)}(\tfrac{1}{2})B_{n-2}(u+\tfrac{1}{2}) \qquad n \text{ ungerade}$$

$$\ldots\ldots (3)$$

Mit Rücksicht auf die später vorzunehmende Ersetzung der B durch goniometrische Reihen ist es vorteilhaft derselben mittels Differentiation bezüglich u die Form zu geben

$$\tfrac{1}{2}f'(u) = \frac{1}{1!}f(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}f''(\tfrac{1}{2})\,(B_2(u+\tfrac{1}{2}) + \mathrm{B}_1)$$

$$+ \tfrac{1}{4}f^{(4)}(\tfrac{1}{2})\,(B_4(u+\tfrac{1}{2}) - \mathrm{B}_2)\ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\tfrac{1}{2})\left(B_{n-3}(u+\tfrac{1}{2}) + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\mathrm{B}_{n-3}}{2}\right) \ldots (4)$$

Hierin bestimmen sich die $f^{(r)}(\tfrac{1}{2})$ mit Hilfe von

$$B_n'(u) = n\left(B_{n-1}(u) + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{B_{n-1}}{2}\right), \quad n > 1$$

$$B^{(r)}{}_n(u) = r!\binom{n}{r}B_{n-r}(u), \qquad r \text{ gerade}$$

$$B_2'(a) = 2u - 1$$

$$B_m(\tfrac{1}{2}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}}\dfrac{2^m-1}{2^{m-1}}\mathrm{B}_m, & m \text{ gerade} \\ 0, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$B_m(1) = 0$$

$$B_m\left(\frac{3}{2}\right) = B_m(\tfrac{1}{2}) + m2^{-m+1}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}}\mathrm{B}_m + m2^{-m+4}, & m \text{ gerade} \\ m2^{-m+1}, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Nach Einsetzung der für $f^{(r)}(\frac{1}{2})$ gefundenen Werte in (4) und nach einmaliger Differentiation des Resultates bezüglich u findet sich dann eine der Formel (4) analoge für **gerade** n

2.

Die einfachst gebauten und das grösste Geltungsbereich (r, $\pm r \pm \frac{1}{2}$) besitzenden Nulldarstellungen entsprechen dem kleinsten zulässigen Wert $k = 3$, wofür

$$a_1 = -2^{-n+2}, \quad a_2 = +3^{-n+1}$$

und

$$\frac{1}{2n} f'(u) = \tfrac{1}{2}\left(B_{n-1}(u) - 2^{-n+3} B_{n-1}(2u) + 3^{-n+2} B_{n-1}(3u)\right)$$

$$+ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \tfrac{1}{2}(1 - 2^{-n+3} + 3^{-n+2}) B_{\frac{n-1}{2}}$$

$$= 6^{-n+1} + \binom{n-1}{2} 6^{-n+3} (B_2(u+\tfrac{1}{2}) + \mathrm{B}_1) + \binom{n-1}{4} \cdot$$

$$\cdot\ {}^{-n+5} (B_4(u+\tfrac{1}{2}) - \mathrm{B}_2)$$

$$\ldots + \binom{n-1}{n-3} 6^{-2} \left(B_{n-3}(u+\tfrac{1}{2}) + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{B}_{\frac{n-3}{2}}\right), \quad n > 2; \qquad \ldots (5)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(B_{n-2}(u) - 2^{-n+4} B_{n-2}(2u) + 3^{-n+3} B_{n-2}(3u)\right)$$

$$= \binom{n-2}{1} 6^{-n+3} u + \binom{n-2}{3} 6^{-n+5} B_3(u+\tfrac{1}{2}) \ldots$$

$$\ldots + \binom{n-2}{n-4} 6^{-2} B_{n-4}(u+\tfrac{1}{2}), \qquad n > 3 \qquad \ldots (6)$$

gefunden wird

Wird jetzt $u = \frac{x}{2\pi}$, in (5) $2n$ für $n-1$ und in (6) $2n-1$ für $n-2$ gesetzt, jedes B mittels

$$B_{2n}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = (-1)^n \mathrm{B}_n + (-1)^{n-1} 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{\nu=1,2\ldots}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^{2n}}$$

$$n > 0 \qquad \ldots (7)$$

$$B_{2n-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = (-1)^n 2 \frac{(2\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} \sum_{\nu=1,2,..}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^{2n-1}}, \qquad n > 1$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \qquad \ldots (8)$$

wo für $B_1\left(\frac{x}{2\pi}\right)$

$$\frac{\pi - x}{2} \equiv \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\sin \nu \pi}{\nu}, \qquad 0 < x < 2\pi$$

zu stehen kommt,

$$B_{2n}\left(\frac{x}{2\pi} + \tfrac{1}{2}\right) + (-1)^{n-1} B_\nu = (-1)^{n-1} 2 \frac{(2 1)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos \nu \pi}{\nu^{2n}}$$

$$\ldots (9)$$

$$B_{2n-1}\left(\frac{x}{2\pi} + \tfrac{1}{2}\right) = (-1)^n 2 \frac{(2n-1)!}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\sin \nu \pi}{\nu^{2n-1}}$$

$$-\pi \leq x \leq +\pi \qquad \ldots (10)$$

in Reihen umgewandelt Alles auf eine Seite gebracht, durch $(2n)!$ bzhw. $(2n-1)!$ dividirt und reducirt, so ergiebt sich

$$\frac{1}{6^{2n}(2n)!} + \frac{2}{6^{2n-2}(2n-2)!\,(2\pi)} \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos \nu x}{\nu^2}$$

$$- \frac{2}{6^{2n-4}(2n-4)(2\pi)^4} \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos \nu x}{\nu^4}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \left(\sum_1^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^{2n}} - \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2\nu x}{\nu^{2n}} + \frac{1}{3^{2n=1}} \right) \sum_1^{\infty} \frac{\cos 3\nu x}{\nu^{2n}} = 0$$

$$2\pi(r - \tfrac{1}{4}) \leq |x| \leq 2\pi(r + \tfrac{1}{3}) \qquad \ldots (11)$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\frac{1}{6^{2n-2}(2n-2)!\,2\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\sin \nu x}{\nu} - \frac{1}{6^{2n-4}(2n-4)^3!\,(2\pi)^3} \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\sin \nu x}{3}$$

$$+ \frac{1}{6^{n-6}(2n-6)!\,(2\pi)^5} \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\sin \nu \pi}{\nu^5} \ldots + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{6^2 2!\,(2\pi)^{2n-3}} \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\sin \nu x}{\nu^{2n-3}} + \frac{(-1)^n}{2(2\pi)^{2n-1}} \sum_1^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^{2n-1}}$$

$$- \frac{1}{2^{2n-3}} \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2\nu x}{\nu^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-2}} \sum_1^{\infty} \frac{\sin 3\nu \pi}{\lambda^{2n-1}} \Bigg) = 0$$

$$2\pi(r - \tfrac{1}{3}) \leqq |x| \leqq 2\pi(r + \tfrac{1}{3}) \qquad (12)$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

ausserdem noch gültig für $|x| = \overline{2r+1}\,\pi$.

Schliesslich sind diese Reihen nach den $\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}$ der Vielfachen von x zu ordnen.

Hieraus gehen durch Vertauschung von x mit $\pi - x$ dann noch zwei neue für

$$\pi(2r + \tfrac{1}{3}) \leqq |x| \leqq \pi(2r + \tfrac{5}{3})$$

geltende Nulldarstellungen hervor.

3.

Aus einem $\mathfrak{N}$ obiger Art, welches allgemein von der Form

$$\mathfrak{N} \equiv \Sigma\; c_\nu\, \varphi(\nu x) \qquad \ldots (13)$$

$$\pi(2r - \alpha) \leqq x \leqq \pi(2r + \alpha)$$

ist, wo φ entweder Cosinus oder Sinus vorstellt, können weitere $\mathfrak{N}$ abgeleitet werden, indem man zuerst $x = v + h\pi$, dann $x = v - h\pi$ setzt, wo h eine beliebige positive Zahl bedeutet, und die beiden Substitutionsresultate durch Addition und Subtraction mit einander verbindet, wodurch

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\infty}{\Sigma} c_\nu \cos \nu v \cos \nu h\pi = 0 \\ &\overset{\infty}{\Sigma} c_\nu \sin \nu v \sin \nu h\pi = 0 \end{aligned}\right\}\; \varphi = \text{cosinus}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\infty}{\Sigma} c_\nu \sin \nu v \cos \nu h\pi = 0 \\ &\overset{\infty}{\Sigma} c_\nu \cos \nu v \sin \nu h\pi = 0 \end{aligned}\right\}\; \varphi = \text{sinus}$$

hervorgeht. Das Geltungsgebiet ist in beiden Fällen

$$\pi(2r - \mathfrak{a} + h) \leqq |v| \leqq \pi(2r + \mathfrak{a} - h)$$

$$h < \mathfrak{a}$$

4.

Wird ein unbedingt convergentes $\mathfrak{R}$ gliedweise mit

$$P_r = \sin m_1 x \,.\, \sin m_2 x \,.\,.\,.\, \sin m_r x \,.\, \cos m_{r+1} x \cos m_{r+2} x \,.\,.\,.\, \cos m_p x$$

wo die m ganze Zahlen bedeuten, multiplicirt, so lässt sich jedes der Producte $P_r \varphi(\nu x)$ durch eine Summe von $\frac{p+2}{2}$ (p gerade) oder $\frac{p+3}{2}$ (p ungerade) Glieder

$$\sum_x \eta_x \psi\left[(\varepsilon_{x,1} m_1 + \varepsilon_{x,2} m_2 \,.\,.\,.\, + \varepsilon_{x,p} m_p + \varepsilon_{x,p+1} \nu) x\right] \text{*)}$$

ausdrücken, worin die ε und η Vorzeichen bedeuten, auf welche sich die Summation bezieht und ψ entweder Cosinus oder Sinus vorstellt, jenachdem in $P_r \varphi(\nu x)$ die Anzahl der Sinusfactoren gerade oder ungerade ist.

$\mathfrak{R} \,.\, P_r$ kann somit als eine unendliche Reihe von in Klammern stehenden endlichen Reihen aufgefasst werden. Da aber $\mathfrak{R}$ convergent, demnach

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0$$

ist, so können die Klammern in Wegfall kommen, und da die so hervorgehende Reihe als die Summe von $\frac{p+2}{2}$ bzhw. $\frac{p+3}{2}$ unbedingt convergenten Reihen selbst unbedingt convergirt daher commutativ ist, so darf dieselbe nach den Cosinus resp. Sinus der Vielfachen von x geordnet werden, wodurch ein neues $\mathfrak{R}_0$ mit denselben Giltigkeitsgrenzen wie das ursprügliche $\mathfrak{R}$ hervorgeht

---

*) Das Bildungsgesetz dieser Summen ist Gegenstand einer eingehenden Untersuchung in des Verfassers „Reihensummirungen mittels bestimmter Integrale" (Sitzg.-Ber. d. königl. böhmischen Ges. d. Wiss. XXXIX, Prag, 1895.)

In dem einfachsten speciellen Falle

$$P_r = \sin mx$$

entsteht aus einer Nulldarstellung in den Sinus eine solche in den Cosinus und umgekehrt.

Barmen, 11. Januar 1897.

Franz Rogel.

XXII.

Miscellen.

1.

Nachtrag zu Nr. XVIII, Ueber die pythagoreischen Dreiecke.

§ 23.

Die pythagoreischen Dreiecke geben ausser den Hypotenusenwinkeln noch andere Constructionswinkel zur Teilung des Kreisumfangs. Diese werden aus den von der Höhe gebildeten Abschnitten der Hypotenuse gewonnen, indem man dieselben zu Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks macht. Es ist nämlich, wenn der der Kathete b anliegende Abschnitt mit p und der andere mit q bezeichnet werden,

$$b^2 = a \cdot p \quad \text{und} \quad c^2 = aq$$

Setzt man nun

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{a \cdot p}{a \cdot q} = \frac{p}{q} = \text{tang}\,\varphi,$$

so ergiebt sich folgende Tabelle für φ:

	$\frac{b^2}{c^2} =$		φ	$90-\varphi$
$\triangle_5$	$\frac{3^2}{4^2}$	φ_5	$= 29^0\ 21'\ 27\frac{459''}{493}$	$60^0\ 38'\ 32\frac{34''}{493}$
$\triangle_{13}$	$\frac{5^2}{12^2}$	φ_{13}	$= 9^0\ 50'\ 56\frac{536''}{1249}$	$80^0\ 9'\ 3\frac{713''}{1249}$
$\triangle_{17}$	$\frac{8^2}{15^2}$	φ_{17}	$= 15^0\ 52'\ 41\frac{149''}{801}$	$74^0\ 7'\ 18\frac{652''}{801}$
$\triangle_{25}$	$\frac{7^2}{24^2}$	φ_{25}	$= 4^0\ 51'\ 44\frac{171''}{249}$	$85^0\ 8'\ 15\frac{78''}{249}$
$\triangle_{29}$	$\frac{20^2}{21^2}$	φ_{29}	$= 42^0\ 12'\ 32\frac{104''}{423}$	$47^0\ 47'\ 27\frac{319''}{423}$
$\triangle_{37}$	$\frac{12^2}{35^2}$	φ_{37}	$= 6^0\ 42'\ 15{,}875''$	$83^0\ 17'\ 44{,}125''$
$\triangle_{41}$	$\frac{9^2}{40^2}$	φ_{41}	$= 2^0\ 53'\ 53\frac{103''}{417}$	$87^0\ 6'\ 6\frac{314''}{417}$
$\triangle_{53}$	$\frac{28^2}{45^2}$	φ_{53}	$= 21^0\ 9'\ 51{,}965''$	$68^0\ 50'\ 8{,}035''$

$\underset{61}{\triangle}\ \frac{11^2}{60^2}\quad \varphi_{61} = 1^\circ\, 55'\, 30\frac{60''}{376} \qquad 88^\circ\, 4'\, 29\frac{316''}{376}$

$\underset{65}{\triangle}\ \frac{33^2}{56^2}\quad \varphi_{65}{}^{I} = 19^\circ\, 9'\ \frac{11''}{41} \qquad 70^\circ\, 50'\, 59\frac{30''}{41}$

$\underset{65}{\triangle}\ \frac{16^2}{63^2}\quad \varphi_{65}{}^{II} = 3^\circ\, 41'\, 25\frac{215''}{318} \qquad 86^\circ\, 18'\, 34\frac{113''}{328}$

Die Winkel φ sind hier wieder halbe Hypotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken. Es sind, da b und c relative Primzahlen sind, auch die Quadratzahlen b^2 und c^2 relativprim; mithin giebt die Summe b^4+c^4 eine Hypotenuse.

So ist z. B. $9^2+16^2=337$ eine Hypotenuse, deren Katheten nach § 19. I. 288 und 175 sind Nun ist

$$\gamma\frac{288}{337} = 58^\circ\, 42'\, 55\frac{425''}{493} = 2\varphi_5 \quad \text{und}$$

$$\beta\frac{175}{337} = 31^\circ\, 17'\ 4\frac{68''}{493}$$

Mittels dieser φ-Winkel und der Tabelle in § 18. ergeben sich folgende Bestimmungswinkel:

1) Für das 7-Eck:

$$\gamma\frac{288}{337} - \beta\frac{175}{337} = 27^\circ\, 25'\, 41\frac{357''}{493}$$

$$\xi_7{}^{I} = \gamma_{337}^{288} - \beta_{337}^{175} + 24^\circ = 51^\circ\, 25'\, 51\frac{357''}{413}$$

$$\xi_7{}^{I} - \xi_7 = 9'' \qquad \text{oder}$$

$$\xi_7{}^{II} = 2\varphi_{29} + \tfrac{1}{4}\left(\beta_6{}^{2} + \gamma\frac{55}{73}\right) - 3^\circ = 2\varphi_{29} + \tfrac{1}{4}\gamma\frac{364}{365} - 3^\circ$$

$$= 129^\circ\, 51'\, 25{,}520''$$

$$\xi_7{}^{II} = \tfrac{1}{2}\left(2\varphi_{29} + \tfrac{1}{4}\gamma\frac{364}{355} - 3^\circ\right) = 51^\circ\, 25'\, 42{,}760''$$

$$\xi_7 - \xi_7{}^{II} = 0{,}097'' = \frac{1''}{10} \qquad \text{oder}$$

$$\xi_7{}^{III} = 60^\circ + 22^\circ\, 30' + \tfrac{1}{2}\varphi_{41} - \beta_{54} = 51^\circ\, 25'\, 43{,}194''$$

$$\xi_7{}^{III} - \xi_7 = 0{,}337''$$

2) Für das 9-Eck:

$$\xi_9{}^{I} = 10\varphi_{65}{}^{I} - \tfrac{1}{4}R - 129^\circ = 40^\circ\, 0'\, 2\frac{28''}{41}$$

$$\xi_9{}^{I} - \xi_9 = 2\frac{28''}{41} \qquad \text{oder}$$

$$\xi_9{}^{II} = \frac{5}{4}\left(\varphi_{25} + 75^\circ - \tfrac{1}{2}\beta\frac{12}{37}\right) - 48^\circ = 40^\circ\, 0'\, 0{,}41''$$

$$\xi_9^{II} - \xi_9 = \frac{41''}{100}$$

3) Für das 11-Eck:

$$\xi_{11}^{I} = 48^0 - (\varphi_5 - \tfrac{1}{2}\beta_5^9) = 32^0\,43'\,39{,}735''$$

$$\xi_{11}^{I} - \xi_{11} = 1{,}553'' \qquad \text{oder}$$

$$\xi_{11}^{II} = \varphi_{17} + 20^0\,15' - \tfrac{1}{4}\beta_{29}^{20} = 32^0\,43'\,38{,}648''$$

$$\xi_{11}^{II} - \xi_{11} = 0{,}466 = \tfrac{1}{2}''$$

4) Für das 13-Eck:

$$\xi_{13}^{I} = \tfrac{1}{2}\left(\varphi_{37} + 126^0 - \gamma\,\frac{40}{41}\right) = 27^0\,41'\,32{,}6333''$$

$$\xi_{13}^{I} - \xi_{13} = 0{,}3256''$$

5) Für das 19-Eck:

$$\xi_{19}^{I} = 73^0 + \tfrac{1}{2}\beta_5^3 - \varphi_5^3 - \varphi_5 - \xi_9^{II} = 18^0\,56'\,49{,}064''$$

$$\xi_{19} - \xi_{19}^{I} = 1{,}462'' = 1\tfrac{1}{2}'' \qquad \text{oder}$$

$$\xi_{19}^{II} = \varphi_{25} + \tfrac{1}{2}\beta_5^9 = 18^0\,56'\,52.453$$

$$\xi_{19}^{II} - \xi_{19} = 1{,}827''$$

6) Für das 21-Eck:

$$\xi_{21}^{I} = \tfrac{1}{4}(93^0 - 2\varphi_5) = 17^0\,8'\,32{,}069''$$

$$\xi_{21} - \xi_{21}^{I} = 2{,}218'' = 2\frac{1''}{5}$$

7) Für das 23-Eck:

$$\xi_{23}^{I} = \varphi_{65}^{I} + \tfrac{1}{4}\left(\gamma_{89}^{80} - 78^0\right) = 15^0\,39'\,9.8''$$

$$\xi_{23}^{I} - \xi_{23} = 2''$$

8) Für das 25-Eck:

$$\xi_{25}^{I} = 6\varphi_{65}^{I} - 100^0\,30' = 14^0\,24' + 1.6''$$

$$\xi_{25}' - \xi_{25} = 1{,}6''$$

9) Für das 29-Eck:

$$\xi_{29}^{I} = \varphi_{13} + 21 - \tfrac{1}{2}\beta\,\frac{3}{5} = 12^0\,24'\,50{,}613''$$

$$\xi_{29}^{I} - \xi_{29} = 0{,}958'' = 1'' \qquad \text{oder}$$

$$\xi_{29}^{II} = 2\varphi_{37} + \tfrac{1}{2}\gamma_{89}^{80} - 33^0 = 12^0\,24'\,51{,}133''$$

$$\xi_{29}^{II} - \xi_{29} = 1{,}478'' = 1\,\frac{1''}{2}$$

10) Für das 31-Eck:

$$\xi_{31}{}^{I} = \varphi_5 + \tfrac{1}{2}\beta\,\frac{33}{65} - 93^0 = 11^0\,36'\,46{,}415''$$

$$\xi_{31} - \xi_{31}{}^{I} = 0{,}037'' \qquad \text{oder:}$$

$$\xi_{31}{}^{II} = \tfrac{1}{2}\beta\,\frac{12}{37} + 12^0 - \varphi_{13} = 11^0\,36'\,47{,}930''$$

$$\xi_{31}{}^{II} - \xi_{31} = 1{,}478'' = 1\frac{1''}{2}$$

11) Für das 37-Eck:

$$\xi_{37}{}^{I} = \varphi_{29} + \tfrac{1}{8}\beta_5{}^9 - 36^0 = 9^0\,43'\,49{,}163''$$

$$\xi_{37}{}^{I} - \xi_{37} = 2{,}134''$$

12) Für das 41-Eck:

$$\xi_{41}{}^{I} = 2\varphi_{41} + 9{,}^0 - \frac{3}{2}\,\gamma\,\frac{80}{89} = 8^0\,46'\,48{,}273''$$

$$\xi_{41} - \xi_{41}{}^{I} = 1{,}483'' = 1\,\frac{1''}{2} \qquad \text{oder:}$$

$$\xi_{41}{}^{II} = \varphi_{61} + \tfrac{1}{2}\gamma\frac{80}{89} - \varphi_{65}{}^{I} - 6^0 = 8^0\,46'\,49{,}544''$$

$$\xi_{41} - \xi_{41}{}^{II} = 0{,}212''$$

13) Für das 43-Eck:

$$\xi_{43}{}^{I} = 3\varphi_{65}{}^{II} + \gamma_5{}^{10} - 84^0 = 8^0\,22'\,20{,}63''$$

$$\xi_{43}{}^{I} - \xi_{43} = 1{,}1''$$

14) Für das 47-Eck:

$$\xi_{47}{}^{I} = \varphi_5 + 18^0 - 2\varphi_{13} - \tfrac{1}{2}\xi_9{}^{II} = 7^0\,39'\,34{,}867''$$

$$\xi_{47}{}^{I} - \xi_{47} = 0{,}4'' \qquad \text{oder:}$$

$$\xi_{47}{}^{II} = \varphi_{65} + \tfrac{1}{2}\beta\frac{33}{65} - 42^0 = 7^0\,39'\,37{,}133$$

$$\xi_{47}{}^{II} = \xi_{47} = 2{,}665''$$

15) Für das 53-Eck:

$$\xi_{53}{}^{I} = \varphi_{65}{}^{II} + 6^0 - \varphi_{41} = 6^0\,47'\,32{,}408''$$

$$\xi_{53} - \xi_{53}{}^{I} = 0{,}422''$$

16) Für das 59-Eck:

$$\xi_{59} = 4\varphi_{53} - \tfrac{1}{2}\beta\frac{48}{73} - \xi_9{}^{II} - 18^0 = 6^0\,6'\,5{,}68''$$

$$\xi_{59} - \xi_{59}{}^{I} = 0{,}422''$$

§. 24.

Es ist

$$(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma) = \sin^4\gamma+\cos^4\gamma+2\sin^2\gamma\cos^2\gamma = 1 \qquad \text{und}$$

$$\sin^4\gamma+\cos^4\gamma = 1-2\sin^2\gamma\cos^2\gamma$$

Ist nun

$$\sin\gamma_5^4 = \frac{4}{5} \quad \text{und} \quad \cos\gamma_5^4 = \frac{3}{5}$$

so ist

$$\sin^4\gamma_5+\cos^4\gamma_5 = \frac{44}{625}+\frac{3^4}{625} = 1-2\,.\,\frac{4^2\,.\,35}{625}$$

und

$$337 = 625-288$$

oder

$$337+288 = 625$$

Hieraus folgt allgemein:

$$a_n^4 = a_n^4(\sin^4\gamma_n+\cos^4\gamma_n)+2a_n^4\,.\,\sin^2\gamma_n\,.\,\cos^2\gamma_n$$

wo a_n eine Hypotenuse und γ_n ein zu a_n gehöriger Hypotenusenwinkel bedeutet, oder der Satz:

Jede Hypotenuse a_n^4 lässt sich in die Summe einer Hypotenuse

$$a_p = a_n^4(\sin^4\gamma_n+\cos^4\gamma_n)$$

und einer zu dieser gehörigen Kathete

$$2a_n^4\,.\,\sin^2\gamma_n\,.\,\cos^2\gamma_n$$

zerlegen; die andere Kathete ist

$$a_n^4(\sin^4\gamma_n-\cos^4\gamma_n)$$

Das Verhältniss $\frac{a_p}{a_n^4}$ lässt sich auch auf die Teilung des Kreisumfanges anwenden. Einige bemerkenswerte Lösungen sollen noch zum Schluss angegeben werden.

Es sei

$$1)\quad \text{tang}\,\tau_5 = \frac{337}{625} = (\sin^4\gamma_5+\text{coss}^4\gamma_5)$$

wo der Index 5 in T_5 auf das Ausgangsdreieck ${}^4\underset{5}{\triangle}{}^3$ hinweist.

Dann ist

$$\begin{aligned} \log 337 &= 2{,}5276299 \\ \log 625 &= 2{,}7958800 \\ \hline \log\text{tang}\,\tau_5 &= 0{,}7317499 \\ \tau_5 &= 28^0\ 20'\ 0{,}77'' \end{aligned}$$

Nun ist

$$\xi_9{}^I = 3\tau_5-45^0 = 85^0\ 0'\ 2{,}31''-45^0 = 40^0\ 0'\ 2{,}31''$$

also ist der wahre Unterschied

$$\xi_9^{I} - \xi_9 = 2{,}31''$$

Um diesen Centriwinkel zu construiren, zeichne man das rechtwinklige Dreieck $ABC(^{4}\underset{5}{\triangle}^{3})$, ziehe die Höhe AD und trage auf der Verlängerung $DE = DB$ ab. Man verbinde E mit C, zeichne

$$\angle\, CEF = \angle\, DEC$$

und verlängere den freien Schenkel, bis er die Verlängerung von DC in F schneidet, dann ist $\triangle\, FDE$ das pythagoreische Dreieck $^{175}\underset{337}{\triangle}^{288}$. Zeichnet man das rechtwinklige Dreieck GFH, in welchem die Katheten

$$GF = FD + DG = FD + FE = 288 + 337 \quad \text{und}$$
$$FH = FE = 337 \quad \text{ist, dann ist}$$
$$\angle\, FGH = \tau_5 = 28^0\, 20'\, 0{,}77''$$

Beschreibt man jetzt um G einen Kreis, trägt $\widehat{JK} = \tau_5$ auf der Peripherie ab, bis $\widehat{JL} = 3JK$ ist, und construirt $\widehat{JM} = 45^0$, dann ist $\widehat{ML} = 3\widehat{JK} - \widehat{JM} = \xi_9^{I}$. S. Fig. 10.

Setzt man ferner

2) $$\sin\sigma_5 = \frac{337}{625}$$

so ist

$$\sigma_5 = 32^0\, 37'\, 45{,}111''$$

Es ist dann

$$\xi_7^{I} = 2\sigma_5 + \beta_5^{9} - 42^0 = 51^0\, 25'\, 45{,}555''$$
$$\xi_7^{I} - \xi_7 = 2{,}698'' \quad \text{und}$$
$$\xi_{13}^{I} = 4\sigma_5 + \tfrac{1}{2}\beta_5^{5} - 105^0 = 27^0\, 41'\, 29{,}5065''$$
$$\xi_{13} - \xi_{13}^{I} = 2{,}8''$$

3) Setzt man ferner

$$\operatorname{tang}\tau_{13} = \sin^4\gamma_{15} + \cos^4\gamma_{13}$$

so ist

$$\operatorname{tang}\tau_{13} = \frac{21361}{28561}$$
$$\log 21361 = 4{,}3299216$$
$$\log 28561 = 4{,}4557734$$
$$\log\operatorname{tang}\tau_{13} = 0{,}8738482 - 1$$
$$\tau_{13} = 36^0\, 47'\, 35{,}194''$$

Es ist dann

$$\xi_{53} = \tau_{13} - 30^0 = 6^0\, 47'\, 35{,}194'' \quad \text{und}$$
$$\xi_{53}^{I} - \xi_{53} = 2{,}364'' \quad \text{und}$$
$$\xi_{11}^{I} = \tau_{13} - \tfrac{1}{2}\gamma_5^{4} + 22\tfrac{1}{2}^0 = 32^0\, 43'\, 41{,}013''$$
$$\xi_{11}^{I} - \xi_{11} = 2{,}831'' \quad \text{und}$$

$$\xi_{13}^{I} = \tau_{13} + \varphi_{41} - 12^0 = 27^0\ 41'\ 28{,}444''$$
$$\xi_{13} - \xi_{13}^{I} = 3{,}864''$$

4) Setzt man

$$\sin \sigma_{13} = \frac{21361}{28561}$$

so ist

$$\sigma_{13} = 48^0\ 24'\ 34{,}171''$$

Man erhält:

$$\xi_7^{I} = 2\sigma_{13} - \gamma_5^{3} + 24^0 = 51^0\ 25'\ 43{,}152''$$
$$\xi_7^{I} - \xi_7 = 0{,}295'' \quad \text{und}$$
$$\xi_{19}^{I} = \sigma_{13} - \tfrac{1}{2}\varphi_{61} - 28\tfrac{1}{2}^0 = 18^0\ 56'\ 49{,}09''$$
$$\xi_{19} - \xi_{19}^{I} = 1{,}436''$$

Die Construction von τ_{13} und σ_{13} ist der in 1) analog.

Um die Werte für die Bestimmungswinkel bis auf Bruchteile von Secunden genau zu erhalten, construire man sich den Constructionswinkel

$$\omega = (\varphi_{29} + 2\varphi_{41}) = 48^0\ 0'\ 18{,}741''$$

So erhält man z. B. für

$$\xi_{11}^{I} = \tau_{13} - \tfrac{1}{2}\gamma_5^{4} - \frac{\omega}{8} + 28\tfrac{1}{2}^0 = 32^0\ 43'\ 38.670'' \qquad \text{und}$$
$$\xi_{11} - \xi_{11}^{I} = 0{,}512''$$

und für

$$\xi_{13}^{I} = \tau_{13} + \varphi_{41} + \frac{\omega}{4} - 24^0 = 27^0\ 41'\ 33{,}129'' \qquad \text{und}$$
$$\xi_{13}^{I} - \xi_{14} = 0{,}821''$$

wendet man als Correctionswinkel

$$\omega = (\varphi_{29} + 2\varphi_{41}) = 48^0\ 0'\ 18{,}741''$$

an. Dieser ist leicht zu construiren.

Man erhält z. B. für ξ_7^{I} in 3):

$$\xi_7^{I} = \tau_{13} - \varphi_{13} + \frac{5}{16}\omega + 3^0 = 51^0\ 25'\ 42{,}986''$$

$$\xi_7^{I} - \xi_7 = 0{,}129''$$

und für ξ_{19}^{I} in 4):

$$\xi_{19}^{I} = 3 \cdot \sigma_{13} + \frac{5}{16} \cdot \omega - 177^0 = 18^0\ 56'\ 51{,}054''$$

$$\xi_{19}^{I} - \xi_{19} = 0{,}528''$$

Mittels des Correctionswinkels ω erhält man folgende Tabelle für die Bestimmungswinkel:

$$\xi - \xi^{I}$$

$$\xi_7{}^{I} = \tfrac{1}{2}\gamma_{5}^{3} - \frac{5}{4} \cdot \omega + 93^{\circ} = 51^{\circ}\ 25'\ 42.409'' \quad +0{,}448''$$

$$\xi_9{}^{I} = -\tfrac{1}{2}\gamma_{89}^{80} + \frac{17}{16} \cdot \omega + 21^{\circ} = 40^{\circ}\ 0'\ 0{,}171'' \quad -0{,}171''$$

$$\xi_{11}{}^{I} = \tfrac{1}{8}\gamma_{65}^{63} + \frac{13}{8} \cdot \omega + 54\tfrac{3}{4}^{\circ} = 32^{\circ}\ 43'\ 37.935'' \quad +0{,}247''$$

$$\xi_{13}{}^{I} = \tfrac{1}{2}\gamma_{13}^{12} + \frac{7}{16} \cdot \omega - 27^{\circ} = 27^{\circ}\ 41'\ 32{,}387'' \quad +0.079''$$

$$\xi_{19}{}^{I} = \tfrac{1}{2}\beta_{53}^{28} + \frac{3}{8} \cdot \omega - 15^{\circ} = 18^{\circ}\ 56'\ 50{,}453'' \quad +0{,}073''$$

$$\xi_{23}{}^{I} = \tfrac{1}{4}\beta_5{}^{3} - \frac{\omega}{16} + 13\tfrac{1}{2}^{\circ} = 15^{\circ}\ 39'\ 7{,}531'' \quad +0{,}295''$$

$$\xi_{25}{}^{I} = \tfrac{1}{2}\gamma_5{}^{10} - \frac{\omega}{8} - 20\tfrac{1}{4}^{\circ} = 14^{\circ}\ 24'\ 0{,}509'' \quad -0{,}509''$$

$$\xi_{29}{}^{I} = \tfrac{1}{4}\gamma_{61}^{60} + \frac{17}{8} \cdot \omega - 109\tfrac{1}{2}^{\circ} = 12^{\circ}\ 24'\ 49{,}869'' \quad -0{,}209''$$

$$\xi_{31}{}^{I} = \beta_5{}^{3} + \frac{5}{8} \cdot \omega - 39^{\circ} = 11^{\circ}\ 36'\ 46{,}523 \quad +0{,}058''$$

$$\xi_{37}{}^{I} = \beta_5{}^{6} + 2 \cdot \omega - 127\tfrac{1}{2}^{\circ} = 9^{\circ}\ 43'\ 47{,}248 \quad -0{,}221''$$

$$\xi_{41}{}^{I} = \tfrac{1}{4}\gamma_{37}^{35} + \frac{9}{4} \cdot \omega - 117^{\circ} = 8^{\circ}\ 46'\ 49{,}989'' \quad -0{,}223''$$

$$\xi_{43}{}^{I} = \tfrac{1}{2}\gamma_5{}^{2} + \frac{7}{16} \cdot \omega - 49\tfrac{1}{2}^{\circ} = 8^{\circ}\ 22'\ 19{,}878'' \quad +0{,}343''$$

$$\xi_{47}{}^{I} = \gamma_4{}^{5} + \frac{7}{4} \cdot \omega - 162^{\circ} = 7^{\circ}\ 39'\ 34{,}672 \quad -0{,}204''$$

$$\xi_{53}{}^{I} = \tfrac{1}{2}\beta_{29}^{20} - \frac{27}{16} \cdot \omega + 66^{\circ} = 6^{\circ}\ 47'\ 33{,}051'' \quad -0{,}221''$$

$$\xi_{59}{}^{I} = \tfrac{1}{2}\gamma_{85}^{84} + \frac{\omega}{16} - 37\tfrac{1}{2}^{\circ} = 6^{\circ}\ 6'\ 5{,}866'' \quad +0{,}236''$$

$$\xi_{61}{}^{I} = \beta_5{}^7 - \frac{7}{4} \cdot \omega + 78^0 = 5^0\,54'\,5{,}869 + 0{,}033''$$

$$\xi_{67}{}^{I} = \tfrac{1}{2}\gamma_5{}^2 + \frac{5}{8} \cdot \omega - 61\tfrac{1}{2}{}^0 = 5^0\,22'\,23454'' - 0{,}150''$$

Graeber.

2.

Erweiterung der Curvenclasse von constanter Krümmung.

Sind die Richtungscosinus der Tangente einer Curve f, g, h gegebene Functionen eines Parameters π, so lässt sich der Curvenbogen s noch als beliebige Function von π annehmen. Die Curve gehört einer speciellen Classe an, wenn s proportional π, also

$$s = c\pi \tag{1}$$

gesetzt wird. Nur für den besondern Fall, wo π dem Krümmungswinkel (d. h. $\partial\pi$ dem Contingenzwinkel der Tangente) proportional ist, hat die Curve constante Krümmung. Diese neue Beschränkung lassen wir hier fallen und suchen für beliebiges π Eigenschaften der Curve (1), namentlich Beziehungen zwischen Krümmungswinkel τ, Torsionswinkel ϑ, Bogen s und Parameter π.

Da keine algebraische Curve von constanter Krümmung bekannt ist (vom Kreise abgesehen), so wollen wir hier sogleich den Fall einführen, dass die Curve algebraisch sei. Dies findet offenbar statt, wenn man für ungleiche rationale Zahlen a, b setzt

$$f = \cos a\pi \cos b\pi;\quad g = \cos a\pi \sin b\pi;\quad h = \sin a\pi$$

Hieraus berechnet man:

$$\partial\tau = (a^2 + b^3 \cos^2 a\pi)\partial\pi^2$$

$$\partial\vartheta = \frac{b^2}{a}\left(\frac{a^2}{a^2 + b^2\cos^2 a\pi} + 1\right)\frac{\partial \cos a\pi}{\sqrt{a^2 + b^2 \cos^2 a\pi}}$$

Sei der elliptische Modul

$$\varkappa = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und $a\pi = \operatorname{am} u$ die Amplitude, ferner

$$\cos a\pi = \mathrm{cn}\, u = \frac{a}{b}\cot\varphi$$

dann werden die Integrale der vorstehenden Gleichungen:

$$\tau = \frac{\mathrm{el}\, u}{\varkappa !}; \quad \vartheta = b(\cos\varphi - \log \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)$$

Die Coordinatengleichungen der Curve sind:

$$x = \frac{c}{a^2+b^2}(a \sin a\pi \cos b\pi - b \cos a\pi \sin b\pi)$$

$$y = \frac{c}{a^2-b_2}(a \sin a\pi \sin a\pi + b \cos a\pi \cos b\pi)$$

$$z = -\frac{c}{a}\cos a\pi$$

Die Curve umläuft also spiralisch ein Rotationsellipsoid (resp. Hyperboloid)

$$(a^2-b^2)(x^2+y^2)+a^2z^2 = \frac{a^2c^2}{a^2-b^2}$$

während ihre Höhe z nach $\frac{a}{b}$ maligem Umlauf periodisch wiederkehrt. Ihr Krümmungswinkel τ stellt sich als Ellipsenbogen dar; die ganze Ellipse entspricht der Periode der z; die Exentricität ist $= k$ für grosse Halbaxe $= 1$. Mittelst des Torsionswinkels ϑ ist die Gleichung der Evolute bekannt:

$$x_1 = x + \frac{\partial e}{\partial \tau}(l + f' \,\mathrm{tg}\,\vartheta); \quad \text{etc.}$$

R. Hoppe.

Litterarischer Bericht

LVII.

P h y s i k.

Die Lehre von der Elektricität. Von Gustav Wiedemann. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Zweiter Band mit 163 — Dritter Band mit 32) eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1895. Friedrich Vieweg u. Sohn. 1126 + 1139 S.

Der 1. Band des Werkes unter anfänglichem Titel ist im 222. litt. Ber. S. 12, der 1. Band der „Lehre von der Elektricität" in 2. Reihe, 49. litt. Ber. S. 10 besprochen. Die im 2. und 3. Bande hinzukommenden Lehrgegenstände sind: Dielektrische Ladung der Körper; Töne beim Elektrisiren, Aenderung des Volumens, der Gestalt, der Elasticität und des optischen Verhaltens. Beziehungen zwischen Elektricität und Wärme, und zwar thermische und mechanische Wirkungen des elektrischen Stromes, Thermoelektricität, Temperaturänderungen der Contactstellen heterogener Leiter; Elektricitätserregung in Krystallen durch Temperaturänderungen und Druck; Elektrochemie, u. zw. Elektrolyse; ihr Einfluss auf den Leitungswiderstand und die elektromotorische Kraft im Schliessungskreise; Veränderungen der elektromotorischen Kraft der Metalle durch Einwirkung der sie umgebenden Flüssigkeiten; Theorie der Elektrolyse und Leitfähigkeit der Elektrolyte; Theorie der Elektricitätserregung beim Contact heterogener Körper; Arbeitsleistungen und Wärmewirkungen bei den elektrolytischen Processen; Elektro-

dynamik, und zwar Anziehung und Abstossung elektrischer Ströme; Verhalten der elektrischen Ströme gegen die Erde. Elektromagnetismus, u. zw. allgemeine Theorie der Magnetisirung; Verhalten der Magnete gegen elektrische Ströme; magnetische und elektromagnetische Messmethode; Gesetze der Magnete und Elektromagnete; Wechselbeziehungen zwischen dem Magnetismus und dem mechanischen Verhalten der Körper; Beziehungen des Magnetismus zur Wärme. Magnetisches Verhalten schwach magnetischer und diamagnetischer Körper, u. zw. Diamagnetismus; Einfluss des Magnetismus auf das dielektrische Verhalten, die Länge, die Leitfähigkeit und das thermoelektrische Verhalten diamagnetischer Stoffe; Beziehungen des galvanischen Stromes und des Magnetismus zum Licht und zur strahlenden Wärme; Beziehungen des Magnetismus zur dielektrischen Polarisation, zur chemischen Verwandtschaftskraft, zur Krystallisation, Cohäsion und Gravitation. H.

Dr. J. Frick's Physikalische Technik, speciell Anleitung zur Ausführung physikalischer Demonstrationen und zur Herstellung von physikalischen Demonstrations-Apparaten mit möglichst einfachen Mitteln. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Von Dr. Otto Lehmann, Professor der Physik an der technischen Hochschule in Karlsruhe. In zwei Bänden. Zweiter Band. Mit 1016 eingedruckten Holzstichen und 3 Tafeln. Braunschweig 1895. Friedrich Vieweg u. Sohn. 1054 S.

Der 1. Band, in 6. Auflage erschienen 1890, ist im 36. litt. Ber. besprochen. Der 2. Band, welcher die Experimente für Elektricität, Magnetismus, Optik und Akustik behandelt, ist verschieden vom ersten bearbeitet. Wegen der schnellen Folge neuer Entdeckungen und neuer Methoden in der Elektricitätslehre konnte nämlich der Herausgeber den Anschluss an theoretische Lehrbücher nicht beibehalten und liess überhaupt alle pädagogischen Gesichtspunkte fallen. Das Ganze ist jetzt ein wissenschaftliches Universum, in welchem die Anfertigung der Demonstrationsmittel und die Ausführung der Versuche gelehrt wird. Da nun die Vertrautheit mit der Theorie Zweck der Experimente ist, so kann sie nicht deren vorausgehende Bedingung sein. Zum Gebrauch in jeder Schule ist es also erforderlich, dass der Lehrer die ganze Theorie, welche das Buch als bekannt voraussetzt, nach eigenem Ermessen hinzufügt. Die Vorrede spricht vom Gebrauche in technischen Hochschulen und Mittelschulen, d. i. in Fachschulen. Die Teile der Doctrin, denen die Versuche gelten, sind der Reihe nach, in betreff der Elektricität: ihre Erzeugung durch Reibung; Verteilung und

Bindung der Elektricitäten, Condensatoren; Mitteilung an und von Isolatoren, Elektrisirmaschinen; Erzeugung durch chemische Processe; chemische Wirkung der Elektricität; Elektrodynamik; Magnetismus, Elektromagnetismus; Wechselwirkung von Magneten und Stromleitern; Induction; Erzeugung der Wärme durch Elektricität; elektrische und magnetische Grössen; Durchgang durch schlechte Leiter; Staub- und Lichtfiguren; Anlagen für Demonstrationen — in betreff strahlender Energie: ihre Ergänzung; Absorption; chemische Wirkung, Phosphorescenz, Fluorescenz; Fortpflanzung; Zurückwerfung; Brechung; Interferenz; Beugung; Polarisation; doppelte Brechung — in betreff optischer Instrumente und Lichtempfindung: Sehen: Täuschungen; Fernrohre; Mikroskop — in betreff der Tonempfindungen und der Musikinstrumente: Erzeugung des Schalles durch Schwingungen; Resonanz, musikalische Instrumente; Ausbreitung des Schalles; zu dessen Analyse; Uebertragung; Harmonie. H.

Grundzüge der mathematischen Chemie. Energetik der chemischen Erscheinungen. Von Dr. Georg Helm, o. Professor an der K. technischen Hochschule zu Dresden. Mit 17 Figuren im Text Leipzig 1894. Wilhelm Engelmann. 138 S.

Das Buch würde ein sehr willkommenes und verdienstliches Werk sein, wenn es nicht in so unklarer Sprache abgefasst wäre. Im Anfang ist vom Energieprincip die Rede, und soll Folgendes dessen Erklärung sein. „Parameter heissen die Grössen — wie Coordinaten, Geschwindigkeit, Temperatur, elektrische Ladung u. s. w. — welche den augenblicklichen Zustand eines Körpers bestimmen.“ Eigenenergie eines Körpers wird nun eine Function aller jener Parameter genannt und von dieser Function gesagt, dass bei allen Veränderungen ihr Gesamtbetrag in der Natur unverändert bleibe „Das so gefasste Energieprincip sei offenber nicht schlechthin beweisbar, sondern sage eine Betrachtungsweise der Naturerscheinungen aus, die ihre Berechtigung durch den Erfolg nachzuweisen hat“. Dies soll nun eine Erklärung des Begriffs der Energie sein! Allem Ausgesagten fehlt offenbar das Object. Die Energie soll eine Function sein; die Function bleibt unbekannt, auch von ihren Argumenten werden nur einige genannt, sie ist daher als Attribut schlechthin inhaltslos in Ermangelung der Grössen, von denen sie nicht abhangen soll. Demnach ist auch die Aussage, dass sie die genannte Eigenschaft habe, als unbeweisbare Behauptung sinnlos; es konnte nur von dem Problem, die Function und ihre Argumente für die Chemie zu finden, die Rede sein, wie solche von Leibniz und Huygens für die reine

Bewegung gefunden worden ist. Wenn schliesslich das Energieprincip eine Betrachtungsweise von Erfolg genannt wird, so vermisst man leider bei der hier dargebotenen Betrachtungsweise jede Hinweisung auf den resultirenden Erfolg. Dass die gesuchte Function von vorn herein als algebraische Summe von Effecten betrachtet werde, wird nirgends ausgesprochen. Es werden vielmehr immer nur die partiellen Effecte einzelner Parameter in Betracht gezogen und der anfänglichen Erklärung zuwider Eigenenergien genannt. Nach jener Erklärung bezieht sich der Name auf einen Körperteil bei voller Mitwirkung aller Parameter, wo offenbar das „Eigen" ganz überflüssig steht, nachher auf den Anteil des einzelnen Parameters. Für den Kundigen gleicht sich freilich der Unterschied im Gesamtbetrage, der leider nicht einmal am Schlusse formulirt wird, aus. So ist dann der ganze Vortrag mehr ein Monolog als eine Lehre. Hoppe.

Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg von Dr. Franz Neumann, Professor der Physik und Mineralogie. Siebentes Heft. Vorlesungen über die Theorie der Capillarität. Herausgegeben von Dr. A. Wangerin, Professor der Mathematik an der Universität Halle. Mit Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 234 S.

In der Einleitung werden die Fundamentalsätze der Laplace'schen Capillaritätstheorie aufgestellt, und vom Herausgeber die Verhältnisse der spätern Bearbeitungen von Poisson, Stahl, Boltzmann, Weinstein, Mensbrugghe dargelegt, nachdem die von Gauss, der jene Sätze zum erstenmal vollständig begründet hat, schon vorher besprochen war. Der Vortrag selbst leitet, wie Gauss, die Theorie aus mechanischem Princip ab. Die Gegenstände der folgenden Capitel sind: Ansteigen oder Sinken der Flüssigkeiten an ebenen Platten und in Capillarröhren; Druck der Flüssigkeit auf das umgebende Gefäss oder auf eingetauchte Körper, Adhäsionsplatten; die Gestalten von Flüssigkeitstropfen; allgemeine Sätze über das Gleichgewicht einer Flüssigkeit, welche sich in einer andern von demselben specifischen Gewicht befindet; Zusammenhang zwischen der Gaussschen und Laplace'schen Ableitung der Grundgleichungen der Capillaritätstheorie. H.

Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vectorgrössen in der Physik. Von Dr. A. Föppel, Professor an der

Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 413 S.

Den ersten Abschnitt des Buches bildet: die Algebra und Analysis der Vectoren. Zu welchem Zwecke der Verfasser durch Gebrauch dieser symbolischen Rechnungsweise, entsprechend den Methoden von Hamilton und Grassmann, durch welche bekanntlich nichts gewonnen wird, einer Rechnungsweise, von der auch er selbst nicht behauptet, dass sie notwendig oder förderlich sei, das Verständniss der physikalischen Theorie erschwert, ist nicht zu ersehen. Die folgenden Abschnitte sind betitelt: die Grundlinien der Maxwell'schen Elektricitätslehre; weiterer Ausbau des Systems; die Energiebeziehungen im elektromagnetischen Felde zwischen ruhenden Leitern; die Elektrodynamik bewegter Leiter; Uebersicht über die übrigen Teile der Maxwell'schen Theorie. H.

Die Bestimmung des Molekulargewichts in theoretischer und praktischer Beziehung. Von Dr. Karl Windisch. Mit einem Vorwort von Professor Dr. Eugen Sell. Mit in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1892. Julius Springer. 542 S.

Nachdem die in vielen Zeitschriften zerstreuten Original-Abhandlungen der Forscher, welche zur Gewinnung des heutigen Standpunktes der theoretischen Chemie geführt haben, bereits gesammelt und herausgegeben worden sind, hat der Verfasser das sehr verdienstliche Unternehmen in Ausführung gebracht, die bis jetzt bekannt gewordenen Methoden der Bestimmung der Molekulargewichte in einem Werke zusammenzustellen. Im Vorwort wird ihm das Zeugniss ausgestellt, dass er vermöge seiner chemischen, physikalischen und mathematischen Kenntnisse durchaus seiner Aufgabe gewachsen sei. Voraus geht die Entwickelungsgeschichte der Doctrin.

H.

Nikola Tesla's Untersuchungen über Mehrphasenströme und über Wechselströme hoher Spannung und Frequenz. Mit besonderer Berücksichtigung seiner Arbeiten auf den Gebieten der Mehrphasenstrommotoren und Hochspannungsbeleuchtung zusammengestellt von Thomas Commerford Martin. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit 313 Abbildungen. Halle a. S. 1895. Wilhelm Knapp. 508 S.

Nikola Tesla, geboren 1857 in Smilja im Komitat Lika (Grenzland von Oesterreich-Ungarn) bildete sich zum Lehrer der Mathe-

matik und Physik aus, vertauschte aber diesen Beruf mit der Elektrotechnik, begann seine Tätigkeit in Paris, setzte sie in Amerika erst unter Edison, dann selbständig fort. Er gelangte zu neuen, hervorragenden Erfindungen, indem er die Wirkungen in verschiedenen, bisher noch nicht angewandten Verhältnissen gründlich durchforschte. Diese werden nun von Martin in 4 Abschnitten: Mehrphasenströme; Erscheinungen bei Strömen von hoher Frequenz und hoher Spannung, verschiedene Erfindungen und Schriften, Tesla's erste Phasenmotoren und sein mechanischer und elektrischer Oscillator — dargelegt, einzeln I. ein neues System von Wechselstrommotoren und Transformatoren; das Tesla'sche rotirende magnetische Feld, Motoren mit geschlossenen Leitern, synchrone Motoren, Drehfeldtransformatoren; Abänderungen und Erweiterungen der Tesla'schen Mehrphasensysteme; Verwertung der gewöhnlichen Typen von Gleichstrommaschinen; Verfahren zur Erzielung einer gewünschten Geschwindigkeit des Motors oder Generators; Regulator für Drehstrommotoren; von selbst angehende synchrone Motoren mit nur einem Stromkreise; Verwandlung eines Motors mit doppeltem Stromkreis in einen solchen mit einfachem Stromkreis; Motor mit künstlich erzeugter Verspätung; andere Methode zur Verwandlung eines von selbst angehenden Motors in einen synchronen Motor; durch magnetische Remanenz wirkender Motor; Methode zur Erzielung der Phasendifferenz mittels magnetischer Schirmwirkung; Type des Tesla'schen Einphasenmotors; Motoren mit Stromkreisen von verschiedenem Widerstande; Motor mit gleicher magnetischer Energie im Felde und Anker; Motoren, bei denen die Maxima der magnetischen Wirkung im Anker und Feld zusammenfallen; Motor, welcher auf der Phasendifferenz in der Magnetisirung der innern und äussern Teile eines Eisenkerns beruht; eine andre Type des Tesla'schen Inductionsmotors; Verbindungen eines synchronen und eines selbst angehenden Motors; Motor mit einem Condensator im Ankerstromkreise; in einem der Feldmagnetstromkreise; Tesla's Mehrphasentransformator; Transformator für constanten Strom mit magnetischem Schirm zwischen den Spulen des primären und secundären Stromkreises. II. Versuche mit Wechselströmen von sehr hoher Frequenz und deren Anwendung auf Methoden der künstlichen Beleuchtung; Versuche mit Wechselströmen von hoher Frequenz und hoher Spannung; über Licht und andre Erscheinungen hoher Frequenz; Ausführlicheres über Tesla's Wechselstromgeneratoren für hohe Frequenz; Apparate zur Erzeugung von Wechselströmen mittels elektrostatischer Induction; Massage mit Strömen von hoher Frequenz; elektrische Entladung in Vacuumröhren. III. Methode zur Umwandlung von Wechselströmen in Gleichströme, Condensatoren mit in Oel tauchenden Platten; registrirender elektrolytischer

Zähler; thermomagnetische Motoren und pyromagnetische Generatoren; funkenlose Dynamobürsten und Commutatoren; Regulirung der Gleichstromdynamomaschinen mittels einer Hülfsbürste; Verbesserung in der Construction von Dynamomaschinen und Motoren; Tesla's Gleichstrom-Bogenlicht-System; Verbesserung an Unipolarmaschinen. IV. Tesla's Ausstellung auf der Chicagoer Weltausstellung; sein mechanischer und elektrischer Oscillator. H.

Lehrbuch der Physik für Studierende. Von Dr. H. Kayser, Professor an der Universität Bonn. Zweite, verbesserte Auflage Mit 384 in den Text gedruckten Abbildungen. Stuttgart 1894.. Ferdinand Enke. 564 S.

Obgleich die Durchführung und Handhabung der Lehren im einzelnen eine durchaus correcte ist, so schliesst sich seltsamerweise die allgemeine Aufstellung und Einführung noch ganz der irrigen und unklaren Auffassung des ungebildeten Laien an, ohne die Irrtümer mit einem Worte zu berichtigen. So wird z. B. der Satz aufgestellt: Alle Körper besitzen Trägheit, d. h. sie haben das Bestreben, ihren Zustand der Ruhe oder Bewegung unverändert beizubehalten, solange keine Kräfte auf sie wirken. Der wahre Sachverhalt ist im Gegenteil: Sie besitzen Trägheit, d. h. — nach Wortsinn und der Wirklichkeit entsprechend — sie haben kein Bestreben, ihren Bewegungszustand zu verändern, wie überhaupt keiner Substanz ein reflexives Vermögen zukommt; jede solche Veränderung ist Wirkung äusserer Kräfte, d. i. von Kräften anderer Körper. Erstens ist es offenbar unsinnig, ein Bestreben Trägheit zu nennen; zweitens ist es unsinnig die Beibehaltung eines unangefochtenen Besitztums zum Ziel eines Strebens zu machen; nur wo äussere Kräfte auf Aenderung wirken, hätte das Streben als ein bekämpfendes einen Sinn, und gerade für diesen Fall wird es nicht behauptet, findet auch wirklich nicht statt. Nach Allem würde kein Anlass sein, einen Satz über die Trägheit der Körper aufzustellen, wenn es nicht gälte einer irrigen Meinung entgegenzutreten. In der Tat begünstigt die unüberlegte Beobachtung überwiegend die Auffassung, als begegneten die äusseren Kräfte einem Widerstande in der Beharrung. Es ist also allerdings Grund, durch entschiedene Aussage eine Täuschung fern zu halten, nämlich durch die Aussage: Die Bewegung ist ein Zustand eines Körpers; auf diesen wirken äussere Kräfte stets mit ihrem vollen von der Bewegung ganz unabhängigen Werte. Der Verfasser tut das Gegenteil: er adoptirt die Täuschung und macht dadurch seine Lehre populär — jedoch in so unklarer Rede, dass

es für das Folgende so gut ist, als wenn der Unsinn nicht gesagt worden wäre. Das Lehrbuch behandelt nach einander: die Mechanik, die Aggregatzustände, die Akustik, den Magnetismus, die Elektricität und die Optik. Die Lehrweise ist beschreibend und mitteilend. Auf Erklärung geht sie nicht eben tief ein, stellenweis kaum hinreichend zum Verständniss; auch wird dazu keine Rechnung, weder algebraische noch analytische verwandt, geometrische Kenntnisse nur, soviel zur Beschreibung nötig, beansprucht. Dagegen ist besonderer Fleiss der Bearbeitung darauf gerichtet, für alle Lehren die quantitativen Bestimmungen in numerischen Angaben und Formeln zu liefern, und die Wege ihrer Ermittelung nebst den dazu geeigneten Apparaten zu zeigen. Hoppe.

Die Erhaltung der Arbeit. Von Dr. Richard Heger, a. o. Honorarprofessor a. der Königl. Sächs. Technischen Hochschule und Gymnasial-Oberlehrer in Dresden Hannover 1896. Helwing. 305 S.

Die Lehrmethode ist ein originelles Kunstwerk. Sie nimmt die geläufigen Begriffe ohne weiteres auf und geht von den Erfahrungen aus, welche sich ohne Experiment in einem Punkte der Erde, diesen als fest betrachtet, darbieten. Der Begriff der Arbeit wird gleich anfangs eingeführt, ihre Uebertragung und Verwandlung, einschliesslich der thermischen Gestalt, erläutert. Hierbei und hiernach wird ausführlich auf die Mechanik eingegangen. Letztere erscheint indes stets als notwendige Basis der Theorie der Arbeit, nicht als hergeleitet aus ihr, wie ein- oder mehrmal versucht worden ist das Verhältniss darzustellen. Die Wahl der Methode und der Reihenfolge der Themata zeigt sich darin ausserordentlich glücklich, dass, obgleich die Präcision und Idealität nur stufenweis gewonnen wird, doch nie ein Mangel verhüllt oder verschwiegen vorkommt. „Masse" und „Kraft" werden anfänglich durch „Gewicht" vertreten, „lebendige Kraft", unter dem Namen „Wucht" eingeführt, aber erst später beim „Stosse" vollständig bestimmt. Die Relativität der „Geschwindigkeit" wird durchgängig ignorirt; dagegen lässt sich nichts sagen, da der doctrinäre Begriff der Arbeit selbst nur absolute Geschwindigkeit kennt. Die so entwickelte Lehre wird für alle Fälle der Mechanik, bezüglich auf starre, elastische, flüssige Körper und Gase mit Eingehen auf technische Verwendung ausgeführt, dann die elektrische Arbeit behandelt. H.

Lehrbuch der Experimentalphysik für Studirende. Von Dr. Emil Warburg, Professor an der Universität Freiburg. Mit

408 Original-Abbildungen im Text. Freiburg i. B. und Leipzig 1893. J. C. B. Mohr. 381 S.

Es werden nach einander behandelt: die mechanischen Grundbegriffe; die Mechanik starrer Körper; flüssiger Körper; Elasticität, Viscosität, Oberflächenspannung, Diffusion, Absorption; Schall; Wärme; Strahlung, insbesondere des Lichts; Elektricität und Magnetismus. Jeder dieser Hauptteile ist wieder in Unterabteilungen geordnet, entsprechend den vielen zu erforschenden Fragen und Seiten der Betrachtung, und jede Unterabteilung zeigt eine Reihe von Lehren durch Experiment dargetan, dann in Sätzen formulirt. Obwol nun für Ordnung der Lehren nach theoretischem Gesichtspunkt das Mögliche getan ist, so hat das Ganze doch noch mehr die Gestalt einer Sammlung von Gesetzen ohne theoretisches Band innerhalb eines Bezirks zusammengehöriger Vorgänge als einer Theorie derselben. In der Tat ist es durch die Natur einer Erfahrungswissenschaft von so grossem Umfang geboten, die Schwierigkeiten der Feststellung der einzelnen Gesetze von denen der speculativen Arbeit getrennt zu erhalten, damit sie sich nicht häufen und vergrössern. Da indes stets Erforschung und Erfindung Hand in Hand gehen müssen, so kann im engern Bezirke der Vorgänge die Trennung nicht stattfinden, zeigt sich aber in neuster Zeit unabweislich. Einwände sind im vorliegenden Buche nur gegen einige sehr seltsame Aeusserungen des Verfassers zu machen. Gleich im Anfang lehrt er: die Naturwissenschaften knüpften an einen vorgefundenen Trieb des Menschen, zwischen den von der Natur dargebotenen Tatsachen den Zusammenhang aufzusuchen, an; dem Triebe zu genügen wäre ihre Aufgabe. Erst am Schlusse fügt er hinzu: der eingepflanzte Trieb führt auch zu dem Ziele die Naturkräfte zu beherrschen und sie in den Dienst menschlicher Zwecke zu stellen. Natürlich verhält es sich umgekehrt: der letztgenannte, niemandem unbekannte Gewinn ist es eben, was jenen Trieb hervorruft. Die Beherrschung der Tatsachen vermöge der Kenntniss ihres gesetzlichen Zusammenhangs kennen und üben wir von Kindheit an; sie auszudehnen strebt bewusstermassen die Wissenschaft. Der Verfasser spricht hier vom Forschungstriebe wie ein Dilettant, dem es um Curiositäten zu tun ist. Weiterhin nennt er Kräfte, die in die Ferne wirken, „scheinbare" Fernkräfte. Er hat aber nirgends Kräfte denken gelehrt, die nicht in der Ferne wirken, da doch zwischen zusammenfallenden Punkten keine bewegende Kraftwirkung denkbar ist. Statt dessen hätte vielmehr das am Seile hangende Gewicht eine s c h e i n b a r e Nichtfernkraft genannt werden müssen. Der Verfasser aber bezeichnet allein die kosmische Attraction (Schwerkraft ohne Seil) als „scheinbare" Fernkraft und gibt — in respectvoller Berücksichtigung der

Menge in Amerika und England erschienener Schriften müssiger Grübler — ihre Erklärung für ein noch nicht gelöstes Problem aus. Diese Aeusserung, die mit seiner ganzen Lehre in keiner Verbindung steht, möchte wol schwerlich aus seinem Gedanken entspringen. Drittens wird in § 81. der Trägheit eines bewegten Körpers ein Widerstand gegen Beschleunigung durch äussere Kräfte zugeschrieben, eine Aussage, die dem Princip der Dynamik direct widerspricht. Ausserdem ist dieser § 81. überschrieben: „Das d'Alembert'sche Princip"; von diesem Princip ist aber weder hier noch sonst im Buche eine Spur zu finden. Wie die genannten Stellen, die wie Tintenkleckse in einer ganz vernünftigen Schrift erscheinen, in das Buch gekommen sind, mag begreifen wer will. Hoppe.

Grundzüge der Molecular-Physik und der mathematischen Chemie, dargestellt von Dr. W. C. Wittwer, o. Professor der Physik am k. Bayr. Lyceum zu Regensburg. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Stuttgart 1893. Konrad Wittwer. 304 S.

Die nach einander behandelten Themata sind: der Aether; die Constitution der Körper nebst den Beziehungen des Aethers zu ihnen; die Grundzüge der Chemie; die Wärme; die Elektricität. In der Einleitung bespricht der Verfasser die Frage über die Existenz von Fernwirkungen, constatirt, dass der grösste Teil der Physik sich auf Fernwirkungen gründet, hält daher ganz entschieden die Frage für bedeutungslos. Dennoch räumt er ihre Berechtigung ein und lässt den logischen Fehler der Gegner unbeachtet. Offenbar kann man nicht die Lösung einer Frage anstreben, ehe man ihren Sinn versteht und anzugeben vermag, was sie sucht. Der Verfasser spricht die Frage mit den Worten aus: Wie macht es die Erde, dass der losgelassene Stein sich ihr zu nähern strebt? Die Beantwortung ist leicht genug: Die Erde ist da, ihr Dasein ist hinreichende Bedingung für die bestimmte Bewegung des Steins. Eine Causalfrage wird aus gutem Grunde nicht aufgeworfen. Die Physik hat die Ursachen aller Naturveränderungen zu erforschen. Das Attractionsgesetz verändert sich nicht, bietet folglich nichts dar, dessen Ursache zu suchen wäre. Solange demnach die Gegner keine andre Frage klar und deutlich gestellt haben, ist kein Problem aufgewiesen. Wie man hier liest, soll die Anzahl der Gegner eine bedeutende geworden sein; es ist aber nicht gesagt, welcherlei Geister zu ihnen gehören; ihr Zuwerkegehen spricht nicht dafür, dass ihre Menge eine achtunggebietende wäre. In der Abhandlung selbst handelt es sich zunächst um Correction des newtonschen Attractionsgesetzes rücksichtlich

kleiner Entfernungen. Zur Ermittelung der umfassenden Attractionsfunction werden mehr directe Schlüsse und Betrachtungen als Rechnung angewandt. Das Verfahren ist selbständig gewählt, die Resultate zumteil abweichend von denen anderer Autoren. Eine Zusammenstellung hat der Verfasser bereits 1870 in einer Schrift: „Die Molekulargesetze" — gegeben. In der vorliegenden 2. Auflage sind Anwendungen neuer Beobachtungen hinzugekommen. Die Vorrede sagt, dass deren Ergebnisse vielfach mit den herrschenden Ansichten in Collision sich befänden, doch nur in Punkten, die auch bisher ohnedies streitig waren. Hoppe.

Terrestrial Magnetism. An international quarterly journal. Published under the auspices of the Ryerson physical laboratory A. A. Michelson, Director. Edited by L. A. Bauer. With the cooperation the following Associates: C. Abbe, B. Baracchi, W. von Bezold, E. Biese, F. H. Biegelow, C. Börgen, C. Chistoni, W. Doberck, M. Eschenhagen, J. Hann, G. Hellmann, S. C. Hepites, D. A. Goldhammer, A. Lancaster, C. Lagrange, S. Lemström, G. W. Littlehales, J. Liznar, T. C. Mendenhall, Th. Moureaux, F. E. Nipher, L. Palazzo, van Rijckevorsel, A. W. Rücker, E. Schering, A. Schmidt (Gotha), C. A. Schott, A. Schuster, M. Snellen E. Solander, J. P. van der Stok, R. F. Stupart, A. de Tillo, H. Wild „Magnus magnes est ipse globus terrestris" (Gilbert, „de Magnete.") Vol. I. No. 1. Chicago, Januar 1896. The University of Chicago Press. 54 S.

Die 1: Numer dieser neuen Zeitschrift enthält folgende Abhandlungen:

A. Schuster: Elektrische Ströme erzeugt durch rotirende Magnete.

Ad. Schmidt (Gotha): Die Verteilung des erdmagnetischen Potentials in Bezug auf beliebige Durchmesser der Erde.

L. A. Bauer: Halley's neueste Karte gleicher Variation.

Dann folgen Briefe an den Herausgeber, Noten und litterarische Berichte. H.

Cours de physique de l'École Polytechnique. Par M. J. Jamin, Premier supplément. Par M. Bouty, Professeur à la Faculté des

Sciences de Paris. Chaleur, Acoustique. Optique. Paris 1896 Gauthier Villars et fils. 183 S.

Die Reihe der in der Entwickelung der Wärmetheorie behandelten Gegenstände sind folgende: Messung der Temperaturen; Principien der Thermodynamik; Compressibilität, Dilatationen, Zustandsveränderungen; Theorie der Dissociation nach Gibbs; osmotische Pression nach van t'Hoff; kritischer Punkt, capillare Phänomene In der Akustik und Optik: Fortpflanzung der vibratorischen Bewegung; Fortpflanzung des Schalles; Untersuchung der Vibrationen; Fortpflanzung des Lichtes; Diffraction; Interferenzerscheinungen und ihre Anwendungen. H.

Repetitorium der Experimentalphysik für Studierende auf Hochschulen. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Mediciner und Pharmaceuten. Von Dr. L. Weber, Professor der Physik an der Universität Kiel. Mit 12 in den Text gedruckten Abbildungen München und Leipzig 1895. Dr. E. Wolff. 256 S.

Das Buch enthält die Grundlagen der Experimentalphysik ungefähr in dem Umfange, wie sie in den einleitenden Uebersichten eines Praktikums für Mediciner und Pharmaceuten vorgetragen zu werden pflegen. Ein allgemeines Anschauungsbild der bekannteren Apparate und Experimente wird dabei vorausgesetzt und vorzugsweise die grundlegenden Deductionen und leitenden Ideen der einzelnen Disciplinen in präciser Form zur Darstellung gebracht. Die mathematischen Hülfsmittel sind vereinfacht, das Detail der Experimentalphysik mit ihren vielseitigen Anwendungen nur angedeutet und nur insoweit berücksichtigt, als neue, grundlegende Gesichtspunkte darin enthalten sind. H

The Electrical World. Published every saturday by the W. J. Johnston Company, limited. Vol. XXIV. nr. 15. New York. 1894. 4⁰. 24 S.

Die seit 1874 bestehende Zeitschrift bringt eine grosse Anzahl kurzer Mitteilungen sehr mannigfaltigen, grösstenteils technisch-physikalischen Inhalts. In vorliegender Numer findet sich eine Biographie des durch zahlreiche philosophisch-mathematische Schriften bekannten Alexander Macfarlane, geboren 1851 zu Blaitgowria in Schottland, nebst Nachrichten über seine Werke. H.

On the analytical treatment of alternating currents. (With discussion.) By Prof. A. Macfarlane, University of Texas, Austin, Texas. New York, American Institute of Electrical Engineering. 8 S.

Der Verfasser spricht die Ansicht aus, dass die analytische Behandlung der alternirenden Ströme die Algebra der Ebene (mit Complexen) erfordere, so jedoch, dass sie mit der Algebra des Raumes (Quaternionen) harmonire, und führt es aus. Es folgt eine Debatte. H.

Lehrbuch der Experimentalphysik. Von Adolph Wüllner. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 1000 S.

Das sehr bekannte Buch gibt seiner Bestimmung gemäss unter dem steten Hinweis auf die Originalarbeiten eine Uebersicht über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik und über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zur Zeit gelangt ist.
H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, Mor., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. (Schluss-)Bd. Vom J. 1668 bis zum J. 1759. 2. Abtlg. Die Zeit von 1700—1726. gr. 8⁰. (S. 253—472 mit 30 Fig.) Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Fortschritte, die, der Physik i. J. 1889. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 45. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8⁰. (XLIX, 821 S.) 3. Abth. Physik der Erde. Red. v. Rich. Assmann. gr. 8⁰. (LVII, 793 S.) Braunschweig, Vieweg. à 30 Mk.

— dass. i. J. 1894. 50. Jahrg. 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein gr. 8⁰. (LXXIV, 600 S.). Ebd. 22 Mk. 50 Pf. 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. gr. 8⁰. (LI, 716 S.) Ebd. 25 Mk.

Grassmann's, Herm., gesammelte mathemat. u. physikal. Werke. Hrsg. v. Frdr. Engel. 1. Bd. 2. Thl. Die Ausdehnungslehre v. 1862. In Gemeinschaft mit Herm. Grassmann d. J. hrsg. v. Frdr. Engel. gr. 8⁰. (VIII, 511 S. m. 37 Fig.) Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Matthiessen, Ludw., Grundzüge der antiken u. modernen Algebra der litteralen Gleichungen. 2. wohlf. (Titel-)Ausg. gr. 8⁰. (XVI, 1001 S.) Ebd. 8 Mk.

Rosenberger, Ferd., Jsaac Newton und seine physikalischen Principien. Ein Hauptstück aus der Entwickelungsgeschichte der modernen Physik. gr. 8⁰. (VI, 536 S. m. 25 Abbildgn.) Leipzig, Barth. 13 Mk. 50 Pf.

Litterarischer Bericht

LVIII.

Sammlungen.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Von Karl Schwering, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren. Erster — zweiter — dritter Lehrgang. Freiburg i. Br. 1896. Herder. 242 S.

Durch Uebungen, Ausrechnung von Zahlenbeispielen und Beantwortung von Fragen, werden die Schüler, mit Voraussetzung der 4 Species in dekadischen Zahlen, ohne direct ausgesprochene Belehrung zum Verständniss und zur Aneignung der elementarsten für die Arithmetik notwendigen Begriffe geführt, der Brüche, der Potenzen, des Gebrauchs der Buchstaben, der Gleichungen u. s. w. so dass die Reihenfolge der Aufgaben einer beständig fortschreitenden Höhe des Standpunktes der Entwickelung entspricht. Ausgeschlossen sind: Negative, Irrationale, Potenzwurzeln, höhere Gleichungen. Die numerischen Resultate sind stets angegeben. H.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. Von Dr. Friedrich Reidt, Professor am Gymnasium in Hamm. I. Teil: Trigonometrie. Vierte Auflage. Neu bearbeitet von A. Mach, Professor am Gymnasium in Kreuznach. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 250 S.

Auflösungen und Aufgaben in der Sammlung (s. vorstehenden Titel) 88 S.

Die Aufgaben sind zum Teil numerische in ganzen Zahlen, zum Teil algebraische in Buchstaben, zum Teil bestimmt für den Gebrauch siebenstelliger Tafeln, der Folge nach gehörig zur Goniometrie, zur ebenen, dann zur sphärischen Trigonometrie, und zwar erst am rechtwinkligen, dann am beliebigen Dreieck. H.

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von Dr. Adolf Hochheim, Professor. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. A. Aufgaben. — B. Auflösungen. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 86 + 106 S.

Die Aufgaben dieses 1. Hefts sind darauf gerichtet, die gebräuchlichen Rechnungsformen, als gegebene Doctrin, einzuüben. Die analytische Bedeutung und Bestimmung dieser Rechnungsformen für Untersuchung von Problemen konnte hier nicht wol zutage treten. Da letzterer Gesichtspunkt hier nicht in Betracht kam, sosind auch die aus der neuern synthetischen Geometrie stammenden Rechnungsformen berücksichtigt worden, was namentlich da, wo das Buch für die Schule in Anwendung kommt, zweckmässig sei mag. Viel Sorgfalt ist darauf verwandt, das Erlernen zu erleichtern Die „Auflösungen" geben nicht nur Resultate, sondern auch die Weg der Ausführung der Forderungen. H.

Uebungsbuch zur Algebra. Von Adolf Sickenberger, k. Gymnasialprofessor uud Director der Luitpold-Kreisrealschule zu München. Erste Abteilung. Erste und zweite Stufe der Rechnungsarten einschliesslich der linearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Zweite Auflage. München 1894. Theodor Ackermann. 106 S.

Die 1. Auflage ist im 35. litterarischen Bericht Seite 31 besprochen; in der 2ten ist die Zahl der Uebungsbeispiele etwas vermehrt worden. H.

Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Von Dr. W. Láska. Mit drei Tafeln. Braunschweig 1894. Vieweg und Sohn. 1671 S.

Eine so umfassende Formelsammlung ist gewiss noch nie herausgegeben worden. Glücklicherweise tritt auch gleich dieser erste Versuch der Bearbeitung eines solchen Werkes mit guter Wahl der

Form und Einrichtung, die bei der Heterogeneität der Teile nicht überall leicht war, auf. Sehr zu billigen ist es, dass es die Grenzen des Theoretisch-wissenschaftlichen nicht überschreitet, namentlich die Technik, wie auch andererseits die Schulmathematik und das grenzenlose Gebiet der Configurationen, erstere mit Hinweis auf die reichlich vorhandenen Sammlungen, ausschliesst. Numerische Tabellen sind in geringer Ausdehnung mit aufgenommen; diese hätten, da der Titel des Buchs sie nicht verspricht, auch wegfallen können. Auf Einzelnes einzugehen lässt die Mannigfaltigkeit des Stoffes nicht wol zu. H.

Planimetrische Constructionsaufgaben nebst Anleitung zu deren Lösung für höhere Schulen. Methodisch bearbeitet von E. R. Müller. Dritte Auflage. Oldenburg 1894. Gerhard Stalling. 68 S.

Die erste Auflage ist im 13. litt. Bericht, Seite 10, die zweite im 26. l. B. Seite 15 besprochen. Sichtlich ist das Bestreben, den minder begabten Schülern den Anfang, wo nur Ausführung, nicht Ueberlegung verlangt wird, leicht und ihren Abstand von der Begabteren weniger fühlbar zu machen, um sie alsdann allmählich durch Angabe der Analysis zum Suchen der Lösung zu ermutigen.

H.

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, niederen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der höheren Analysis. Von O. Th. Bürklen, Professor am Reallyceum in Schw. Gmünd. Mit 20 Figuren. Leipzig 1896. G. J. Göschen. 211 S.

Die formulirten Resultate der Principien der genannten Doctrinen werden in befriedigender Vollständigkeit in natürlicher Ordnung zusammengestellt. H.

Sammlung von Sätzen und Aufgaben der systematischen und darstellenden Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Erster und zweiter Curs für die Hand des Schülers bearbeitet von Dr. K. Fink, Rector an der Realanstalt zu Tübingen. Mit 10 Figurentafeln und 84 Blättern für die darstellend-geometrischen Uebungen gezeichnet vom Reallehrer Auer in Tübingen. Tübingen 1896. H. Laupp. 108 S.

Die Aufgaben sind sehr mannigfaltiger Art, stets nur darauf bedacht, die Schüler zum Denken und Beobachten zu bringen, ohne Sorge darum, ob sie jede Frage definitiv beantworten können. Diese Fragen sind manchmal ziemlich unbestimmt und verlangen nur Aéusserung oder beliebige Bemerkung. Namentlich aber werden dadurch alle Eigenschaften und Beziehungen der betrachteten einfachen Gebilde erschöpfend zum Bewusstsein gebracht. H.

Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Von Dr. Ernst Bardey. Vierte Auflage. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 378 S.

Das Vorliegende ist eine reichhaltige Sammlung von Aufgaben zur Uebung im algebraischen Rechnen, Aufgaben, die auf Gleichungen 2. Grades führen. Gegeben sind Gleichungen der mannigfaltigsten algebraischen Form; die Arbeit besteht in der Reduction auf die Normalform, die sich nicht immer direct im 2. Grade ergibt, aber entweder durch Ausscheidung einer leicht erkennbaren Wurzel auf 2. Grad erniedrigt oder in eine Succession quadratischer Gleichungen zerlegt werden kann. Die Aufgaben dieser Art bilden zwei besondere Abschnitte. Für Erwerbung aller zustatten kommenden Kenntnisse ist durch vorausgehende ausführliche Belehrung in bester Weise gesorgt. Die Resultate stehen hinter den einzelnen Aufgaben.
H.

Recueil de problèmes de mathématiques. Algèbre, théorie des nombres, probabilités, géométrie de situation. — Géométrie du triangle. A' l'étude des classes de mathématiques spéciales. Par C. A. Laisant, Docteur ès sciences, Répétiteur à l'École Polytechnique. Paris 1895. Gauthier-Villars et fils. 264 S.

Es werden hier die französisch geschriebenen Bearbeitungen der Probleme aus den genannten Zweigen der Mathematik mit Angabe des Autors und der Zeitschrift zusammen gestellt, welche seit 1842, d. i. seit der Gründung der Nouvelles Annales de Mathématiques erschienen sind. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

E. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Gehalten an der Faculté

des sciences zu Paris. Bearbeitet von C. Bourlet. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit einem Begleitwort von S. Lie. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 416 S.

Das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung wird schrittweise, auch entsprechend dem geschichtlichen Entwickelungsgang, in folgenden Abschnitten zur allgemeinen und vollständigen Lösung geführt: Allgemeine Sätze über die Existenz der Integrale; lineare Gleichungen, vollständige Systeme; lineare totale Differentialgleichungen; Gleichungen von beliebiger Form, Allgemeines, Methode von Lagrange und Charpit; Methode von Cauchy, Charakteristiken; Definition der Ausdrücke (ψ, φ) und $[\psi, \varphi]$, erste Methode von Jacobi; Methode von Jacobi und Mayer; Methode von Lie; geometrische Untersuchung der Gleichungen mit 3 Variabeln, Integralcurven, singuläre Lösungen; allgemeine Theorie von Lie; Berührungstransformationen; Theorie der Gruppe, allgemeine Integrationsmethode. H.

Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialgleichung, Algebra und Functionentheorie. Von Dr. Otto Biermann, o. ö. Professor an der technischen Hochschule zu Brünn. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 381 S.

Die Abschnitte des Buchs sind folgende: Grundlagen der Arithmetik; über Functionen reeller Variabeln; Arithmetik complexer Grössen; Theorie der algebraischen Gleichungen; die rationalen Functionen; Potenzreihen; die elementaren Functionen. Durch diese also soll das Studium der höheren Mathematik vorbereitet werden. Schon öfter ist in der Tat neuerdings die unvernünftige Behauptung laut geworden, zwischen der Schulmathematik und den Vorträgen der höhern Mathematik wäre infolge der Fortschritte (!) der Wissenschaft eine Kluft entstanden. Offenbar würde dann allein die Vortragenden ein Tadel treffen; der Fortschritt kann den Anfang nicht beeinflussen. Die Differentialgleichung fusst bei strengster Begründung ihrer Principien nur auf ganz elementare Lehren, und sie ist wieder in hohem Grade förderlich für die höhere Algebra und Functionslehre. Lässt hier der Vortrag Schwierigkeiten bestehen, so ist die Methode unvernünftig oder mangelhaft: zu den Mängeln gehört gewöhnlich, dass über Begriff und Theorie des Unendlichen keine Auskunft erteilt wird, was auch vom gegenwärtigen Buche gilt. Nimmt man nun aber auch an, dass wirklich eine Lücke vorhanden ist, die den Studirenden das Verständniss erschwert, und fragt, ob das Dargebotene ihnen die vermisste Auf-

klärung geben wird, so mögen diejenigen entscheiden, die das Buch zu eigener Belehrung gebrauchen wollen. U. E. ist es nicht der Fall. An Stelle dessen, was von Natur einfach ist, werden complicirte neue Begriffe geschaffen (wahrscheinlich nicht vom Verfasser, sondern gestützt auf gewisse Autoritäten) und dem Leser so vorgeführt, als wäre es zur Gründlichkeit notwendig. Das Ganze in seinem grossen Umfang, wenn wirklich der Leser glaubt, dass er alles dies lernen müsste, ehe er mit der höheren Mathematik anfangen könnte, ist so abschreckend vom Studium als möglich.

Hoppe.

Sophus Lie, Vorlesungen über continuirliche Gruppen. Mit geometrischer und anderen Anwendungen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers, Privatdocent an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 310 S.

Die Abteilungen des Buchs haben einzeln folgenden Inhalt: Die allgemeine projective Gruppe der Ebene und einige ihrer Untergruppen; Theorie der projectiven Gruppen in der Ebene; die Gruppen der Ebene; die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie; lineare homogene Gruppen und complexe Zahlen; einige Anwendungen der Gruppentheorie. Erklärung der Begriffe wird genügend gegeben.

H.

Beiträge zur Theorie der Gleichungen. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1891. Friedrich Foerster. 133 S.

Die Schrift handelt über folgende Themata: Symmetrische Functionen; Form der Wurzel; Reduction der Gleichung; Auflösung der Gleichung 2ten, 3ten, 4ten Grades; Gleichung 5. Grades; die 2te Bedingung der Lösbarkeit; Unlösbarkeit der Gleichung 5ten und höheren Grades; die unvollständigen Gleichungen; die trinomischen Gleichungen; die binomischen Gleichungen; Identität und Gleichheit; die Vielwertigkeit der Wurzel als Folge der Unbestimmtheit der Coefficienten; Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Coefficienten; die identische Erfüllung einer Gleichung; der vollständige Ausdruck der Wurzel; Auflösung der Gleichung durch convergente Reihen: die algebraische Irrationalzahl; die transcendente Irrationalzahl; Nachweis der n Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades. H.

Leçons sur la résolution algébrique des équations. Par H. Vogt, ancien élève de l'École Normale supérieure, Professeur adjoint à la Faculté des sciences de Nancy. Avec une préface de M. Jules Tannery, Directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure. Paris 1895. Nony et Cie. 201 S.

Die Gegenstände des Werks sind folgende: Substitutionsgruppen; Untergruppen, einfache und zusammengesetzte Gruppen; rationale Functionen mehrerer unabhängigen Variabeln; algebraische Relationen zwischen ihnen; cyklische und metacyklische Functionen mehrerer Variabeln; Rationalitätsbereich, Reducirbarkeit der ganzen Functionen; rationale Functionen der Wurzeln einer Gleichung, Resolventen, Gruppe einer algebraischen Gleichung; Gleichungen 2., 3. und 4. Grades, Lagrange's Untersuchungen; über die algebraische Auflösung der Gleichungen; über die abel'schen Gleichungen; über die Gleichungen der Kreisteilung; über die nicht reducirbaren auflösbaren Gleichungen von Primzahlgrad; über die Gruppen einer Gleichung. H.

Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre de deux variables indépendantes. Par E. Goursat, Maitre de Conférences à l'École Normale supérieure. Tome I. Problème de Cauchy. — Charactéristiques. — Intégrales intermédières. Paris 1896. A. Hormann. 226 S.

Es wird zuerst eine besondere Classe von Gleichungen untersucht; dannn folgt ein Problem von Cauchy, dann die Gleichungen von Monge und Ampère, dann verschiedene Anwendungen, dann die allgemeine Theorie der Charakteristiken. H.

Traité d' analyse. Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Tome III. Des singularités des intégrales des équations différentielles, étude du cas où la variable reste réelle, des courbes définies par des équations différentielles, équations linéaires, analogies entre les équations algébriques et les équations linéaires. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 568 S.

Der I. Band ist besprochen im 43 litt. Bericht S. 31, der II. B. im 47. l. B. 29. Der III. Band enthält: Allgemeines über die Singularitäten der Differentialgleichungen; gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung zu 2 Variabeln; singuläre Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen; gewisse Classen von Differentialgleichungen; verschiedene Methoden successiver Näherung; ge-

wisse lineare Gleichungen 2. Ordnung; Untersuchung einiger nicht linearer Gleichungen; periodische und asymptotische Lösungen gewisser Differentialgleichungen; singuläre Punkte der reellen Integrale der Gleichungen 1. Ordnung; Form der Curven, welche eine Differentialgleichung 1. Ordnung und 1. Grades befriedigen; Allgemeines über die singulären Punkte der linearen Differentialgleichungen; hypergeometrische Functionen; einförmige, aus der hypergeometrischen Differentialgleichung abgeleiteten Transcendenten; gewisse lineare, im Unendlichen irreguläre Differentialgleichungen; einige Classen integrabler linearer Differentialgleichungen; Theorie der Substitutionen und der algebraischen Gleichungen; Analogien zwischen der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der Theorie der algebraischen Gleichungen. H.

Einführung in die Functionentheorie. Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von Dr. W. Láska. Stuttgart 1894. Julius Maier. 55 S.

Die Teile des Werkes sind folgende: Grundbegriffe, namentlich der Irrationalzahl nach Dedekind; die geschichtliche Entwickelung des Functionsbegriffs; Riemann-Cauchy's Functionentheorie; Theorie der complexen Integrale; Fortsetzung der Functionentheorie nach Riemann's Anschauung; rationale Functionen; Theorie der Reihen; die Reihenfortsetzung; Begriff der Functionen nach Weierstrass, die Differentiation; Darstellung der eindeutigen Functionen. H.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Par Jules Tannery, Sous-Directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure, Jules Molk, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. Tome II. Calcul différentiel (IIe partie). Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 299 S.

Der I. Band ist im 47. litt. Bericht S. 28 besprochen. Der II. Band handelt von den Jacobi'schen Functionen ϑ und Weierstrass'schen Functionen σ in der Reihenform, dann deren Quotienten, welche die Inversen elliptischer Integrale ergeben. Hierauf folgt eine Zusammenstellung von Formeln. H.

Faculté des Sciences de Lille. Cours d'analyse. Professé par M. Demartres et rédigé par M. E. Lemaire. Troisième partie. Équations différentielles et aux dérivées partielles. Paris 1896. A. Hermann. 4°. 156 S.

Der 3. Teil des Werkes handelt von der Integration der Differentialgleichungen. Er enthält nach einander: Allgemeines über die Systeme der Differentialgleichungen: Integrationsverfahren; Gleichungen höherer Ordnung, System von Differentialgleichungen; Gleichungen mit partiellen Derivirten; Variationsrechnung H.

Traité d'algèbre. Compléments. Par H. Laurent, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Quatrième partie: Théorie des polynomes à plusieurs variables. Paris 1894. Gauthier-Villars et fils. 53 S.

Die in diesem 4. Teile behandelten Sätze über Polynome in mehreren Variabeln sind nicht einfach genug, um sie anzuführen oder zu charakterisiren. Wir müssen daher auf die Schrift selbst verweisen. H.

Zur Formation quadratischer Gleichungen. Von Dr. Ernst Bardey. Zweite, unveränderte Ausgabe. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 390 S.

Aus dem unbegrenzten Bereiche möglicher Transformationen algebraischer Gleichungen in äquivalente finden sich hier in reichlicher Anzahl solche ausgesucht, die für sich Interesse bieten. An die Transformationen einer Gleichung schliessen sich auch sogleich Verbindungen mehrerer nach dem Princip: Gleiche Operationen an Gleichem vollzogen geben Gleiches — mit dem Ergebniss im erstern Falle einfach einander identischer, im letztern zerlegbarer Gleichungen. Jedes solche Ergebniss wird dann als Lehrsatz ausgesprochen, ohne Zweifel zu dem Zwecke, dass der Schüler die Beziehungen der Gleichungen im Gedächtniss behalten und dadurch einen freieren Ueberblick erwerben soll. Im Grunde wird keine neue Kenntniss gewonnen; denn dieselben Identitäten und Zerlegungen findet man auch, wo die Auflösung das Ziel ist, nämlich auf dem gesicherten analytischen Wege von der Vielheit zur Einheit, d. i. zur normalen Gleichungsform. Hier ist der umgekehrte Weg gewählt, der synthetische von der Einheit zur Vielheit; man geht in dieselbe Erkenntniss, nur zur andern Tür, mit anderer Perspective hinein.

Hoppe.

Theorems in the calculus of enlargement. A method for calculating simultaneously all the roots of an equation. By Emory Maclintock. Amer. Journ. XVII. 1. 2.

Der Verfasser ist im Besitz einer Methode, alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung gleichzeitig zu finden, wie es scheint, entwickelt in unendliche Reihen. Er teilt sie aber nicht mit; denn in der ganzen Schrift ist nirgends ausgesprochen, worin sie besteht. Vielmehr zieht er, wie er sagt, das „praktische" Verfahren vor, dem Leser die Auflösung mehrerer specieller Gleichungen vorzurechnen. In jedem solchen Beispiel findet man eine Reihe Gleichungen mit wenigen Begleitworten, die mancherlei sagen, nur nicht, wie sie gewonnen sind, und was sie bedeuten. Die Methode soll also Geheimniss des Autors bleiben.

Hoppe.

Geometrie.

Cours de géométrie analytique. A l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du gouvernement. Par B. Niewenglowski, Docteur ès Sciences, Ancien Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, Inspecteur de l'Académie de Paris. Tome III. Géométrie dans l'espace. Avec une note sur les transformations en géométrie. Par Émile Borel, Maître de Conférences à la Faculté de Lille. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 572 S.

Obgleich sich das Hauptgewicht auf Specialien und Uebungen gelegt findet, so sind doch die allgemeinen Principien der analytischen Geometrie nicht ganz ohne Berücksichtigung übergangen, sondern bilden den Anfang. Von der linearen Geometrie und der Curventheorie, welcher letztern unter den 31 Capiteln wenigstens eins gewidmet ist, sind die meisten Elementarbegriffe und Relationen hergeleitet; was namentlich fehlt, sind die Variationen der Elemente. Die Flächentheorie dagegen ist sehr kärglich bedacht; sie erstreckt sich bloss auf die Berührungsebene und Normale. Von den Krümmungen ist kein Wort gesagt; die Linien auf den Flächen kommen nur als Erzeugende vor, die zahlreichen Probleme über sie bleiben unerwähnt. Von speciellen Flächenarten werden cylindrische, konische, Rotations- und Regelflächen in Betracht gezogen. Mehr als die Hälfte des Buchs aber handelt von den Flächen 2. Grades.

Hoppe.

Die Harmonikalen der Mittelpunkte der Berührungskreise eines Dreiecks in Bezug auf dasselbe. Von Dr. Fr. W. Frankenbach,

Realschul-Director. Jahresbericht der städtischen Wilhelms-Realschule in Liegnitz. Liegnitz 1895. Programm. 31 S.

Es werden mehrere Sätze und Formeln über symmetrische Configurationen im allgemeinen Dreieck hergeleitet. H.

Over een minimaloppervlak van tweevoudigen samenhang. Door L. C. Kluyver. Verhandlingen der koninglijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, eerste sectie, Deel III. no. 9. Met 2 platen. Amsterdam 1896. Johannes Müller. 42 S.

Es wird zwischen den Umfängen zweier rechteckiger Gegenseiten eines rechtwinkligen Parallelepipedons die kleinste verbindende Fläche berechnet. H.

De merkwaardige punten van den ingeschreven veelhoek. Door M. van Overeem jr. Verhandelingen der koninklije Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, eerste sectie, dl. III. no. 7. Met een plaat. Amsterdam 1896. Johannes Müller. 29 S.

Von den 4 sog. merkwürdigen Punkten des Dreiecks sind nur 2 an beliebigen dem Kreise einbeschriebenen Vieleck von selbst deutlich wiederzufinden, der Mittpunkt O dieses Kreises und der Schwerpunkt des Vielecks Z. Mit beiden liegt beim Dreieck der Höhenschnittpunkt H auf gerader Linie, und zwar ist $OH = 3\,OZ$. Die Mitte der Geraden OH wird unter dem Namen „Mittelpunkt des Euler'schen Kreises N" jenen Punkten zugezählt. Um nun die Analogie am einbeschriebenen n eck zu ergänzen lässt der Verfasser auf der verlängerten Geraden $OH = n\,.\,OZ$ von O aus n Strecken im Verhältniss

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot : \frac{1}{n}$$

abschneiden, betrachtet deren $n+1$ Endpunkte, die jedenfalls Symmetriepunkte des Vielecks sind, als dessen „merkwürdige Punkte" und entwickelt im Laufe der Abhandlung ihre Bedeutung und Eigenschaften. H.

Het vierdimensionale prismatoide. Door P. H. Schoute. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, eerste sectie, deel V. no. 2. Met een plaat. Amsterdam 1896. Johannes Müller. 20 S.

Das hier betrachtete vierdimensionale Prismatoid ist begrenzt von 2 Körpern in parallelen Räumen. Die m und n Ecken des einen und des andern Körpers bilden zusammen sämtliche Ecken des Prismatoids und lassen sich stets, aber in mannigfaltiger Combination, verbunden denken durch Tetraeder, deren Grundflächen in die Seiten teils des einen, teils des andern fallen, während die Spitzen bzhw. Ecken des zweiten oder des ersten sind, jedenfalls verschieden gewählt werden können. Der Inhalt des Prismatoids wird berechnet. H.

Zur Theorie der reellen Curven einer rationalen Function $n$ten Grades für complexe Variable. Von Prof. Dr. Suhle, Director. Programm. Dessau 1896. 4°. 16 S.

Setzt man $z = f(x+iy) = U(x, y) + iV(x, y)$, und betrachtet x, y, z als rechtwinklige Coordinaten, so erhält man für $V = 0$ die Gleichung einer reellen Fläche $z = U$ und hat auf dieser die Curve $V = 0$. Diese Curve wird hier für den Fall, wo f eine beliebige ganze Function ausdrückt, untersucht und mehrere Sätze über sie gefunden.

H.

Schlegel, Professeur à l'École-polytechnique de Hagen. Sur un théorème de géométrie à quatre dimensions. Association Française. Congrès de 1887. Paris. 18 S.

Es wird bewiesen, dass, wie bekanntermassen für $n = 2$ und 3, auch für $n = 4$ ein $n$seitiges n dimensionales Prismatoid sich durch lineare Schnitte in n Plasmen (nach Sylvester so genannt) d, h. n dimensionale $(n+1)$ecke von gleichem Inhalt zerlegen lässt.

E.

Gaston Tarry, Contrôleur de distributions diversers à Alger. Nouvel essai sur la géométrie imaginsire. — Géométrie générale. Association Française. Congrès d'Ovan 1888. — Congrès de Paris 1889, de Limoge 1890, de Marseille 1891. Paris. 22 + 90 S.

Die erstere Schrift behandelt den imaginären Punkt, die imaginäre Gerade und den imaginären Winkel. Die „allgemeine Geometrie" führt manche neue Begriffe ein; jede Erklärung aber stützt sich auf ebenso erklärungsbedürftige Begriffe. Hoppe.

Litterarischer Bericht

LIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Geschichte der Mathemetik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen von H. G. Zeuthen, Professor an der Universität Kopenhagen. Kopenhagen 1896. Andr. Fred. Höst u. Sön.

Das Buch schliesst sich der Reihe derjenigen Autoren an, die nach langer Unterbrechung erst in neuerer Zeit wieder angefangen haben, die Geschichte der Mathematik zu bearbeiten, nämlich Chasles, Brettschneider, Hankel, Cantor, Tannery, Heiberg, Allmann, benutzt deren Werke und stützt sich auf sie. Die eigene Leistung charakterisirt sich durch Hervorhebung einer Seite der Geschichtschreibung, die man früher als unwichtig, vielleicht sogar als ungehörige Einmischung verworfen hat. Um die Geschichte einer Wissenschaft wie der Mathematik und Physik richtig zu beurteilen, ist es durchaus unzureichend ihre Productionen als Zeiterscheinungen zu behandeln. Die Entdecker und Förderer sind meistens ihrer Zeit voraus und finden bei ihren Zeitgenossen zu geringes Verständniss. Namentlich ist in hohem Grade auffällig, dass die physikalischen Kenntnisse der Alten viel umfangreicher erscheinen, nachdem man angefangen hat, die Ueberlieferungen vom heutigen Standpunkt aus zu betrachten. Letzteres macht nun der Verfasser auch zum Princig für seine Charakterisirung der Mathematik der Alten und spricht es auch als solches, was vielleicht hier zum erstenmal geschieht, offen aus. Was indes das Buch nicht gibt, ist die nähere Bekanntschaft mit den Quellen der Geschichte. Ersatz für dieselbe hat der Verfasser in

keiner Weise gewährt, auch dem Leser keinen Rat erteilt um Auskunft über die Quellen zu erlangen. Mögen dann die Urteile über die Productionen und Kenntnisse noch so treffend und unbestritten sein, so bleiben sie doch als bloss wörtlich acceptirte ziemlich unfruchtbar. Vorausgehende Lectüre der Quellen scheint der Verfasser nicht angenommen zu haben, auch sind sie ausser Euklid nicht leicht zugänglich. Vielleicht ist in dieser Beziehung schon von den Vorgängern hinreichend gesorgt, dass der Verfasser es nicht für nötig hielt mehr dafür zu tun. Das Buch beginnt mit einer Vorgeschichte der Mathematik, welche die ersten Antriebe zur Untersuchung mathematischer Fragen aus einzelnen Beschäftigungen herleitet. Am meisten eingehend werden die Lehren der Pythagoräer und der Inhalt von Euklids Elementen behandelt. H.

Leopold Kronecker's Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. Erster Band. Mit L. Kronecker's Bildniss. Leipzig 1895 B. G. Teubner. 4°. 483 S.

Die Werke sind vom Herausgeber nach ihrem Inhalt in 3 Abteilungen zusammen geordnet. Die erste, welche in mehreren Bänden erscheinen wird, enthält die „allgemeine Arithmetik". Darunter versteht der Verfasser „die Anwendung der Begriffe und Methoden der Zahlentheorie auf die Untersuchung der rationalen Functionen beliebig vieler Variabeln. Im vorliegenden I Bande stehen folgende 12 Abhandlungen: Beweis, dass für jede Primzahl p die Gleichung $1+x+x^2 \ldots . + x_{p-1} = 0$ irreductibel ist. — De unitatibus complexis. — Mémoire sur les facteurs irreductibles de l'expression x^n-1. — Démonstration d'un théorème de M. Kummer. — Démonstration de l'irréductibilité de l'équation $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1=0$, où n désigne un nombre premier. — Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. — Ueber complexe Einheiten. — Ueber kubische Gleichungen mit rationalen Coefficienten. — Ueber die Classenanzahl der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. — Ueber einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrer Variabeln. — Ueber bilineare Formen — Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. 2 Abhandlungen. — Sur le théorème de Sturm. — Bemerkungen zur Determinantentheorie. Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Classenzahl idealer complexer Zahlen — Zur algebraischen Theorie der quadratischen Formen. Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. – Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen. — Sur les faisceaux de formes quadratiques et

bilinéaires. — Uebér die congruenten Transformationen der bilinearen Formen. — Von diesen Abhandlungen stehen 6 in Crelle J., 3 in Lionville J., 11 in den Monatsb. d. Akad., 2 in Comptes rendus.

H.

Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie, Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und Allgemeine sphärische Trigonometrie 1753 und 1779. Von Leonhard Euler. Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. Leipzig 1896. Wilhelm Engelmann. 65 S.

In der ersten Abhandlung bestimmt Euler die Seiten des sphärischen Dreiecks als kürzeste Verbindungen der Ecken längs der Kugelfläche durch Integration der Bedingungsgleichung, geht also von der Aufgabe der sphäroidischen Trigonometrie aus. In der zweiten leitet er die Formeln durch Betrachtung der Pyramide zwischen den Ecken und dem Mittelpunkte der Kugel her. Die Ausgabe schliesst mit einer kurzen Biographie von Euler und Verweisung auf die ausführliche, enthalten in R. Wolf, Handbuch der Astronomie. Zürich 1890. H.

Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. In Gemeinschaft mit Friedrich Engel herausgegeben von Paul Stäckel. Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gauss. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 325 S.

Die Verfasser haben mit grossem Erfolge nach den Vorgängern der für Gründer der nichteuklidischen Geometrie geltenden Lobatschefskij und Bolyaì geforscht und teilen im Vorliegenden die gefundenen Urkunden chronologisch mit. Es sind die folgenden: John Wallis 1616—1703. — Girolamo Saccheri 1667—1733. — Johann Heinrich Lambert 1728—1777. — Carl Friedrich Gauss 1777—1855. — Ferdinand Karl Schweikart 1780—1857. — Franz Adolf Taurinus 1794—1874. H.

Julius Plückers gesammelte mathematische Abhandlungen. Herausgegeben von A. Schoenflies Mit einem Bildniss Plücker's und 73 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 620 S.

Das Vorliegende ist der erste Band des Gesamtwerks: „Julius Plückers gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegeben von A. Schoenflies und F. R. Pockels in zwei Bänden". Er enthält 39 bereits in Zeitschriften erschienene Abhandlungen', während 5 selbständige Bücher noch ausserdem käuflich, daher nicht aufgenommen sind. Der Herausgeber bezeichnet Plücker's productive Wirksamkeit als notwendige Ergänzung der Entwickelung der modernen Geometrie in analytischer und formentheoretischer Richtung neben der von Poncelet, Möbius und Steiner, als ihm eigene fundamentale Gedanken die Methode der abgekürzten Bezeichnung, die Bedeutung der Constantenzahl, den allgemeinen Coordinatenbegriff, die Einführung der Linien- und Ebenencoordinaten, die homogene Schreibweise, die Benutzung überzähliger Coordinaten, den Zusammenhang der Singularitäten und die Liniengeometrie.

H.

Gino Loria, Professore ordinario dell' Università di Genova. Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta. Torino 1896. Carlo Clausen. 316 S.

Das Vorliegende ist die Geschichte der Zweige der Geometrie, nämlich der folgenden. Nach einem Blicke auf Ursprung und Entwickelung der Geometrie überhaupt vom Altertum bis gegen 1850 wird einzeln behandelt: die Theorie der ebenen algebraischen Curven; der algebraischen Flächen; der algebraischen doppelt gekrümmten Linien; die Differentialgeometrie (so nennt der Verfasser die Untersuchung der Natur der Curven und Flächen in einem Punkte); Untersuchungen über die Form der Curven, Flächen und andern Gebilde, Analysis situs, Configurationen; die Geometrie der Geraden im Raume, Correspondenzen, Darstellungen, Transformationen; die abzählende Geometrie; die Mehrdimensionengeometrie. Manche Theorien sind erklärtermassen ausgeschlossen. Die Erklärungen und Charakterisirungen sind kurz, den Hauptinhalt bildet der Litteraturnachweis.

H.

Das 2000jährige Problem der Trisection des Winkels. Von Ingenieur Sigismund Wellisch. Mit 11 Textfiguren. Wien 1896. Spielhagen u. Schurig. 18 S.

Die Schrift ist eine historisch litterarische freie Besprechung des Problems.

H.

Lehrbücher.

K. Koppe's Arithmetik und Algebra zum Gebrauche an höhern Unterrichtsanstalten neu bearbeitet von Prof. Dr. Jos. Diekmann, Director des Progymnasiums mit Realabteilung in Viersen, Dreizehnte Auflage. Mit zahlreichen Uebungen und Aufgaben. I. Teil. Die 10 Grundrechnungen — Die linearen Gleichungen. — Die Potenzrechnungen. Die einfachen quadratischen Gleichungen. Essen 1896. G. D. Bädeker. 176 S.

Im 56. litterarischen Bericht S. 46 ist des Verfassers Lehrbuch der Geometrie besprochen. Zu dem auf dem Titel stehenden Inhalte beider sehr bekannten und verbreiteten Lehrbücher ist wol kaum weiteres hinzuzufügen. H.

Katechismus der Algebra. Vierte Auflage. Vollständig neu bearbeitet von Richard Schurig. Leipzig 1895 J. J. Weber. 236 S.

Im 279. litterarischen Bericht S. 24. ist der 1. Teil von des Verfassers „Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauch an niedern und höhern Lehranstalten und beim Selbststudium“ besprochen. Das Vorliegende, obwol Katechismus genannt, stimmt in Lehrweise und didaktischen Gedanken ganz damit überein, so dass alles Gesagte auch hier zutrifft. Es wird hier als 4. Auflage eines Werkes von Herrmann und Heym herausgegeben mit dem Bemerken, dass der Bearbeiter von der katechetischen Form darin absehen zu müssen geglaubt hat. In der Tat hat auch der Verfasser, indem er vorzugsweise in doctrinären Gebrauch und Benennung einführt, mit grossem Geschick zugleich das geleistet, dass Schüler, die das Erlernen als opus operatum ansehen, leicht und ohne tieferes Eindringen stets den Gedankenzusammenhang gerade hinreichend begreifen. Insofern würde das Buch, als zwischen Katechismus und Lehrbuch die Mitte haltend erscheinen und von manchen Schulen, wo die Mathematik für ein Nebenfach gilt, gern angenommen werden. Allein der Verfasser hat darin die ganz misverstandene Lehre von Null und Unendlich, welche er in seinem Lehrbuche vorgetragen hatte, und deren Unrichtigkeit in jenem Berichte reichlich dargetan worden ist, erneuert. Demnach muss das Buch wegen Verbreitung von Irrtümern für untauglich zur Einführung in Schulen erklärt werden.

Hoppe.

Die Grundlehren der Ebenen Geometrie. Ein Leitfaden für den

Unterricht mit Uebungsaufgaben. Von Jos. Lengauer, Professor am k. alten Gymnasium zu Würzburg. Vierte, umgearbeitete Auflage der Ebenen Geometrie Von A. Stegmann. Kempten 1893. Jos. Kösel. 180 S.

In 2. Auflage ist das Buch im 231. litt. Bericht, S. 30 besprochen worden. Aenderungen fanden am meisten in der 3. Auflage statt. In der 4ten wurden die Fundamentalconstructionen dem Lehrsystem eingereiht. Die Congruenzsätze werden hier nicht mehr auf Euklidische Weise begründet, sondern aus der eindeutigen Construction des Dreiecks gefolgert. H.

Lehrbuch der Geometrie. Herausgegeben von Dr. Fritz Meigen. Mit 150 in den Text gedruckten Figuren. Hildburghausen 1896. Otto Pezoldt. 82 S.

Der Vortrag zeichnet sich durch eine kindlich populäre Darstellungsweise aus, die es den Schwächsten fast unmöglich macht, etwas nicht zu verstehen. Auf den ersten 7 Seiten ist diese auch durchaus exact. Dann aber wird über den Begriffen des Winkels und der Richtung das nötige Dunkel verbreitet, um einen trügerischen Scheinbeweis des Parallelensatzes erschleichen zu können. Aufkärung über das zur Orientirung Notwendige, hier Verschwiegene wird auch später nicht gegeben. Pflege der Unkenntniss ist also das würdige Ziel des Buches. Hoppe.

Lehrbuch der Trigonometrie. Herausgegeben von Dr. Fritz Meigen. Mit 41 in den Text gedruckten Figuren. Hildburghausen 1896. Otto Pezoldt. 59 S.

Das Buch ist hinsichtlich guter Ordnung, klaren Ausdrucks und reichlich dargebotener Mittel mit der Lehre vertraut zu machen musterhaft. Der Lehrgang ist der gewöhnliche und empfehlenswerteste: die Goniometrie ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck nebst Ergänzung durch graphische Darstellung und mit der Addition der Winkel schliessend, dann die Dreiecksberechnung, die Aufgaben über das rechtwinklige vorausschickend. Auf Gebrauch trigonometrischer Tafeln mit logarithmischer Rechnung geht das Lehrbuch nicht ein; eine kleine dreistellige Tabelle reicht für die Uebungsbeispiele gerade hin. Gar nicht erwähnt werden Winkel über 180^0, obgleich die graphische Darstellung die Frage nach ihnen nahelegt, und die Addition der Winkel leicht auf solche führen kann. Doch

ist es immer erfreulich, dass das vorliegende Lehrbuch das Schulpensum der Trigonometrie nicht grösser erscheinen lässt, als es wirklich ist, wie es leider oft geschieht. H.

Die Grundlagen der Stereometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht mit Uebungsaufgaben. Von Jos. Lengauer, Prof. am k. alten Gymnasium zu Würzburg. Kempten 1896. Jos. Kösel. 110 S.

In 3 Abschnitten werden die Lehre von der Lage der Ebenen und Geraden, die sphärische Geometrie und Trigonometrie in Verbindung mit dem Dreikant, die Lehre vom Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel und Kugel behandelt und Uebungsaufgaben dazu gestellt. Die Polyeder, namentlich die regelmässigen, werden nur allgemein definirt, aber in keiner Weise näher in Betracht gezogen. H.

Mathematische Hauptsätze für Gymnasien. Methodisch zusammengestellt von Dr. Heinrich Bork, Professor am Königl. Prinz Heinrichs-Gymnasium zu Schöneberg bei Berlin. Zweiter Teil: Pensum des Obergymnasiums (bis zur Reifeprüfung). Leipzig 1896. Dürr. 235 S.

Die Sätze sind vereinigt zu ausgewählten Partien der Planimetrie, Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie. Das Princip der Auswahl ist nicht ausgesprochen. Nun wird aber in diesen Zweigen eine Vorbildung vorausgesetzt, die bereits Bekanntschaft mit der Mathematik in ziemlichem Umfang erteilt hat. Jene Partien scheinen dazu bestimmt zu sein, gewisse Lücken in der Vorbildung auszufüllen, auch wie, sie auszudehnen und ihren Standpunkt zu erhöhen. Besonders bemerkenswert ist die Lehre vom Unendlichen, welche gegenüber einer herrschenden und von Lehrbüchern noch fort und fort gepflegten Unklarheit einmal berichtigend und einfach entscheidend auftritt Hier ist der Lehrsatz (14), welcher die Gleichheit zweier Constanten aus infinitesimaler Bestimmung folgert, in vollem Sinne ein Hauptsatz; er ist es für die gesamte Infinitesimaltheorie. H.

Der Coordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte Zunächst eine Ergänzung der Neubearbeitung der Planimetrie von Kambly Zum Gebrauche an Gymnasien nach den neuen preussischen Lehrplänen bearbeitet von Hermann Roeder, Oberlehrer am Lyceum I zu Hannover. Mit 36 Figuren Breslau 1893 Ferdinand Hirt. 55 S.

Es werden die ebenen rechtwinkligen Coordinaten erklärt und auf Punkt, Gerade, Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel, letztere nur in einfachster Lage zum Axensystem, angewandt Didaktischer Gesichtspunkt ist, die räumliche Vorstellung beständig im Auge zu behalten. Daher erscheint die Rechnungsform weniger als Deductionsmittel, vielmehr als Ziel aller Operationen. Am Schlusse werden die genannten Curven ohne Gebrauch von Coordinaten als ebene Schnitte des geraden Kegels hergeleitet. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Lehrbuch der Algebra. Von Heinrich Weber, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. In zwei Bänden. Erster Band. — Zweiter Band Mit 28 eingedruckten Abbildungen. Braunschweig 1895 Friedrich Vieweg u. Sohn. 633 S.

Das Buch enthält das gesamte Gebiet der Algebra auf neuestem Standpunkt, der erste Band: die Grundlagen, die Wurzeln und algebraische Grössen. Deren Abschnitte behandeln: rationale Functionen, Determinanten, die Wurzeln algebraischer Gleichungen, symmetrische Functionen, lineare Transformation, Invarianten, Tschirnhausen-Transformation; Realität der Wurzeln, den Sturm'schen Lehrsatz, Abschätzung der Wurzeln, genäherte Berechnung, Kettenbrüche, Theorie der Einheitswurzeln; die Galois'sche Theorie, Anwendung der Permutationsgruppen auf Gleichungen, cyklische Gleichungen, Kreisteilung, algebraische Auflösung von Gleichungen, Wurzeln metacyklischer Gleichungen.

Der 2. Band enthält: Gruppen, lineare Gruppen, Anwendungen der Gruppentheorie, algebraische Zahlen. H.

Naturwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung. Verfasst von Arwed Fuhrmann, ordentl. Professor an der Königl technischen Hochschule zu Dresden. Teil II, der Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Berlin 1890. Ernst u Kohn. 261 S

Der Verfasser hat schon bei Herausgabe des I. Teils viel Glück und Erfolg davon geerntet, dass er denjenigen, welche ohne vorausgehendes Studium der höhern Analysis naturwissenschaftliche oder

technische Fächer betrieben, die Kenntniss gerade derjenigen besondern Lehren verschaffte, welche ihnen dabei von Nutzen waren. Es ist nur eine Fortsetzung seines Werkes, dass er jetzt jene Lehren auf die Integralrechnung ausdehnt. Die partiellen Differentialgleichungen bleiben auch diesesmal noch ausgeschlossen, daher offen für eine weitere Fortsetzung. Offenbar ist das Unternehmen ein Schritt dazu, dass der Wert des mathematischen Studiums für einen weiten Kreis wissenschaftlicher Forschung mehr und mehr einleuchtet, obgleich es zunächst von der Mühe der Aneignung einer umfangreichen Doctrin zu entbinden und deren Früchte fertig in die Hand zu liefern scheint; denn der Weg durch die allgemeinen Principien der Doctrin führt meist kürzer und leichter zu den Resultaten als das Ausgehen auf specielles Ziel, und Früchte, die man genossen hat, wird man auch gern selbst pflücken wollen — Die Anordnung des Lehrstoffs ist nicht nach Fächern und Verwendungen, sondern nach den Teilen der Theorie getroffen. Die Abschnitte sind: einfache, dann mehrfache Integrationen, Differentialgleichungen erster, dann zweiter Ordnung. H.

Geometrie.

Die singulären Punkte der Flächen. Habilitationsschrift zur Erlangung der venia legendi an der Königl Technischen Hochschule in Stuttgart vorgelegt von Dr. Ernst Wölffing aus Stuttgart. Dresden 1896 B. G. Teubner. 25 S.

Es wird die Gestalt der Fläche in der Umgebung eines singulären Punktes untersucht. Die Entwickelung der Coordinaten bis auf ersten Term ergibt ein Polyeder, dieses auf eine Ebene projicirt ein Netz. Die Abschnitte der Schrift sind: das analytische Polyeder, die Flächencurven in einem singulären Punkte, das analytische Netz, die Durchdringungscurve zweier Punkte, das Tangentialgebilde, bildliche Darstellung einer Fläche in der Nähe eines singulären Punktes, die Näherungs- und Hülfsflächen, Untersuchung einer Fläche in der Nähe eines singulären Punktes. H.

Mechanik.

Ballistische |Theorien. Beiträge zum Studium neuer Probleme der innern und äussern Ballistik I. Analytische Theorie der Wärmeleitung in Geschützrohren. Von Alois Indra, k. u. k. Major im Festungs-Artillerie-Regimente Graf Colloredo-Mels No. 1. Pola 1893. E. Scharff. 178 S.

Das Gesamtwerk bestimmt der Verfasser für Lösung dreier Probleme betreffend die Wärmeleitung im Geschützrohr, die Stosswirkung der Pulvergase und den Luftwiderstand Für das erste lag die Differentialgleichung schon integrirt von Fourier vor; es ist im gegenwärtigen I. Teile danach bearbeitet. Die auf das zweite bezügliche bisher für unlöslich gehaltene Differentialgleichung ist ihm, wie er sagt, gelungen zu integriren, und es wird dieses Problem die Grundlage einer neuen Theorie der Construction bedingter Geschützröhre bilden. Auch die analytische Theorie des Luftwiderstandes rotirender Geschosse hofft er in vollständig neuer und umfassender Weise darzustellen. Die Abschnitte der vorliegenden Bearbeitung sind folgende. Untersuchungen über die Wärmeleitung im Rohre unter blosser Voraussetzung einer innern constanten Wärmequelle. Wärmebewegung im Rohre unter Voraussetzung einer von Schuss zu Schuss unterbrochenen Wärmequelle. Die Temperaturverteilung im unendlichen Kreiscylinder als geometrisches Mittel der Temperaturverteilung im unendlichen Stabe und in der unendlichen Kugel. Temperaturverteilung im unendlichen Cylinder von begrenzter Länge, wenn die anfängliche Temperatur eine willkürliche gegebene Länge ist. Schlussfolgerungen. Allgemeines Poblem der Fortpflanzung der Wärme bei gegebenem innern und äussern Wärmezustande. Anwendung des Problems der Wärmeleitung zur Bestimmung der Stossintensität der Pulvergase. Wärmemitteilung bei Voraussetzung einer als Function der Zeit continuirlich wirkenden Wärmequelle Es folgt zum Schluss eine Tafel des Integrallogarithmus H.

Die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft und der Vogelflug. Mathematisch-mechanische Klärung auf experimenteller Grundlage entwickelt von Friedrich Ritter von Loessl, Oberingenieur. Wien 1896. Alfred Hölder. 304 S.

Der Verfasser äussert sich in allen Stücken befriedigt von dem Erfolge seiner Untersuchungen in Betreff der 3 genannten Probleme, deren Lösung er in den zunächst geforderten Hauptpunkten überzeugt ist, dauernd festgestellt zu haben Die Schuld des bisherigen Mislingen's schreibt er gewissen, hier nicht näher bezeichneten irrigen

Vorstellungen zu. Auch er geht von vereinfachenden Vorstellungen aus, die er aber durch sorgfältige und vielseitige Experimente soweit gerechtfertigt hat, dass alles darin Vernachlässigte keinen merklichen Einfluss haben kann. Namentlich ist es die Vorstellung, dass eine ebene (oder concave) Platte normal gegen die Luft geführt einen pyramidalen Lufthügel unverändert vor sich her treibt, der fest verbunden mit ihr den Widerstand zum Minimum macht. Letzterer erweist sich dann der Basis bei jeder Gestalt proportional. Ueberall handelt es sich natürlich nur um summarische Hauptgrössen, deren allgemeine Ausdrücke stets sehr einfach ausfallen; detaillirte Bestimmung von Druck in einzelnen Punkten, Luftbewegung u. s. w bleibt ausgeschlossen. Von den Experimenten und Apparaten wird wenig mitgeteilt. Auch in Betreff des Fluges von Tauben, wo der Verfasser beansprucht, alles Fragliche aus der vorhergehenden Theorie genügend erklärt zu haben, erfährt man nicht, wie die Beobachtung angestellt worden ist. H.

Traité de mécanique rationnelle Par Paul Appell, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des sciences. Tome premier; Statique, dynamique du point. — Tome deuxieme: Dynamique des systèmes, mécanique analytique. Paris 1893 1896 Gauthier-Villars et fils. 549 + 538 S.

Der Verfasser setzt die Eigenheit seines Werkes allein darin, dass die analytische Mechanik schon in den Anfang eingeführt werde. Gerade in diesem Punkte lässt sich indes am wenigsten Verschiedenheit von andern Lehrbüchern erkennen. So ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, obwol es das allgemeinste der Statik ist, doch wie gewöhnlich nicht in den Anfang gestellt. Dagegen finden sich sonst genug charakteristische Verschiedenheiten im Lehrgang. Z. B. bildet hier die Lehre von den Kräfteparen kein Glied der Statik. Die Themata der Abschnitte sind der Reihe nach folgende: Theorie der Vectoren, Kinematik, Principe der Mechanik (Kräfte, Massen), Arbeit; Gleichgewicht eines Punktes und eines starren Körpers, deformirbare Systeme, Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, Begriff der Reibung; geradlinige Bewegung, Centralkräfte insbesondere elliptische Bewegung der Planeten, Bewegung eines Punkts auf fester oder beweglicher Curve und Fläche, Lagraage's Gleichungen für einen freien Punkt, Alembert'sches, Hamilton'sches Princip und Princip der kleinsten Wirkung — Kanonische Gleichung, Jacobi'scher Satz, Anwendungen, Trägheitsmomente, allgemeine Sätze über die Bewegung der Systeme, Dynamik des starren Körpers, Bewegungen parallel einer Ebene, Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt,

freier starrer Körper relative Bewegung, Alembert'sches Princip, Lagrange's Gleichungen, kanonische Gleichungen, Sätze von Jacobi und Poisson, Princip von Hamilton und kleinster Wirkung, Stoss, Maschinen. H.

Erd- und Himmelskunde.

Astronomischer Kalender für 1897. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte zu Wien. Jahrg. LIX der ganzen Reihe, XVI. der neuen Folge. Wien, Gerold's Sohn. 159 S

Die Beilagen geben: ein Fixsternverzeichniss, Verzeichniss veränderlicher Sterne, von Nebelflecken und Sternhaufen, Constanten, Uebersicht des Sonnensystems, nämlich Bahnelemente der grossen Planeten, der Satelliten, Verzeichniss der Asteroiden, berechneten Kometen, Sternschnuppenradianten, geographische Positionen, Elemente des Erdmagnetismus, neue Planeten und Kometen. H.

Annuaire pour l'an 1896 — pour l'an 1897. Publié par le Bureau des longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Comme tous les ans à pareille époque l'Annuaire du Bureau des Longitudes vient de paraitre. l'Annuaire pour 1896 renferme une foule de renseignements pratiques réunis dans ce petit volume pour la commodité des travaileurs. On y trouve également des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc, enfin les notices suivantes: Les Forces à distance et les ondulations; par M. A. Cornu — Les Travaux de Fresnel en Optique; par M A. Cornu. — Sur la construction des nouvelles Cartes magnétiques du globe, entreprises sous la direction du Bureau des Longitudes; par M. de Bernardiéres — Sur une troisiéme ascension à l'observatoire du sommet du mont Blanc et les travaux exécutés pendant l'été de 1895 dans le massif de cette montagne; par M J. Jansen. — Notice sur la vie et les travaux du contre-amiral Fleuriais; par M. de Bernardiêres — Allocutions prononcées aux funérailles de M E. Bruner; par MM. J Jansen et F. Tisserand. In-18 de IV-894 pages, avec 2 Cartes magnétiques.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1897 renferme des ar-

ticles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes: Notice sur le mouvement propre du système solaire; par M. F. Tisserand — Les rayons cathodiques et les rayons Röntgen; par M. H. Poincaré — Les époques dans l'Histoire astronomique des planètes; par M. J. Jansen — Notice sur la quatrième Réunion du Comité international pour l'exécution de la Carte photographique du Ciel; par M. F Tisserand. — Notice sur les travaux de la Commission internationale des étoiles fondamentales; par M. F. Tisserand. — Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau; par M. A. Cornu. — Discours prononcés aux funérailles de M. Tisserand; par MM. H Poincaré, J. Jansen et M Löwy. — Travaux au mont Blanc en 1896; par M. J. Jansen. In-18 de V-918 pages, avec 2 Cartes magnétiques.

Paris. Gauthier-Villars et fils.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bernhardt, Philipp Melanchton als Mathematiker u. Physiker. gr. 8°. (VI, 74 S.) Wittenberg, Wunschmann. 1 Mk.

Epstein, S. S., Hermann v. Helmholtz als Mensch u. Gelehrter. 8°. (92 S.) Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt. 1 Mk.

Ernst, Adf., James Watt u. die Grundlagen des modernen Dampfmaschinenbaues. Eine geschichtl. Studie. Mit dem Bildnis v. James Watt u. 27 Textfig. gr. 8°. (V, 106 S.) Berlin, Springer. 2 Mk.

Fortschritte der Physik im J. 1890. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 46. Jahrg. 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann gr. 8°. (LIV, 780 S.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 30 Mk.

— dass. im J. 1895. 51. Jahrg. Ebd. — 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (LXXII, 510 S.) 20 Mk. – 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. gr. 8°. (LIV, 686 S.) 25 Mk.

— der Elektrotechnik. 8. Jahrg. 1. u. 5. Hft. Berlin, Springer. à 5 Mk.

Gay-Lussac, premier essai pour déterminer les variations de température qu' éprouvent les gaz en changeant de densité et considerations sur leur capacité pour la calorique. gr. 8°. (14 S.) Leipzig, Barth. 1 Mk.

Hagen, Joa. G., index operum Leonardi Euleri. gr. 8°. (VIII, 90 S.) Berlin, Dames. 2 Mk.

Müller, Chr. Frdr., Henricus Grammateus u. sein Algorismus de integris. gr. 4°. (33 S) Zwickau, Thost. 1 Mk.

Litterarischer Bericht
LX.

Lehrbücher.

Die Elemente der Arithmetik. Für den Schulunterricht bearbeitet von H. Seeger, Director des Realgymnasiums zu Güstrow. Erster Teil. Buch I. Pensum der Quarta Buch II. Pensum der Untertertia. Zweiter Teil Buch III. Pensum der Obertertia. Buch IV. Pensum der Untersecunda. Buch V. Pensum der Obersecunda. Zweite Auflage. Güstrow 1897. Opitz u. Co. 112 + 159 S.

Das Buch ist in 1. Auflage im 223. litterarischen Bericht, S. 25 besprochen worden. Das Gesagte ist hinreichend auch das gegenwärtige zu charakterisiren. H.

K. Koppe's Arithmetik und Algebra zum Gebrauche an höhern Lehranstalten neu bearbeitet von Prof. Dr. Jos. Diekmann, Director des Progymnasiums mit Realabteilung in Viersen. Dreizehnte Auflage mit zahlreichen Uebungen und Aufgaben. II. Teil. Essen 1897. G. D. Bädeker. 204 S.

Der I Teil, bearbeitet von Dahl in 12. Auflage, ist im 274. litterarischen Bericht besprochen. Im II. Teile kommen folgende Lehrgegenstände hinzu: Lösbare Gleichungen höhern Grades mit 1 Unbekannten; Gleichungen höhern Grades mit mehreren Unbekannten; geometrische Reihen; arithmetische Reihen; der binomische Lehrsatz; Exponentialreihe; complexe Zahlen; logarithmische Reihe;

combinatorische Rechnungen; Kettenbrüche; diophantische Gleichungen; Auflösung der Gleichungen 3. u. 4. Grades; numerische Gleichungen höhern Grades, Maxima und Minima. H.

Niedere Analysis. Von Dr. B. Sporer. Mit 6 Figuren. Leipzig 1897. G. J. Göschen. 173 S.

Unter dieser Bezeichnung werden behandelt: die Kettenbrüche, die Combinationslehre, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, arithmetische Reihen höherer Ordnung, Interpolation, unendliche Reihen, die Theorie der Gleichungen. H.

Algebra. Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen, bearbeitet von Wilhelm Winter, Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium zu Regensburg. Zweite Auflage. München 1895. Theodor Ackermann. 318 S.

Die erste Auflage dieses Lehrbuchs ist im 40. litterarischen Bericht, Seite 36 besprochen. In der zweiten ist, ausser dem Wegfall des Abschnitts über Combinatorik, nichts wesentlich geändert. Entgegen der Aussage des Verfassers, dass er bemüht war, die der ersten Auflage noch anhaftenden Mängel sorgfältig zu verbessern, ist vielmehr zu bemerken, dass die Erklärung der Gleichheit, deren Unrichtigkeit nach jeder Seite hin in jenem Berichte ausführlich dargetan war, unverändert in die 2. Auflage übergegangen ist.

Hoppe.

Lehrbuch der Mathematik. Zum Selbststudium und für den Unterricht in Prima der höheren Lehranstalten vermittelnd den Uebergang vom Schulpensum zum Universitätsstudium. Von Dr. Georg Loewenberg, Director der Oeffentlichen Conditionir-Anstalt in Berlin. Leipzig 1897. J. J. Arnd. 189 + 8 S.

Die in dem Buche behandelten Lehrgegenstände werden unter den Titeln ausgeführt: sphärische Trigonometrie, Grundzüge der Astronomie, analytische Geometrie, Rechentheorie, Gleichungen höheren Grades, Einführung in die Differential- und Integralrechnung, Einleitung in die Determinantentheorie und Anwendung derselben zur Auflösung linearer Gleichungen Ob die hier dargebotene Vermittelung des genannten Uebergangs jemandem von Nutzen sein kann, mögen diejenigen beurteilen, welche das Buch gebraucht haben. Die Lehrweise von Anfang bis zu Ende zeigt im Gegenteil, dass, wenn nach vollendetem Gymnasialcursus der Anfang des Studiums der höhern Mathematik Schwierigkeit bieten sollte, diese im Vor-

liegenden sehr vermehrt auftritt. Hier gibt es nicht bloss zu erlernen, sondern auch zu erraten, was der Verfasser meint; denn fast alle Aussagen sind unvollständig bestimmt und lassen Zweifel, in welchem Sinne man sie verstehen soll. Allerdings hat auch die hier beabsichtigte Unterweisung von Natur als Einschiebung zwischen zwei Disciplinen eine recht ungünstige Stellung für das Verständniss, weil die Basis ihres Standpunktes immer nur eine mutmassliche sein kann. Ebendeshalb ist überhaupt von dem Unternehmen wenig zu hoffen. Hoppe.

Elemente der Trigonometrie zum praktischen Gebrauch für Unterrichtszwecke an mittleren Lehranstalten. Von Jentzen, Director des Thüringischen Technikums zu Ilmenau. Mit 36 Figuren, 2. Auflage. Dresden 1897. Gerhard Kühtmann 55 S.

Das Buch gibt in kurzen Sätzen und Formeln die Erklärung der goniometrischen Functionen, deren Relationen, die Dreiecksrelationen, jede mit zahlreichen ausgeführten Beispielen, und am Schlusse eine Tafel der goniometrischen Functionen (ohne Anwendung von Logarithmen), 7, 6 und von 10^0 an 5stellig durch die Sechstelgrade. H.

Die Planimetrie in ausführlicher Darstellung und mit besonderer Berücksichtigung neuerer Theorien nebst einem Anhange über Kegelschnitte. Mit ungefähr 800 Figuren im Text und mehr als 1200 Uebungssätzen und Constructionsaufgaben für den Hausgebrauch des Lehrers und für den Selbstunterricht bearbeitet von M. Kröger. Hamburg 196. Otto Meissner. 511 S.

Die Lehrform und Methode sind vom Verfasser frei und ohne Anschluss an Vorgänger gewählt; auch scheint sich die Wahl nicht an einfach definirbare Gesichtspunkte zu binden, vielmehr in allen Zielen Mass zu halten und im einzelnen den grössten ersichtlichen Nutzen entscheiden zu lassen. Selbst der Umfang des Ganzen ist durch das Vorhaben, die neuere Methode in den Lehrcursus zuzuziehen, nicht übermässig ausgedehnt, sondern beschränkt sich auf ein ziemlich elementares Gebiet. Die Hauptabschnitte sind nämlich: Gerade und Winkel; Entstehung und allgemeine Eigenschaften geradliniger Flächen; symmetrische Eigenschaften geradliniger Figuren; die geometrische Constructionsaufgabe; Inhalt geradliniger Flächen; der Kreis; Proportionalität der Strecken und harmonische Streckenteilung; Aehnlichkeit geschlossener Figuren; Metrische Relationen bei Kreispolygonen; Cyklometrie; Maxima und Minima; algebraische

Analysis bei geometrischen Relationen; Polarität der Kreise; die Kegelschnitte. Hieraus sieht man, dass die geringen Elemente neuerer Geometrie, von denen hier Gebrauch gemacht wird, weit entfernt sind dem Leser durch Einführung in eine Menge neuer, sogar mit dem gewöhnlichen Gebrauche collidirender Terminologie abzuschrecken. Erklärtermassen ist Hauptzweck und Hauptgesichtspunkt der Lehre von allen in Betracht gezogenen Gebilden und deren Beziehungen eine klare Anschauung zu geben. Neben diesem werden die logischen Anforderungen an den geometrischen Unterricht in der Ausführung nicht berührt, im Vorwort nur mit folgenden Aeusserungen bedacht: man könne nicht alle Sätze beweisen und brauche nicht Schlussweisen bei neuer Anwendung zu wiederholen. Hierauf ist zu erwidern: Axiome können nicht bewiesen werden, weil sie keine Consequenzen, sondern Voraussetzungen sind; alle Sätze der Geometrie aber, die Consequenzen sind, können bewiesen werden. Die bisher stets anerkannte Pflicht der mathematischen Doctrin, diese Beweise zu liefern, d. h. den exact logischen Zusammenhang des Systems der Geometrie zum Bewusstsein zu führen, kann durch jene Aeusserungen nicht bestritten werden. Man kann nur fragen, ob dazu die euklidische Form gerade notwendig wäre. Die hier gewählte Form weicht davon ab, indem sie die Sätze nicht vorher aufstellt, dann beweist, sondern als Resultat vorhergehender Betrachtungen ausspricht. Ob letztere zur Begründung hinreichen, werden Schüler schwerlich zu überlegen geneigt sein: die Lehrweise stellt sich von Anfang an und dann beständig als eine beschreibende dar, zur Prüfung hat der Schüler nie Anlass, er wird als selbstverständlich zum Lehrer das Vertrauen haben, dass alles Mitgeteilte richtig ist. Dass die zahlreichen Uebungen zu der Fähigkeit sichere Schlüsse zu machen führen müssten, fehlt jeder Grund. Auch mögen vielleicht die Elemente aller notwendigen Begründungen, wenn man sie zusammensuchen und verbinden wollte, vollständig im Buche zu finden sein. So ist z. B. der ausreichende Grundsatz für die Parallelentheorie als G r u n d s a t z ausgesprochen; es wäre also leicht gewesen alle zugehörigen Winkelsätze zu beweisen, nur hätte die Winkelgrösse erst erklärt werden müssen. Statt dessen ist erst irreleitend von der Bedeutung des Winkels als M ass einer Drehung die Rede, als wäre dadurch seine Grösse bestimmt. Addition und Messung der Winkel kommt nun freilich nachher in gar manchen Sätzen und Aufgaben vor. Soll sich aber daraus ein Schüler den allgemeinen Begriff der Winkelgrösse bilden, so muss er mehr Verstand besitzen als der Lehrer, der es unbeachtet lässt, dass eben diese constructive Messung den Winkel erst zur Grösse macht. Dies Beispiel zeigt wol zur Genüge, dass die logische Seite des geometrischen Unterrichts nicht gehörig gewürdigt worden ist, und dass deren Zurück-

setzung einen wesentlichen Mangel an Klarheit der Begriffe bestehen lässt. Hoppe.

Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Nach den Vorträgen des Herrn C. Küpper bearbeitet von Dr. Karl Bobek. Mit 96 Textfiguren. Zweite, wohlfeile Ausgabe. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 210 S.

Der äusserst kurze und präcise Ausdruck der Lehre eignet sich vorzüglich den dem Gegenstande fremden Leser in kurzer Zeit ohne Umstände mit ihr bekannt zu machen. Es folgen der Reihe nach die Abschnitte: Projectivität und Involution; Collination; Kegelschnitte, Pol und Polare; imaginäre Bestimmungsstücke, adjungirte Involution; Steinersche Verwandtschaft; Kegelschnittbüschel; Projectivität im Kegelschnittbüschel; Erzeugung der Curve 3. Ordnung.

H.

Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie für den Unterricht bearbeitet von Dr Siegmund Günther, Professor der technischen Hochschule München. Vierte, durchgesehene Auflage mit 47 eingedruckten Figuren und 2 Sternkarten. München 1896. Theodor Ackermann 142 S.

Die 2 Auflage ist im 14. litterarischen Bericht, Seite 22 besprochen; die dritte, welche Vieles berichtigt hat, im 52sten, Seite 47.

H.

Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. Von Martin Girndt, königl. Baugewerksschul-Lehrer. Zweiter Teil: Körperlehre. Mit 64 Figuren im Text. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 55 S.

Der erste Teil (von ebenen Gebilden handelnd) soll nächstens erscheinen. Der Körperlehre voraus geht die Lehre von den verschiedenen Projectionsweisen zum Behufe der Darstellung der Gebilde auf Ebenen und, soweit es die exacte Behandlung derselben fordert, die Lehre von der Lage der Geraden und Ebenen. Die in Betracht gezogenen Gebilde sind prismatische, pyramidale und Umdrehungskörper, ferner einige einfache Gewölbeformen. Dabei sind Uebungsbeispiele, Formeln und eine numerische Tafel. H.

Sammlungen.

Beispiel-Sammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. 2765 Aufgaben, systematisch geordnet. Leipzig 1896. G. J. Göschen. 134 S.

Die Beispielsammlung zeichnet sich durch ungemeine Vielseitigkeit der erstrebten Vertrautheit des Schülers mit allem Gebrauch der Zahl in Schuldoctrin und Leben aus. Man ersieht daraus, dass eine genügende Ausbildung zu mannigfaltige Aufgaben stellt, um sie mit Einübung einiger Algorithmen abschliessen zu können. Der Fortschritt der 3 Rechnungsstufen vertritt nur den kleinsten Teil des Ordnungsprincips der Aufgaben. Die Aufgaben beginnen mit blossem Schreiben und Lesen, weiterhin kommen mehr und mehr neue Elemente und neue Fragen und solche, die Ueberlegung und Erfindung erfordern, hinzu. Selbst die Auflösung der Gleichungen bildet keinen gesonderten Abschnitt, sondern wird schon frühzeitig bei Fragen in Anwendung gebracht. — Die Beispielsammlung schliesst sich an das Lehrbuch an:

Arithmetik und Algebra. Von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Leipzig 1896. G. J. Göschen. 171 S.

Die Hauptabschnitte des Buchs sind betitelt: Uebergang vom Rechnen zur Arithmetik; Rechnungsarten erster; zweiter Stufe; Anwendungen beider Arten; Quadratisches; Rechnungsarten 3. Stufe; Anhang, worin u. A. arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins, Moivre'sches Theorem, kubische Gleichungen. H.

Tabellen.

Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen, hinzugefügt sind vierstellige Additions, Subtractions und briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter hundert. Von Prof. Dr. B. Gundelfinger. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 4°. 15 S.

Die gegebene Gleichung

$$x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$$

wird erst in der Form dargestellt:

$$10^A + 1 - 10^B$$

(z. B. für die Zeichenfolge $++-$ durch die Substitutionen $A = \log\frac{x^m}{e}$; $B = \log\frac{f}{ex^n}$) Die Elimination von x hieraus ergibt eine zweite, und zwar lineare Relation zwischen A und B. Die Verbindung beider Relationen ermöglicht eine Tafel mit einfachem Entree für A (und E), woraus dann der Wert von x folgt. In Betreff des Rechnungsverfahrens, welches vielerlei Ueberlegung, Abschätzung und Correctionen beansprucht, müssen wir auf die „Erläuterungen“ zu den 2 Tafeln verweisen. Die erste stellt auf 3 Seiten gemäss der transscendenten, von e, f unabhängigen Relation B als Function von A dar, die andre ist auf 4 Seiten die genannte. H.

Hilfstafeln für praktische Messkunde nebst logarithmisch-trigonometrischen Tafeln. Zusammengestellt von O. Müller. Zürich 1897. F. Schulthess. 144 S.

Ausser grössern Tafeln der Logarithmen der Zahlen, goniometrischen Functionen, Summen und Differenzen enthält das Buch Unterweisung und Formeln nebst kleinen Tabellen in astronomischen, geodätischen, vielerlei technischen und physikalischen Messungen und ist productiv in Vereinfachung der Methoden. H.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch zusammengestellt von Adolf Sickenberger, K. Gymnasial-Professor und Rektor der Luitpold-Kreis-Realschule in München. Dritte Auflage. München 1897. Theodor Ackermann. 20 S.

Die 2. Auflage ist im 38. litterarischen Bericht S. 16 besprochen. In gegenwärtiger Ausgabe ist das Intervall 0^0 bis 1^0 in kleinerer Teilung ausgeführt, im übrigen die Teilung in Sechstelgrade beibehalten worden. H.

Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen herausgegeben von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Leipzig, B. G. Teubner. 157 S.

Im Vergleich mit den gewöhnlichen Tafeln erscheinen die gegenwärtigen um eine vermehrt, nämlich ausser der Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Functionen auch eine der Functionen selbst,

die nicht selten in Anwendung kommt, um ein zweimaliges Aufschlagen zu ersparen, wo es sich um den Wert nur einer Function handelt. Formelle Eigenheiten aber unterscheiden das Buch noch folgende zwei: Erstens sind, mit Wegfall der Complementarfunctionen die Sinus und Tangens durch den ganzen Quadranten fortgeführt. Den Nutzen der gewöhnlichen Anordnung mag der Verfasser übersehen oder für zu gering gehalten haben; jedenfalls bessert die Abänderung nichts. Zweitens ist zur Tafel jeder der 5 Functionen die Tafel der inversen Function (hier genannt Gegentafel) hinzugegeben. Der Zweck ist durchaus unverständlich. Dass jede Tafel für eine Function zugleich als Tafel für die inverse dient, wird nicht bestritten; das Vorwort sagt nur, sie sei in letzterer Anwendung nicht tabellarisch geordnet, damit kann nur gemeint sein, die Argumente haben keine constante Differenz, denn zur tabellarischen Ordnung genügt beständiges Steigen und Sinken, und dieses fehlt bei jenen Tafeln nicht. Hierauf stützt nun das Vorwort die Behauptung: wer beim Rechnen auf die in Deutschland üblichen Tafeln (ohne Gegentafeln) angewiesen sei, vergeude viel Zeit, sagt aber nicht, welche Mehrarbeit diese Zeit erfordern soll. Eine Tafel über eine beständig steigende Function y von x gibt unmittelbar eine steigende Reihe von Zahlen x, unter denen eine x die nächst kleinere von einer gegebenen Zahl $x+\delta$ und eine $x+\delta_0$ die nächst grössere sofort kenntlich ist. Ihnen entsprechen die daneben stehenden Functionswerte y und $y+\varepsilon_0$. Zwischen diesen liegt der gesuchte Functionswert $y+\varepsilon$ entsprechend $x+\delta$, bestimmt durch die Proportion:

$$\delta : \delta_0 = \varepsilon : \varepsilon_0$$

Alles dies gilt auch für die inverse Abhängigkeit, wo $y+\varepsilon$ gegeben und $x+\delta$ gesucht ist. Auch die Erleichterung der Interpolationsrechnung durch den Umstand, dass δ_0 als Einheit letzter Decimalstelle keine Rechnung verursacht, ist dieselbe. Es ist daher gar nicht zu verstehen, wie die Hamburger Gelehrtenschule die Lehre vom Gebrauch der Logarithmentafeln so geben kann, dass die umgekehrte Anwendung derselben Tafel mehr Arbeit verlangt als die Anwendung einer neuen Tafel. Bei verdoppeltem Aufwand von Hülfsmitteln ist die Leistung höchstens eine gleiche. Hoppe.

Vierstellige mathematische Tabellen im engen Anschluss an die mathematischen Tabellen der technischen Kalender. Von E. Schultz, wissenschaftl. Lehrer an der Königl. Maschinenbau- und Hüttenschule zu Duisburg. In zwei Ausgaben a) mit Anleitung, b) ohne Anleitung. Essen 1896. G. D. Baedeker.

Zur Motivirung der erneuerten Herausgabe der in den technischen Kalendern bereits enthaltenen Tabellen wird im Vorwort angegeben, dass zur Schonung der Augen der Schüler ein grösserer Druck notwendig geworden sei. Dies, sowie der Titel, lässt annehmen, dass die Einrichtung der Tabellen beibehalten ist. Sie geben die Quadrate, Kuben und Logarithmen der natürlichen Zahlen, die sin, cos, tg und cot für die Minuten, dann deren Logarithmen, ausserdem viele in der Technik, besonders im Maschinenbau oft vorkommende Grössen. Mancher Ueberfluss, insbesondere die Hinzufügung der inversen Tabellen, lässt erkennen, dass auf mathematische Einsicht wenig gerechnet ist, dass vielmehr die Tabellen ganz gewohnheitsmässig gebraucht werden sollen. H.

Vierstellige logarithmische und goniometrische Tafeln nebst den nötigen Hilfstafeln. Herausgegeben von P. Treutlein, Director des Realgymnasiums Karlsruhe. Braunschweig 1896. Vieweg und Sohn. 72 S.

Die Einrichtung der Haupttafeln, umfassend ausser den Logarithmen der Zahlen und den Logarithmen der goniometrischen Functionen auch die Functionen selbst in grössern Argumentsdifferenzen, ist im wesentlichen die gewöhnliche. Der Verfasser hat die Vereinfachungen, welche sich schon in frühern Ausgaben vierstelliger Tafeln fanden, zu vereinigen gesucht. Was hier Hilfstafeln genannt wird, sind Tafeln, die zu einander und zu den Haupttafeln in keiner Beziehung stehen, sondern jede für sich anderweite Bestimmung haben. Der Verfasser eifert nun sehr für den ausschliesslichen Gebrauch vierstelliger Tafeln in den Mittelschulen und für Ersparung des Interpolirens, soweit es möglich sei. In Verteidigung seiner Ansicht spricht sich aber eine Verwechselung des Zieles der Schule mit dem des Rechners aus. Letzteres ist das Resultat jeder Aufgabe, ersteres die Vertrautheit des Schülers mit den Mitteln der Lösung. Durch Unterlassung lernt niemand etwas. Da also der Verfasser das Interpoliren nicht ganz für entbehrlich hält, so ist es offenbar geradezu zweckwidrig, es soviel als möglich zu vermeiden. Bieten vierstellige Tafeln zu wenig Gelegenheit Begriff und Methode des Interpolirens kennen zu lernen, so ist dies kein Vorzug, sondern ein Mangel solcher Tafeln hinsichtlich des Schulgebrauchs. Es gibt indes noch andre Punkte, welche der Empfehlung vierstelliger Logarithmentafeln entgegenstehen. Von den Gründen, weshalb bisher fast nur 7- und 5stellige zur Verbreitung gelangt sind, spricht das Vorwort gar nicht. Es ist bekannt und fällt in die Augen, dass durch Verzicht auf die 7te, resp. die 5te Stelle, der nötige Umfang

der Tafel sich nicht merklich vermindert Mit Einführung vierstelliger Tafeln wird also den Schülern ein Mittel in die Hand gegeben, das auf verfehlter, unkluger Speculation beruht, und das sie, wenn sie zur Einsicht gelangen, gegen bessere Hülfsmittel vertauschen werden.

Hoppe

Vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tabellen. Für den Schulgebrauch zusammengestellt von Dr. A. Schülke. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 18 S.

Die Tafeln sind für vielerlei Anwendungen bestimmt. Ausser den rein mathematischen sind besonders noch physikalische und astronomische Angaben tabellarisch aufgeführt. Die mathematischen Haupttafeln geben die Logarithmen der Zahlen (ausser den briggschen die natürlichen bis 100) und der trigonometrischen Functionen. In Betreff der letztern ist hervorzuheben, dass die Winkel ausschliesslich in Graden angegeben werden, und die Teilung in Minuten und Secunden unterbleibt. Hiermit ist wenigstens eine ausschliessliche Einheit für Rechnung mit Winkeln gewonnen; nur ist diese noch eine willkürliche. Warum mit der Sexagesimalteilung nicht auch die Nonagesimalteilung beseitigt ist, fehlt aller Grund. Was das Vorwort sagt, verrät zwei Vorurteile. Erstens wird darin die Centesimalteilung des rechten Winkels, welche in neuester Zeit von mehr und mehr Herausgebern von Tafeln angenommen wird, die „neue“ Teilung genannt, als ob man statt einer Zahl 90 eine andre Zahl 100 gewählt hätte. In der Tat nennen jene Tafeln unpassenderweise das Hundertteil Rechte einen Grad und führen so einen Doppelsinn des Wortes Grad ein. Wer die Bedeutung eines Decimalbruchs kennt, wird nach Verwerfung des Nonagesimalgrads den Wert jedes Winkels durch eine (decimal geschriebene) Anzahl Rechte ausdrücken. Der Name „neue Kreisteilung“ beruht also auf einem Reste von Unklarheit und Befangenheit. Der rechte Winkel ist kein neuer Begriff. Zweitens wird der Meinung unbestrittene Geltung eingeräumt, die Astronomen wären durch Rücksicht auf die kostbaren Instrumente gezwungen, bei Minuten und Secunden zu bleiben. Die Form der Beobachtungsresultate kann offenbar ihrer Ausdrucksform in der Rechnung keinen Zwang auferlegen. Ebenso wie bei physikalischen Untersuchungen, wo die Scalen der Apparate für den Zweck der Beobachtung eingerichtet sind, daher die erhaltenen Zahlen zum Zweck der Rechnung öfters reducirt werden müssen, ist auch nach Himmelsbeobachtung schon wegen Refraction u. a. m. manche Reduction der Zahlen nötig, und kann die hier verlangte Reductions-

arbeit der Winkelteilung gegen den grossen Gewinn an Kürze der Rechnungen nicht in Betracht kommen. Die im Vorwort genannte Verhinderung der Astronomen am Uebergang zur Decimalteilung des Winkels durch ihre Instrumente erweist sich somit als völlig nichtig und leerer Vorwand. Was den Astronomen den Zwang auferlegt, ist vielmehr der Beschluss des Pariser Einheitscongresses, an den die Sternwarten aller Länder in ihrem Verkehr und ihren Publicationen gebunden sind, und der keine rationale Verbesserung von Seiten der einzelnen mehr zulässt. Der Beschluss ist, wenn nicht als Folge, doch vermutlich sehr beeinflusst durch den derzeitigen Mangel an den nötigen litterarischen Hülfsmitteln gefasst worden. Dies kann und möge für diejenigen, welche in der Lage sind für rationale Ordnung der Winkelausdrücke zu wirken, ein Antrieb sein, dem alten Schlendrian nicht zögernd schrittweise zu entsagen, sondern sogleich den bekannten Standpunkt einzunehmen, auf den wir doch schliesslich kommen müssen. Hoppe.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Katechismus der Differential- und Integralrechnung. Von Franz Bendt, Mit 20 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1896. J. J. Weber. 267 S.

Die Bearbeitung scheint mehr auf geordnete Zusammenstellung der Doctrin, fertig zur Anwendung, als auf principielle Entwickelung derselben gerichtet. Daher begnügt sie sich damit, von den Elementen der Infinitesimalrechnung in geometrischer Gestalt eine Anschauung zu geben Leicht wäre es gewesen, damit die analytische Form zu verbinden und die nötigen Definitionen und Sätze als allgemeine Grundlage der Rechnung aufzustellen, was in diesem Gebiete, wenn die Lehre zu richtigen Schlüssen befähigen soll, gewiss nicht überflüssig, und doch für Anfänger der Arithmetik verständlich ist. Die Lehrgegenstände sind: die algebraische Analysis, die Differentiation der Functionen, die Reihen von Taylor und Mac Laurin, Bestimmung gewisser Ausdrücke, Maxima und Minima, Curventheorie, Differentiation der Functionen mehrerer Variabeln, Integration der Functionen, bestimmte Integrale, Quadratur, Rectification, Complanation, Kubatur, vielfache Integrale, Differentialgleichungen, die complexen Zahlen, alles dies in mässigem Umfang.

Hoppe.

J. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Zweite, durchgesehene Auflage von G. Bohlmann. Erster Band: Differentialrechnung. Mit in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 570 S.

In der ersten Auflage der Uebersetzung waren die Fortschritte der Doctrin seit dem Erscheinen des Werks nur in Noten bemerkt. Der Herausgeber der zweiten Auflagen hat nun diese und alle fernern Fortschritte ausführlich bearbeitet. Während nun beide für die extensive Bereicherung tätig gewesen sind, ist die Grundlegung des Ganzen auf dem Standpunkte geblieben, auf den der Verfasser das Werk gestellt hatte Dieser ist so niedrig wie kaum in einem andern Lehrbuche; entweder sind die Principien sehr ungeschickt oder geflissentlich zu dem Zwecke bearbeitet das Wesen der Hauptgegenstände der Lehre zu verhüllen und ihr den Anschein einer unbegreiflichen zu geben. Eine Definition des Grenzwerts wird zwar aufgestellt, bleibt aber von da an unbeachtet. Der Grenzwert wird der Function stets schlechthin in einem Punkte zugeschrieben, seine Abhängigkeit vom Variationsweg verschwiegen und, wo sie sich durch Abweichung bemerklich macht, mit Redensarten abgetan. Dementsprechend werden die unendlichkleinen Grössen nie erwähnt, die Infinitesimalschlüsse ignorirt, und die Infinitesimaltheorie bleibt ein dunkles Gebiet. Das Zeichen ∞ wird sogar ausdrücklich ein Grenzwert genannt. — Die Capitel des Buchs sind folgende: Einleitende Begriffe; der erste Differentialquotient der Functionen 1 unabhängigen Variabeln; höhere Differentialquotienten von Functionen 1 Veränderlichen, partielle Differentialquotienten von Functionen mehrerer Veränderlichen; totale Differentiale und partielle Differentialquotienten; Entwickelung der Functionen in Potenzreihen; Theorie der Maxima und Minima; Theorie der ebenen Curven; Theorie der Raumcurven und krummen Flächen; die Curven auf Flächen und die Flächenfamilien; über Functionen einer complexen Variabeln; Zerlegung der rationalen Functionen in Partialbrüche.

Hoppe.

Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Professor Dr. Ludwig Schlesinger, Privatdocenten an der Universität zu Berlin. In zwei Bänden. Zweiten Bandes erster Teil. Mit Figuren im Text. Leipzig 1897 B. G. Teubner. 532 S.

Der jetzt erschienene erste Teil des 2. Bandes umfasst die Abschnitte: Allgemeine Theorie der bei linearen Differentialgleichungen

auftretenden Gruppen. Specielle Probleme der Gruppentheorie. Formulirung und allgemeine Discussion der Umkehrprobleme. Theorie und Anwendungen der Euler'schen Transformirten. Die angegebenen Originalarbeiten sind von Galois, Cauchy, Jordan, Poincaré, Cayley, Dyck, Weber, Cantor, Weierstrass, Lie, Biermann, Klein, Picard, Vessiot, Appell, Jacobi, Clebsch, Koenigsberger, Kronecker, Fuchs, Gino Fano, Beke, Halphén, Borel, Forsyth, Veronese-Schepp, Franke, Vuklčevič, Liouville, Heffter, Engel, Schwarz, Laguerre, Briochi, Cockle, Goursat, Wallenberg, Rosenkranz, Lipsmann Schlesinger, M. Meyer, Gordan u. Nöther, Hermite, Abel, Casorati, Ritter, Riemann, C. Neumann, Poisson, Schottky, Vogt, Mellin, Frobenius, Euler, Pincherle, Pochhammer, Nekrasseff, Hossenfelder, Kummer, Schläfli, Broecker, Legendre. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Du Bois-Reymond, Emil, Gedächtnissrede auf Herm. v. Helmholtz. gr.4°. (50 S.) Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

Fortschritte, die der Physik i. J. 1890. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 46. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (XLIV, 781 S.) Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.

— dass. 1891. 47. Jahrg. 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (LXIV, 418 S.) Ebd. 18 Mk.

— dass. i. J. 1895. 51. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (XLVII, 843 S.) Ebd. 30 Mk.

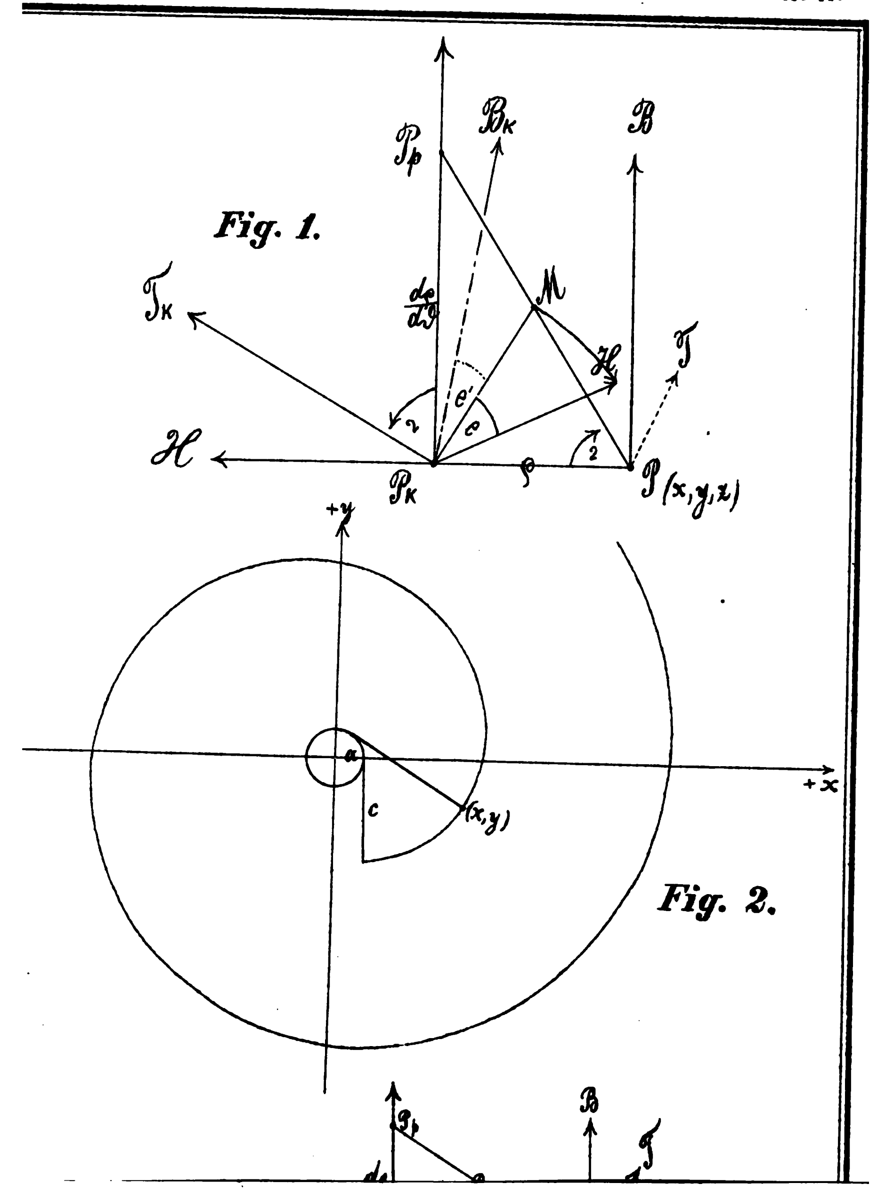
Hesse's, Ludw. Otto, gesammelte Werke. Hrsg. v. der mathemat.-physikal. Classe der bayer. Akademie der Wissenschaften. gr.4°. (VIII, 732 S. m. Bildnis.) München, Franz. 24 Mk.

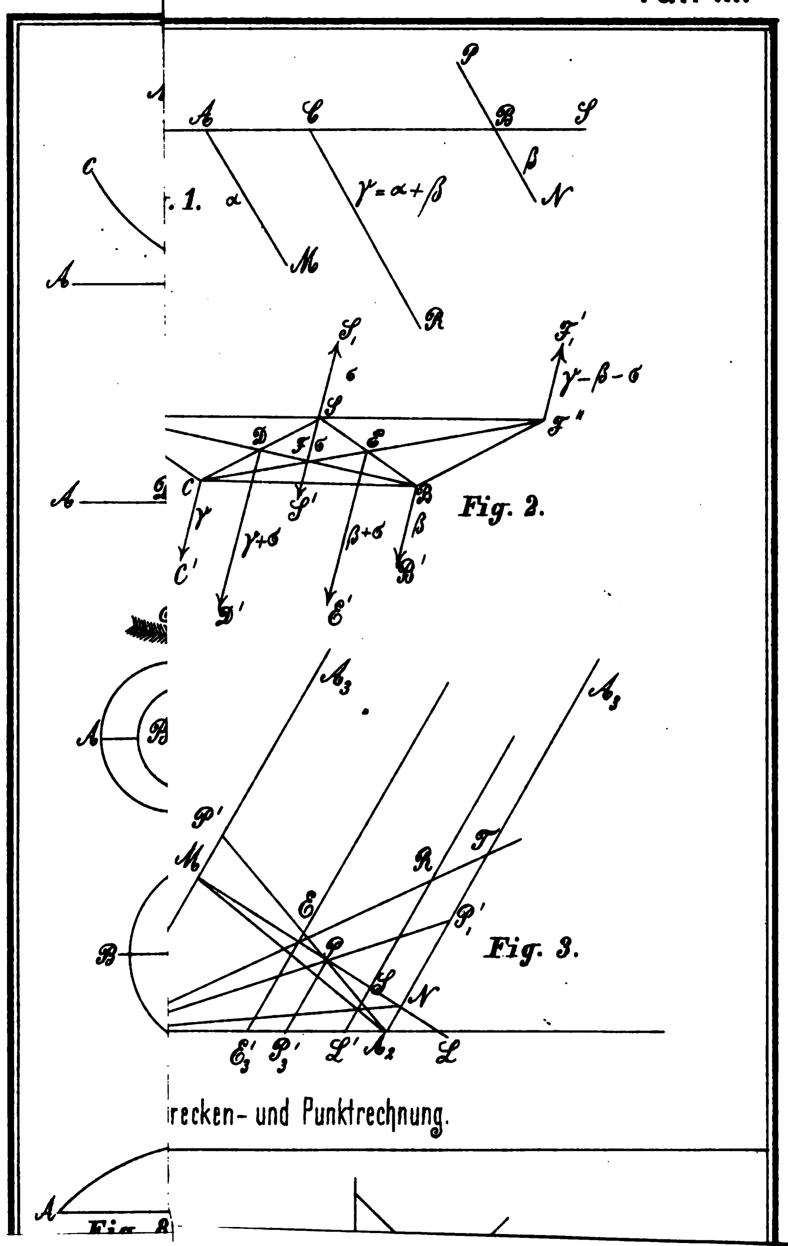
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. Emil Lampe. 25. Bd. Jahrg. 1893 u. 1894. 3. (Schluss-)Heft. gr. 8°. (XCII u. S. 1317–1996.) Berlin, G. Reimer. 19 Mk.

Lampe, Emil, Karl Weierstrass. Gedächtnissrede. gr. 8°. (24 S.) Leipzig, Barth. 60 Pf.

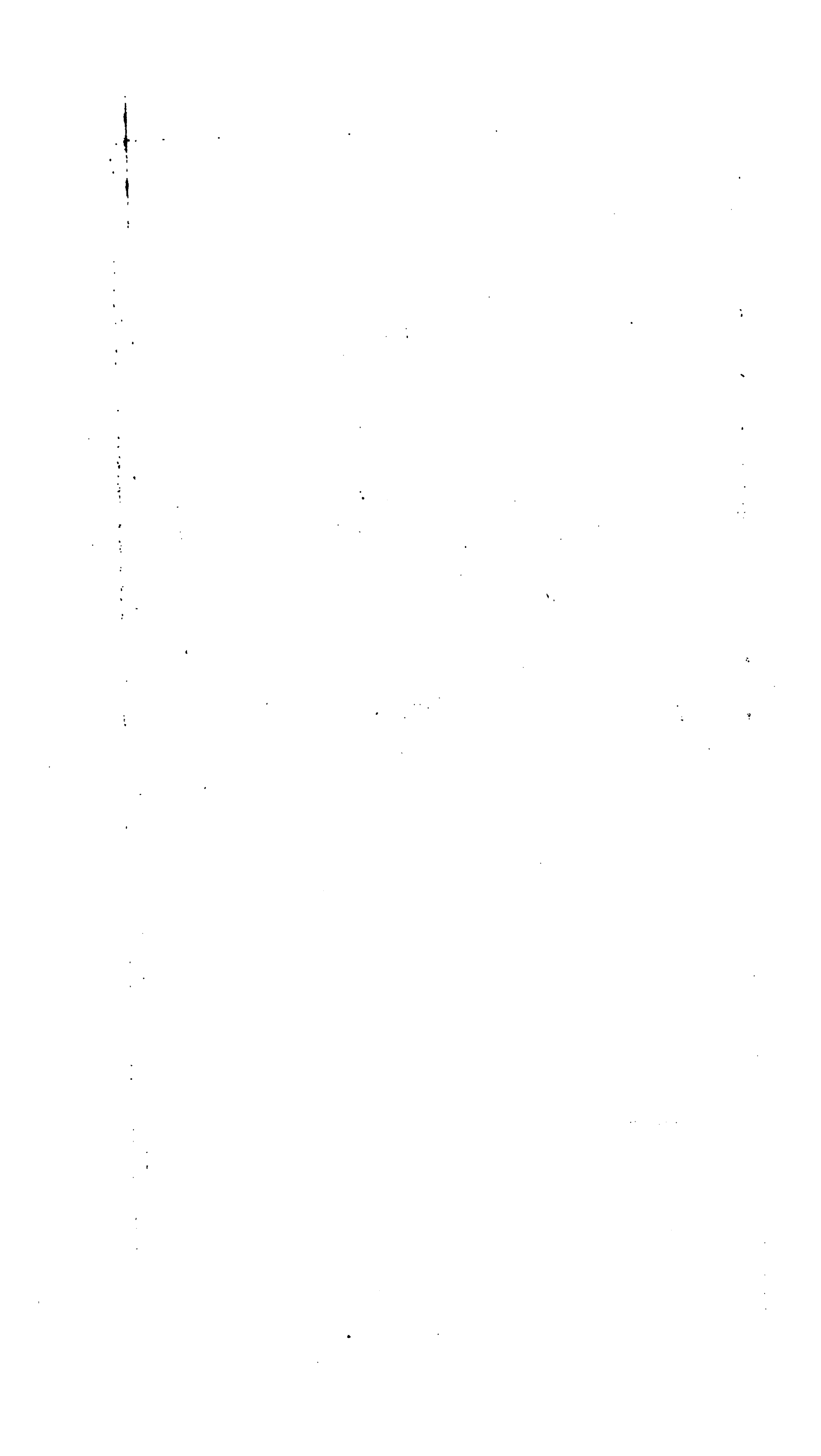
Poggendorff's Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 3. Bd. 7. Lfg. Ebd. 3 Mk.

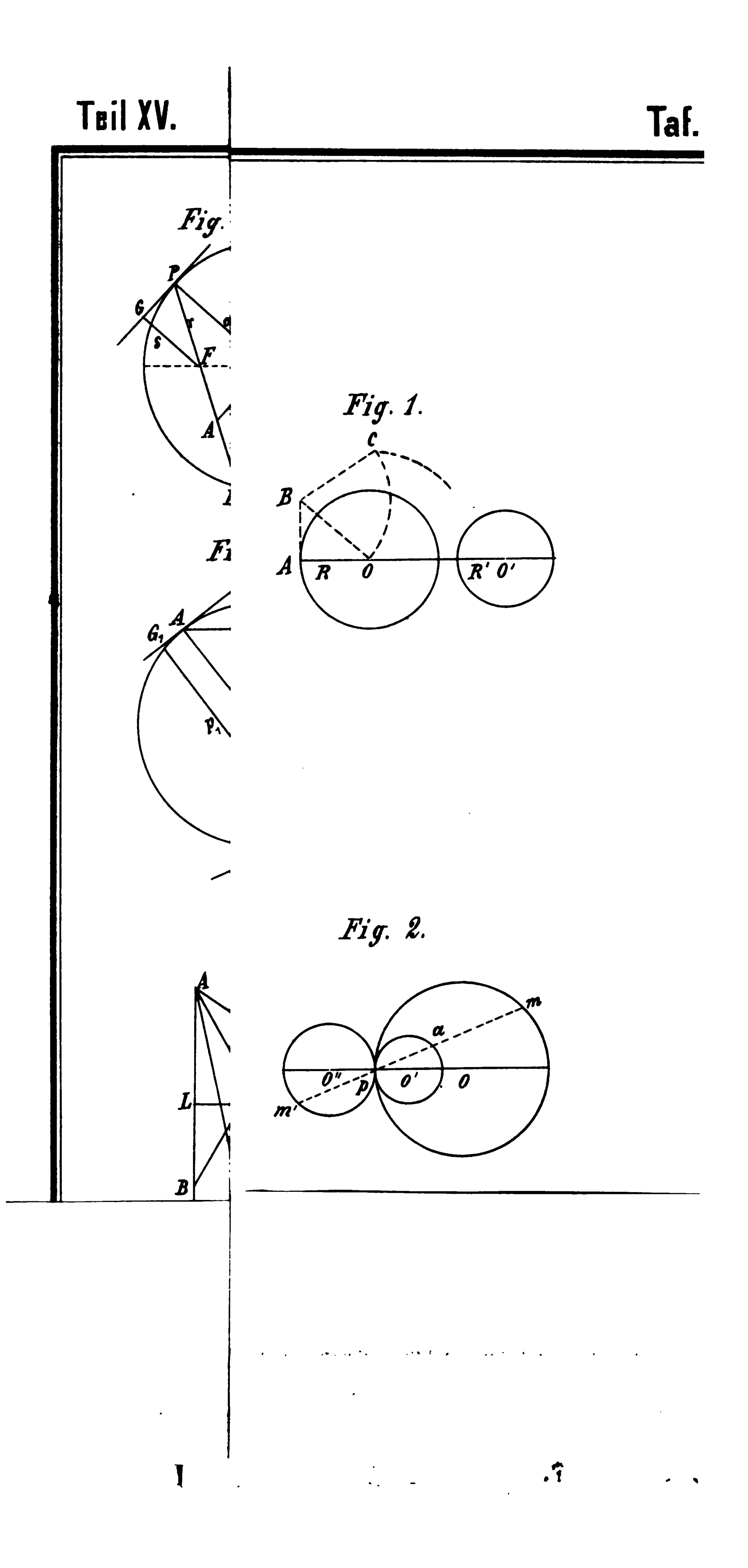
Villicus, Frz., die Geschichte der Rechenkunst vom Alterthum bis zum XVIII. Jahrh. Mit Illustr., Zahlzeichen, Zahlensystemen u. Rechenmethoden der alten Culturvölker u. altamerikan. Völkerstämme, nebst e. tabellar. Darstellung v. Zahlwörtern des Zehnersystems aus 72 Sprachen. 3. Aufl. gr. 8°. (VIII, 114 S.) Wien, Gerold. 3 Mk. 20 Pf.


Fig. 1.
Fig. 2.
+y
+x
(x,y)
c
a



recken- und Punktrechnung.




Fig. 1.
C
B
A
R
O
R'
O'
Fig. 2.
m
a
O"
p
O'
O
m'
P
G
s
F
A
G₁
B
L

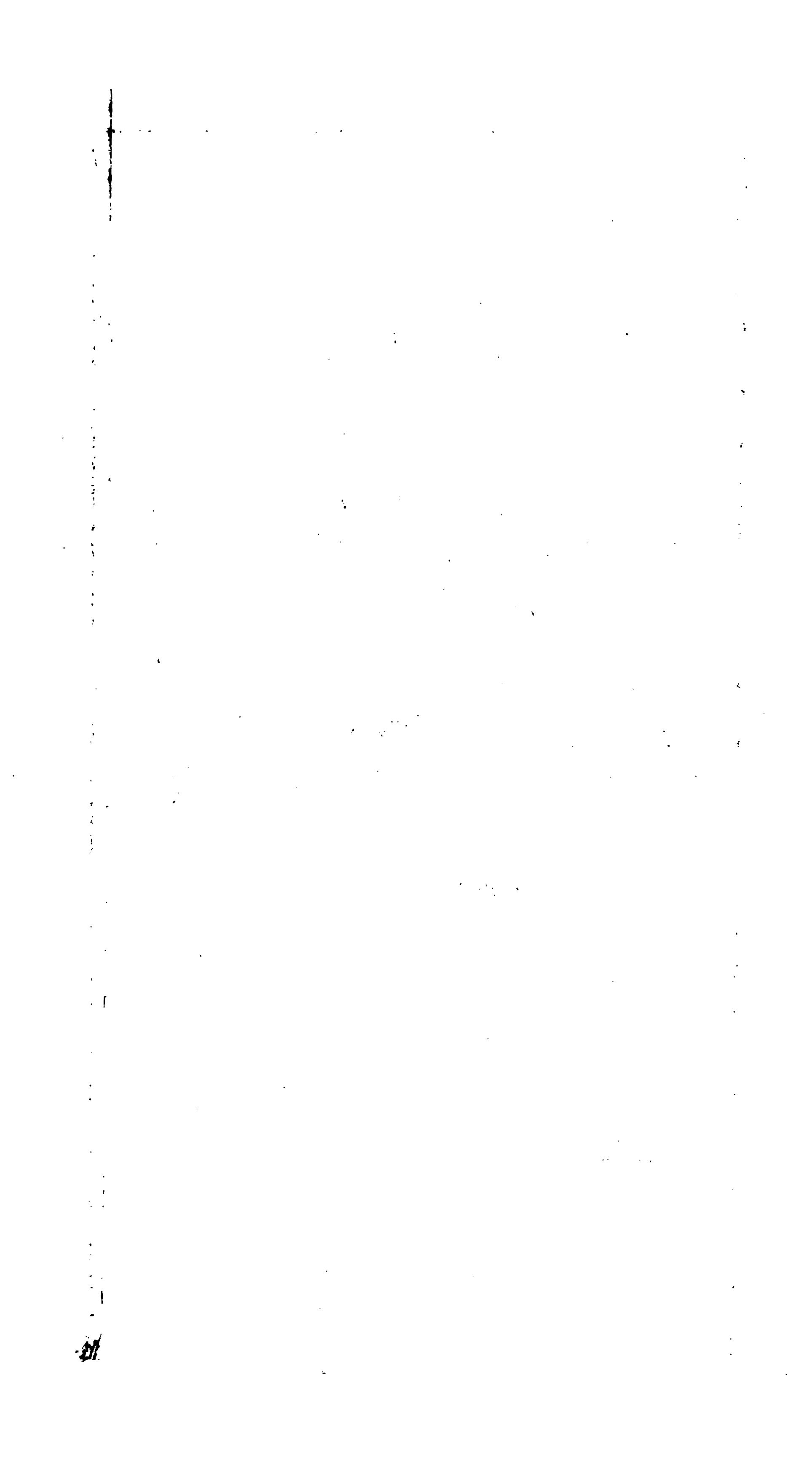
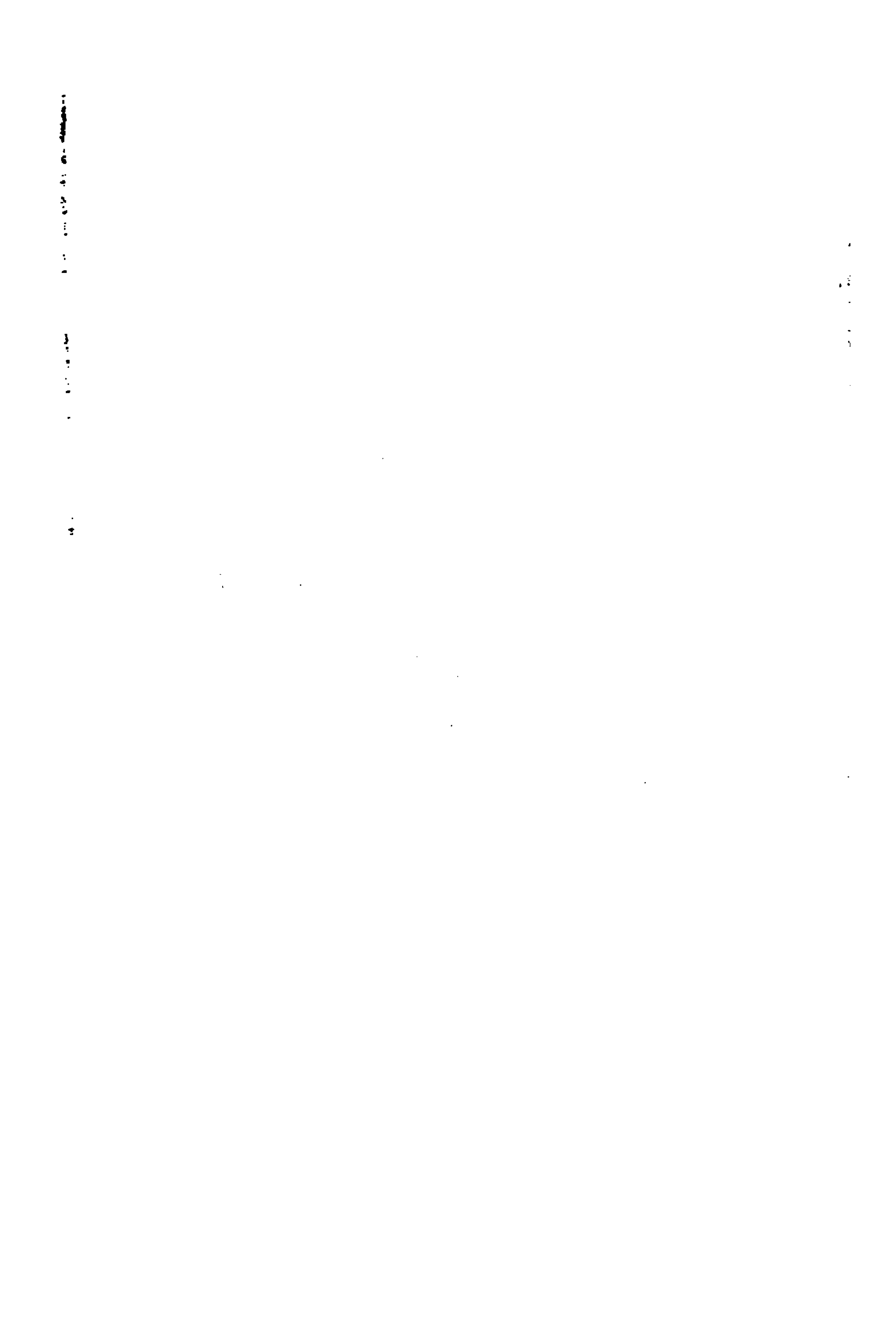


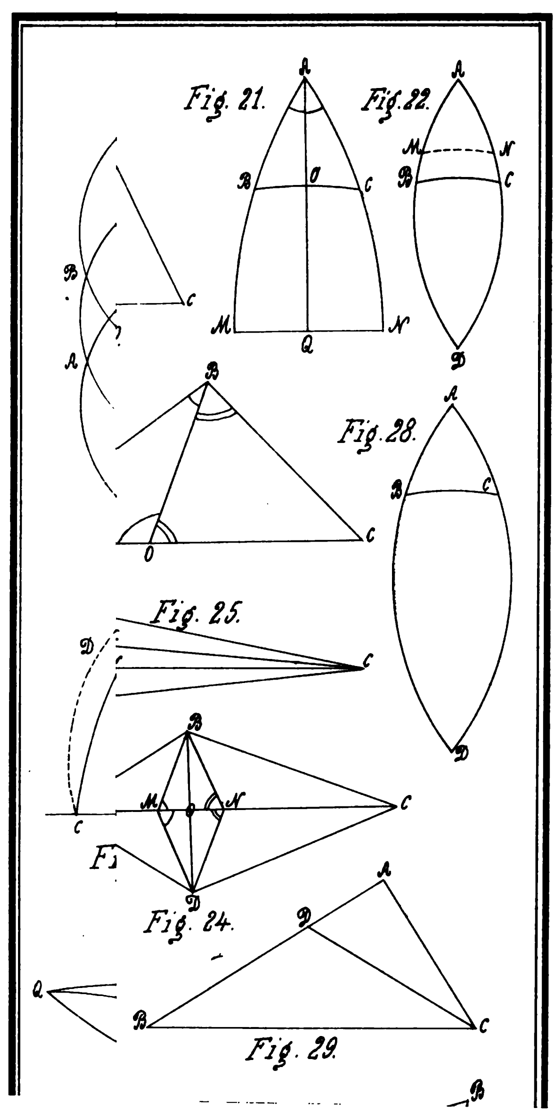
Fig. 8.
C
9
10
9
E
H
D
F
8
B
K

Fig. 9.
C
13
14
N
15
E
O
D
F
G
16
A
9
10
17 B
L
M
K
Q
P
3
U
4

Fig. 10.
6



Tei Taf. VI.


Fig. 21.
A
B
O
C
M
Q
N
Fig. 22.
A
M
N
B
C
D
Fig. 28.
A
B
C
D
B
O
C
Fig. 25.
D
C
B
M
N
C
D
Fig. 24.
A
D
B
C
Fig. 29.
Q

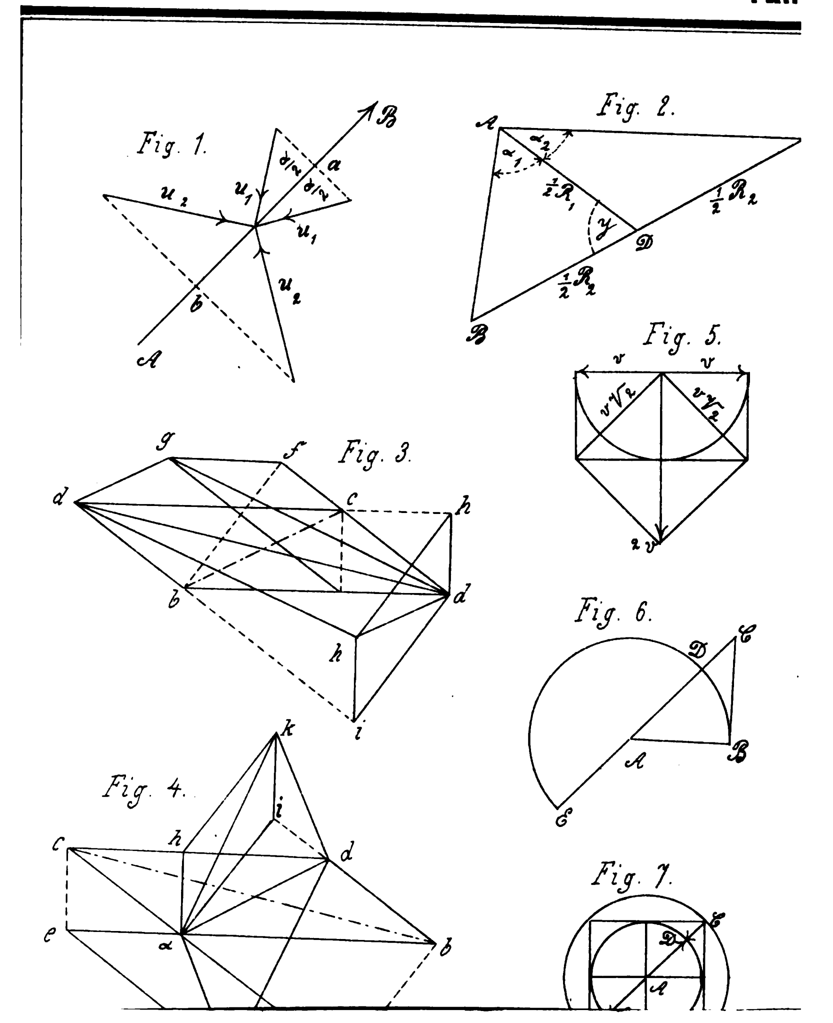


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

